О выборе начальных условий для метода Рунге–Кутта при решении неоднородного ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

Олег Евгеньевич Галкин

October 2023

Лемма 0.1. Пусть $f \in C_b(\mathbb{R})$ и $\alpha \in \mathbb{C}$. Тогда

1) если $\mathrm{Re}\alpha < 0$, то функция $g(x) = e^{\alpha x} \int\limits_{-\infty}^{x} f(y)e^{-\alpha y}\mathrm{d}y$ лежит в $UC_b(\mathbb{R})$

2) если $\mathrm{Re}\alpha > 0$, то функция $g(x) = e^{\alpha x} \int\limits_{x}^{+\infty} f(y)e^{-\alpha y}\mathrm{d}y$ лежит в $UC_b(\mathbb{R})$.

Доказательство. 1) Имеем: $g(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(y)e^{\alpha(x-y)}\mathrm{d}y = [y = z + x, z = y - x] = \int\limits_{-\infty}^{0} f(z+x)e^{-\alpha z}\mathrm{d}z$. Так как $f \in C_b(\mathbb{R})$, то $|f(x)| \le M$ для некоторого $M \ge 0$ и любых $x \in \mathbb{R}$. Поэтому $\forall x \in \mathbb{R}$ верно неравенство

$$|g(x)| \le \int\limits_{-\infty}^{0} |f(z+x)||e^{-\alpha z}|\mathrm{d}z \le M \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-z\mathrm{Re}\alpha}\mathrm{d}z = \frac{M}{\mathrm{Re}\alpha}.$$

Следовательно, g ограничена на $\mathbb{R}$.

Теперь покажем, что $g(x)$ равномерно непрерывна. $\forall x \in \mathbb{R}$ имеем $g'(x) = \alpha e^{\alpha x} \int\limits_{-\infty}^{x} f(y)e^{-\alpha y}\mathrm{d}y + e^{\alpha x}f(x)e^{-\alpha x} = \alpha g(x) + f(x)$. Отсюда

$$|g'(x)| \le |\alpha||g(x)| + |f(x)| \le |\alpha|\frac{M}{|\mathrm{Re}\alpha|} + M.$$

Итак, $g'(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$. Поэтому функция $g(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}$ имеем $g(-x) = e^{-\alpha x} \int\limits_{-x}^{+\infty} f(y)e^{-\alpha y}\mathrm{d}y = [z = -y, y = -z] = e^{-\alpha x} \int\limits_{-\infty}^{x} f(-z)e^{\alpha z}\mathrm{d}z$. Так как функция $f(z)$ ограничена, то $f(-z)$ тоже ограничена. Отсюда по пункту 1) доказательства получаем, что функция $g(-x)$ ограничена и равномерно непрерывна. Следовательно, такими же свойствами обладает и функция $g(x)$, то есть $g \in UC_b(\mathbb{R})$. □

Теорема 0.1. Пусть $p, q \in \mathbb{R}$, причём выполняется одно из двух условий: либо $p^2 - 4q < 0$ и $p \ne 0$, либо $p^2 - 4q > 0$ и $q \ne 0$. Тогда

1) для любой функции $f \in C_b(\mathbb{R})$ дифференциальное уравнение

$$y'' + py' + qy = f \tag{1}$$

имеет на $\mathbb{R}$ единственное ограниченное решение.

2) Обозначим через α и β различные корни λ_1 и λ_2 квадратного уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Тогда единственное ограниченное решение $y = y(x)$ уравнения (1) можно записать в виде

$$y(x) = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\int\limits_{\gamma_\alpha}^{x} f(z) e^{\alpha(x-z)} \mathrm{d}x - \int\limits_{\gamma_\beta}^{x} f(z) e^{\beta(x-z)} \mathrm{d}x \right),$$

где $\gamma_\alpha = -\infty$ при $\mathrm{Re}\alpha < 0$ и $\gamma_\alpha = \infty$ при $\mathrm{Re}\alpha > 0$. Нижний предел γ_β определяется аналогично. При этом выполняются равенства

$$y(0) = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\int\limits_{\gamma_\alpha}^{0} f(z) e^{-\alpha z} \mathrm{d}x - \int\limits_{\gamma_\beta}^{0} f(z) e^{-\beta z} \mathrm{d}x \right) \tag{2}$$

и

$$y'(0) = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\alpha \int\limits_{\gamma_\alpha}^{0} f(z) e^{-\alpha z} \mathrm{d}x - \beta \int\limits_{\gamma_\beta}^{0} f(z) e^{-\beta z} \mathrm{d}x \right). \tag{3}$$

Доказательство. 1) Сначала найдём общее решение $y_{\text{оо}}$ однородного дифференциального уравнения

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{4}$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Его корни $\alpha = \lambda_1$ и $\beta = \lambda_2$ при указанных в теореме условиях являются различными и отличными от нуля. Поэтому общее решение уравнения (4) имеет вид $y_{\text{оо}}(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}$, где c_1 и c_2 – произвольные (вещественные или комплексные) постоянные.

Теперь запишем вид общего решения $y_{\text{он}}$ исходного уравнения (1).

$$y_{\text{он}}(x) = y_{\text{чн}}(x) + y_{\text{оо}}(x) = y_{\text{чн}}(x) + c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}, \tag{5}$$

где $y_{\text{чн}}(x)$ - некоторое частное решение уравнения.

Так как числа α и β различны и не равны 0, то функция $y_{\text{оо}}(x)$ является ограниченной на $\mathbb{R}$ только в одном случае: при $c_1 = c_2 = 0$. Поэтому из формулы (5) вытекает, что уравнение (1) имеет не более одного ограниченного на $\mathbb{R}$ решения.

Далее перейдём к поиску ограниченного решения уравнения (1). Для этого применим метод вариации постоянных и будем искать это решение в виде

$$y(x) = c_3(x) e^{\alpha x} + c_4(x) e^{\beta x}, \tag{6}$$

где $c_3(x)$ и $c_4(x)$ - некоторые дважды дифференцируемые функции на $\mathbb{R}$. Известно (см., например, [?]), что производные $c_3'(x)$ и $c_4'(x)$ этих функций должны при всех $x \in \mathbb{R}$ подчиняться системе уравнений

$$\begin{cases} c_3'(x) e^{\alpha x} + c_4'(x) e^{\beta x} = 0 \\ c_3'(x) \alpha e^{\alpha x} + c_4'(x) \beta e^{\beta x} = f(x). \end{cases}$$

Решая неё, находим:

$$\begin{cases} c_3'(x) = \frac{1}{\alpha - \beta} f(x) e^{-\alpha x} \\ c_4'(x) = -\frac{1}{\alpha - \beta} f(x) e^{-\beta x}. \end{cases}$$

Поэтому подойдут, например, функции

$$c_3(x) = \frac{1}{\alpha - \beta} \int\limits_{\gamma_\alpha}^{x} f(z) e^{-\alpha z} \mathrm{d}z$$

и

$$c_4(x) = -\frac{1}{\alpha - \beta} \int\limits_{\gamma_\beta}^{x} f(z) e^{-\beta z} \mathrm{d}z.$$

Подставляя их в равенство (6), получаем функцию

$$y(x) = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\int\limits_{\gamma_\alpha}^{x} f(z) e^{\alpha(x-z)} \mathrm{d}z - \int\limits_{\gamma_\beta}^{x} f(z) e^{\beta(x-z)} \mathrm{d}x \right), \tag{7}$$

которая даёт одно из решений уравнения (1). Это решение, согласно Лемме 1, является ограниченным и лежит в классе $UC_b(\mathbb{R})$.

Остаётся доказать формулы (2) и (3) Из формулы (7) получаем выражение для производной: $y'(x) = \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\alpha \int\limits_{\gamma_\alpha}^{x} f(z) e^{\alpha(x-z)} \mathrm{d}z - \beta \int\limits_{\gamma_\beta}^{x} f(z) e^{\beta(x-z)} \mathrm{d}x \right)$. Подставляя сюда и в формулу (7) значение $x = 0$, получим формулы (3) и (2) соответственно.

Теорема доказана. □