

О 3-диффеоморфизмах с обобщенным аттрактором Плыкина

М.К. Барина, О.А. Кольчурина, Е.И. Яковлев

НИУ ВШЭ

Задача:

Привести пример Ω -устойчивого диффеоморфизма $F_{Pl} : M^3 \rightarrow M^3$, неблуждающее множество которого состоит из обобщенного аттрактора Плыкина и 12-ти изолированных периодических точек. Найти энергетическую функцию для него.

Некоторые определения

Определение

Дiffeоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$ называют Ω -устойчивым, если C^1 -близкие к f диффеоморфизмы топологически сопряжены на неблуждающих множествах.

Определение

Для Ω -устойчивого диффеоморфизма выполняется теорема Смейла о спектральном разложении, $NW(f)$ представляется в виде конечного дизъюнктного объединения подмножеств, называемых базисными, каждое из которых является компактным, инвариантным и топологически транзитивным. Если базисное множество является периодической орбитой, то его называют тривиальным, в противном случае — нетривиальным.

Определение

Базисное множество Λ Ω -устойчивого диффеоморфизма $f : M^n \rightarrow M^n$ называется аттрактором, если у него существует компактная окрестность U_Λ такая, что $f(U_\Lambda) \subset \text{Int } U_\Lambda$ и $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(U_\Lambda) = \Lambda$. Если $\dim \Lambda = \dim W_x^u$, $x \in \Lambda$, то аттрактор Λ называется растягивающимся.

Типы нетривиальных аттракторов

2002 — Е.В. Жужома, В.С. Медведев доказали, что любое 3-многообразие, допускающее Ω -устойчивый диффеоморфизм f с обобщенным аттрактором Плыкина, является неориентируемым, а сам диффеоморфизм не является структурно устойчивым.

2023 — М.К. Баринова, О.В. Починка, Е.И. Яковлев доказали, что нетривиальный аттрактор Λ в неблуждающем множестве Ω -устойчивого 3-диффеоморфизма сосуществует с тривиальными базисными множествами только в трех случаях.

Типы нетривиальных аттракторов

Нетривиальный аттрактор Λ в неблуждающем множестве Ω -устойчивого 3-диффеоморфизма сосуществует с тривиальными базисными множествами тогда и только тогда, когда Λ :

- 1 Диффеоморфизм с двумерным ориентируемым растягивающимся аттрактором — DA-диффеоморфизм на трехмерном торе.
- 2 Диффеоморфизма с неориентируемым одномерным аттрактором — каскад 3-сферы (полученный компактификацией декартового произведения диффеоморфизма Плыкина на 2-сфере и гиперболического сжатия на прямой).
- 3 Диффеоморфизм с двумерным неориентируемым растягивающимся аттрактором — ?

Типы нетривиальных аттракторов

1974 — Р.В. Плыкин — геометрическое построение структурно устойчивого диффеоморфизма двумерной сферы с одномерным неориентируемым аттрактором.

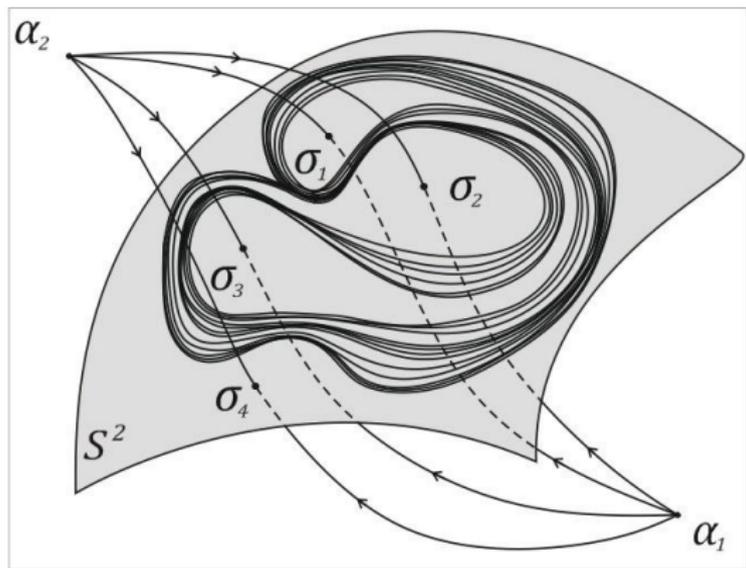


Рис.: Аттрактор Плыкина в трехмерном пространстве с изолированными периодическими точками

Пример диффеоморфизма с неориентируемым растягивающимся двумерным аттрактором

Теорема

Существует Ω -устойчивый диффеоморфизм $F_{Pl} : M^3 \rightarrow M^3$, неблуждающее множество которого состоит из обобщенного аттрактора Плыкина и 12-ти изолированных периодических точек.

Пример диффеоморфизма с неориентируемым растягивающимся двумерным аттрактором

Начнем с гиперболического автоморфизма $L_A : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, заданного на трехмерном торе \mathbb{T}^3 гиперболической матрицей $A \in GL(3, \mathbb{Z})$. Инволюция $J : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, задана с помощью формулы:

$$J(x, y, z) = -(x, y, z) \pmod{1}$$

Инволюция имеет 8 неподвижных точек на трехмерном торе. Так как эти точки периодические для L_A , то существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что эти точки являются неподвижными для L_{A^k} . Собственные векторы матрицы A^k определяют устойчивое одномерное W^s и неустойчивое двумерное W^u слоения.

Пример диффеоморфизма с неориентируемым растягивающимся двумерным аттрактором

Гиперболический автоморфизм L_A :

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \pmod{1}$$

Неподвижные точки для инволюции:

$$(0, 0, 0), (0, \frac{1}{2}, 0), (0, 0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), \\ (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Отображение L_{A^k} задается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 & 146 & 84 \\ 62 & 83 & 46 \\ 106 & 132 & 77 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \pmod{1}$$

Пример диффеоморфизма с неориентируемым растягивающимся двумерным аттрактором

L_{A^k} задается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 & 146 & 84 \\ 62 & 83 & 46 \\ 106 & 132 & 77 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \pmod{1}$$

Собственные векторы

$$\vec{e}_s \approx \begin{pmatrix} -0.519 \\ -0.166 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_u^1 \approx \begin{pmatrix} 0.383 \\ -0.870 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_u^2 \approx \begin{pmatrix} 1.093 \\ 0.601 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Соответствующие им собственные числа матрицы A^k :

$$\lambda_s \approx 0.001 < 1, \quad \lambda_u^1 \approx 2.802 > 1, \quad \lambda_u^2 \approx 272.197 > 1.$$

Пример диффеоморфизма с неориентируемым растягивающимся двумерным аттрактором

Пусть $\lambda_u = \max(\lambda_u^1, \lambda_u^2)$. Выберем столь малое $r_0 > 0$, что $\lambda_u r_0$ -окрестности неподвижных точек не пересекаются. Построим C^1 -гладкую функцию $\delta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

- для всех $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ функция $\delta(x, y_0, z_0)$ — нечетная, монотонно возрастающая на \mathbb{R} ;
- если $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > r_0$, то $\delta(x, y, z) = x$;
- если $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \frac{\lambda_s}{4} r_0$, то $\delta(x, y, z) = \frac{2x}{\lambda_s}$.

Пример диффеоморфизма с неориентируемым растягивающимся двумерным аттрактором

Пусть $\Delta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ такая, что $\Delta(x, y, z) = (\delta(x, y, z), y, z)$.

Определим диффеоморфизм $f_{GDA} : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ следующим образом:

$$f_{GDA}(a) = \begin{cases} L_{A^k}(a), & \text{если } a \notin U_i, \\ L_{A^k} \circ C_i^{-1} \circ \Delta \circ C_i(a), & \text{если } a \in U_i \end{cases}$$

Где $C_i : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — отображение перехода.

Получим диффеоморфизм f_{GDA} — обобщенный DA-диффеоморфизм (Generalized Derived from Anosov diffeomorphism). Он является Ω -устойчивым диффеоморфизмом и его неблуждающее множество состоит из 8 неподвижных источников, совпадающих с неподвижными точками инволюции J , и двумерного связного аттрактора.

Пример диффеоморфизма с неориентируемым растягивающимся двумерным аттрактором

Удалим все источники и факторизуем бассейн аттрактора по инволюции J :

$$\tilde{M} = (\mathbb{T}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^8 \alpha_i) / J$$

$\tilde{M} \setminus \Lambda$ состоит из 8 связных компонент \tilde{N}_i , каждая из которых диффеоморфна $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}$.

Различные результаты, получаемые при склейке

Для любой перестановки $P = \{i_1, j_1, i_2, j_2, i_3, j_3, i_4, j_4\}$ найдется такое $m \in \{1, 2, 3\}$, что

$$H_3(M_P) = 0, \quad H_2(M_P) \cong \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_2, \quad H_1(M_P) \cong \mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}_2^m.$$

А именно:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - m = 3$$

$$\{1, 2, 3, 5, 4, 6, 7, 8\} - m = 2$$

$$\{1, 3, 2, 5, 4, 6, 7, 8\} - m = 1$$

Пример диффеоморфизма с неориентируемым растягивающимся двумерным аттрактором

$M^3 = \tilde{M} \cup_h P$ — гладкое замкнутое многообразие, где

$\tilde{M} = (\mathbb{T}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^8 \alpha_i) / J$ — обобщенный аттрактор Плыкина.

$P = \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_4$ — четыре связные компоненты $g = g_1 \times g_2$.
 g_1 действует на $\mathbb{R}P^2$, а g_2 — на \mathbb{R} .

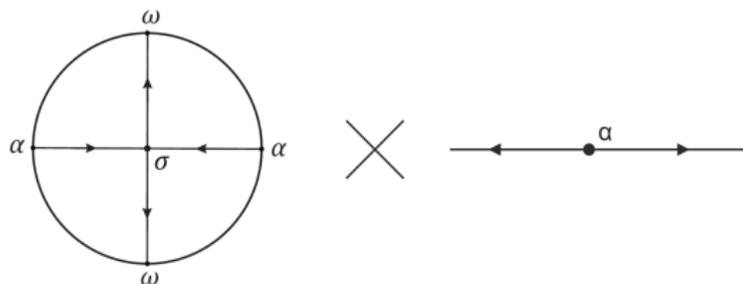


Рис.: Диффеоморфизм g_1 на $\mathbb{R}P^2$ и диффеоморфизм g_2 на \mathbb{R}

Функция Ляпунова и энергетическая функция

Определение

Функция Ляпунова - непрерывная функция, убывающая вдоль блуждающих орбит и постоянная на каждом базисном множестве.

Определение

В силу результатов Ч. Конли, функция Ляпунова существует для любой динамической системы на гладком компактном n -многообразии.

Определение

Энергетическая функция $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ это гладкая функция Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с неблуждающим множеством f .

Энергетическая функция для g_1

Построим энергетическую функцию для g_1 . Для этого рассмотрим двулистное накрытие $q : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ двумерной сферой $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

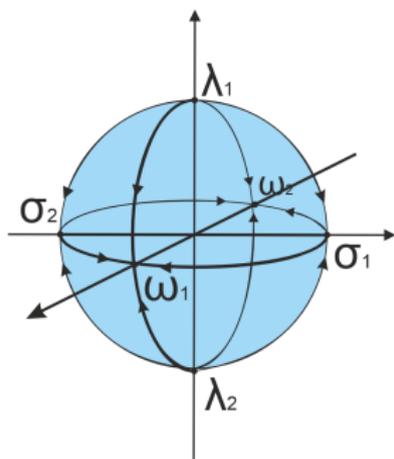


Рис.: Диффеоморфизм на S^2 , индуцированный q

Энергетическая функция для g_1

Построим гладкое отображение $H : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Тогда $\forall a \in S^2 : H(a) = (x(a), y(a), z(a))$. $z(a)$ в силу построения коммутирует с накрытием q , а значит $\varphi_1 = z \circ q^{-1}$ — является энергетической для g_1 .

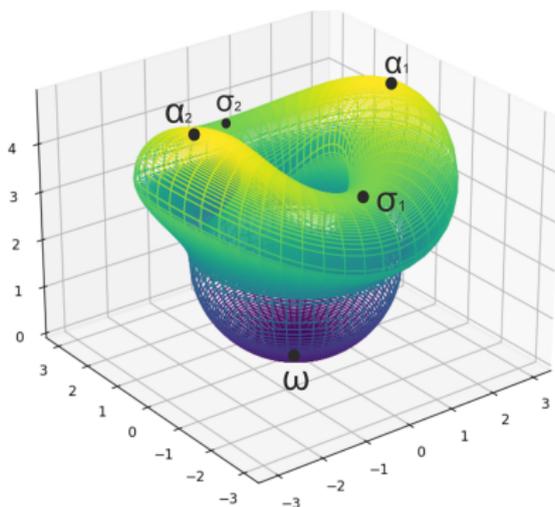


Рис.: Поверхность P

Энергетическая функция для g_2

Теперь найдем энергетическую функцию для g_2 . Для каскада g_2 энергетической будет функция $\varphi_2(x) = -x^2$.

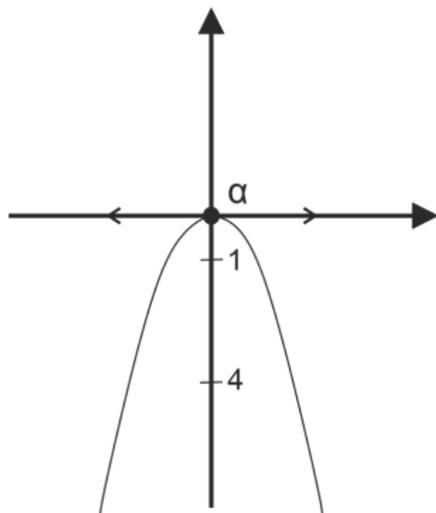


Рис.: Диффеоморфизм g_2

Энергетическая функция для g_2

Существует энергетическая функция φ для прямого произведения g_1 и g_2 ¹, причем ее можно выбрать в виде

$$\varphi(w, x) = \arctg(\varphi_1(w) + \varphi_2(x)) + \frac{\pi}{2}.$$

Из определения функции φ следует, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(w, x) = 0, \quad \text{где } w \in \mathbb{R}P^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

¹Существование энергетической функции для прямого произведения было доказано Е. К. Шустовой и М. К. Бариновой в статье „Динамические свойства прямых произведений дискретных динамических систем“ 2022 г.

Энергетическая функция для g

Теперь рассмотрим функцию $\Phi : M^3 \rightarrow \mathbb{R}$, определенную следующим образом:

$$\Phi(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } a \in \Lambda, \\ \varphi(a), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По лемме о сглаживании функции, существует функция $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\Psi = \psi \circ \Phi$ — энергетическая функция для $g = g_1 \times g_2$.

Спасибо за внимание!

Базисное множество Λ Ω -устойчивого диффеоморфизма $f : M^n \rightarrow M^n$ называется ориентируемым, если k равно 1 или $n - 1$ и индекс пересечения² $W_{x,r}^s \cap W_{x,r}^u$ одинаковый во всех точках для любого r .

²Пусть $J^k : \mathbb{R}^k \rightarrow M^3$ — иммерсии, D^k — открытые шары конечного радиуса в \mathbb{R}^k , $k = 1, 2$. Тогда ограничения $J^k : D^k \rightarrow M$ являются вложениями и их образы $W^k = J^k(D^k)$ — гладко вложенные подмногообразия многообразия M^3 . Пусть U^k — трубчатые окрестности W^k , являющиеся образами вложений в M^3 пространств $(3 - k)$ -мерных векторных расслоений на W^k [?, Chapter 4, par. 5]. Поскольку шары D^k стягиваемы, то эти расслоения тривиальны и, следовательно, $U^2 \setminus W^2$ состоит из двух компонент связности U_+^2 и U_-^2 . Это позволяет определить функцию $\sigma : U_+^2 \cup U_-^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ такую, что $\sigma(x) = 1$, если $x \in U_+^2$, и $\sigma(x) = 0$, если $x \in U_-^2$. Если подмногообразия W^1 и W^2 трансверсально пересекаются в точке $x = J^1(t)$, $t \in D^1$, то существует число $\delta > 0$ такое, что $J^1(t - 2\delta, t + 2\delta) \subset U^2$. Число

$$\text{Ind}_x(W^1, W^2) = \sigma(t + \delta) - \sigma(t - \delta)$$

называется индексом пересечения подмногообразий W^1 и W^2 в точке x . Заметим, что данное определение не требует ориентируемости многообразия M^3 .