

О топологической классификации  
градиентно-подобных потоков на  
четырёхмерных многообразиях

Илья Александрович Сараев

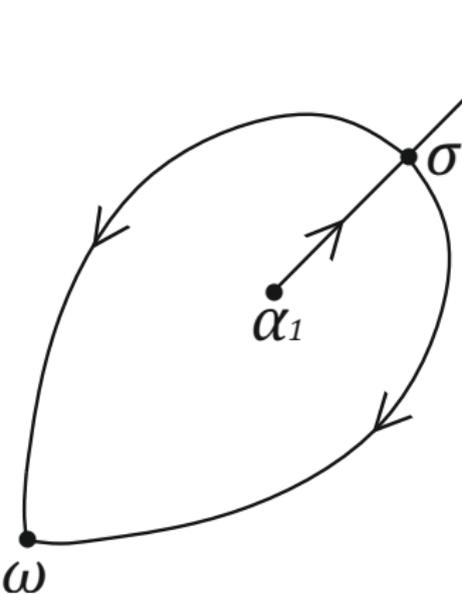


## Градиентно-подобные потоки

Гладкий поток  $f^t$  на замкнутом многообразии  $M^n$  размерности  $n \geq 1$  называется **градиентно-подобным**, если его неблуждающее множество  $\Omega_{f^t}$  состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия, а инвариантные многообразия состояний равновесия пересекаются трансверсально.

Гиперболическое состояние равновесия  $p$  имеет тип  $(i, n - i)$ , если  $\dim W_p^u = i$ . Состояния равновесия типа  $(0, n)$  – это **стоки**, типа  $(n, 0)$  – **источники** и другие – это **седла коразмерности  $i$** . Будем называть пересечение инвариантных многообразий разных седловых состояний равновесия **гетероклиническим**.

## История задачи



**Майер А. Г.**, *Грубое преобразование окружности в окружность*, Ученые записки ГГУ, 1939, Т. 12, С. 215-229.

**Леонтович Е. А., Майер А. Г.**, *О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории*, Докл. АН СССР, 1937, Т. 14(5), С. 251–257.

**Peixoto M. M.**, *On the classification of flows on 2-manifolds*, in: Dynamical Systems, Proc. Sympos. Univ., Bahia, Salvador, 1971, p. 389-419.

**Ошемков А. А., Шарко В. В.**, *О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях*, Математический сборник, 1998, Т. 189 (8), С. 93–140.

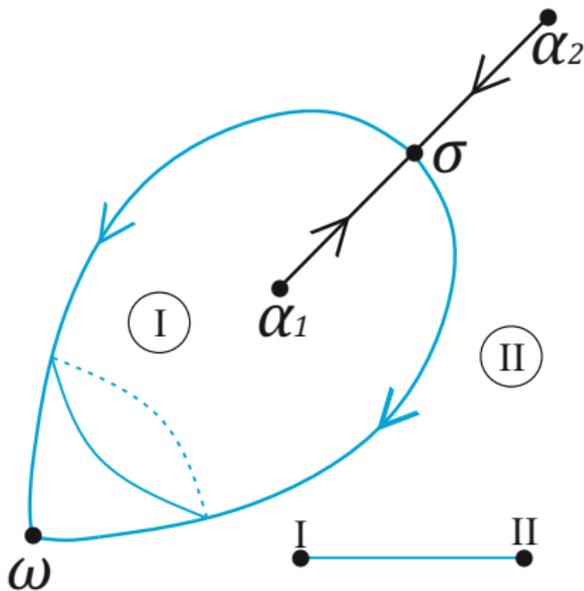
## История задачи

**Уманский Я. Л.**, *Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса–Смейла с конечным числом особых траекторий*, Математический сборник, 1990, Т. 181(2), С. 212-239.

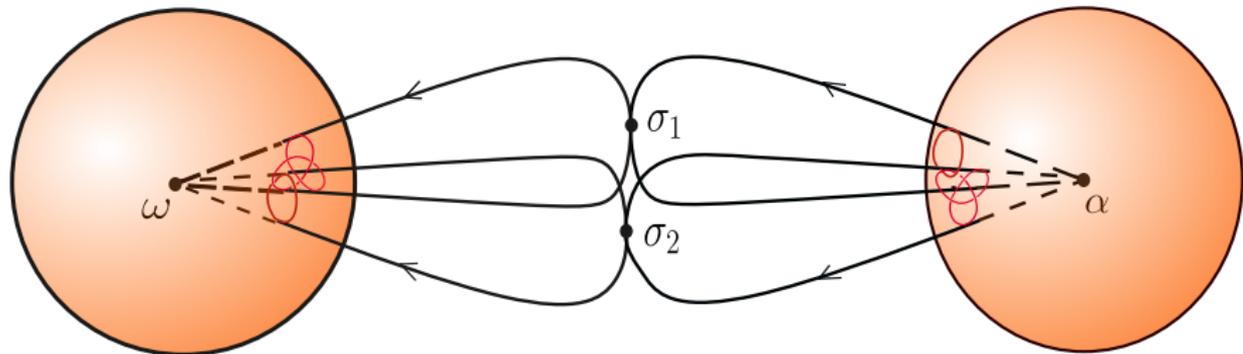
**Fleitas G.M.**, *Classification of gradient-like flows in dimension two and three*, Bol. Soc. Mat. Brasil, 1975, V. 6, p. 155-183.

**Пилюгин С. Ю.**, *Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса–Смейла без периодических траекторий на сферах*, Дифференциальные уравнения, 1978, Т. 14(2), С. 245–254.

**Гринес В. З., Гуревич Е. Я.** *Комбинаторный инвариант градиентно-подобных потоков на связной сумме  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$* , Математический сборник. 2023. Т. 214 (5). С. 97-127.



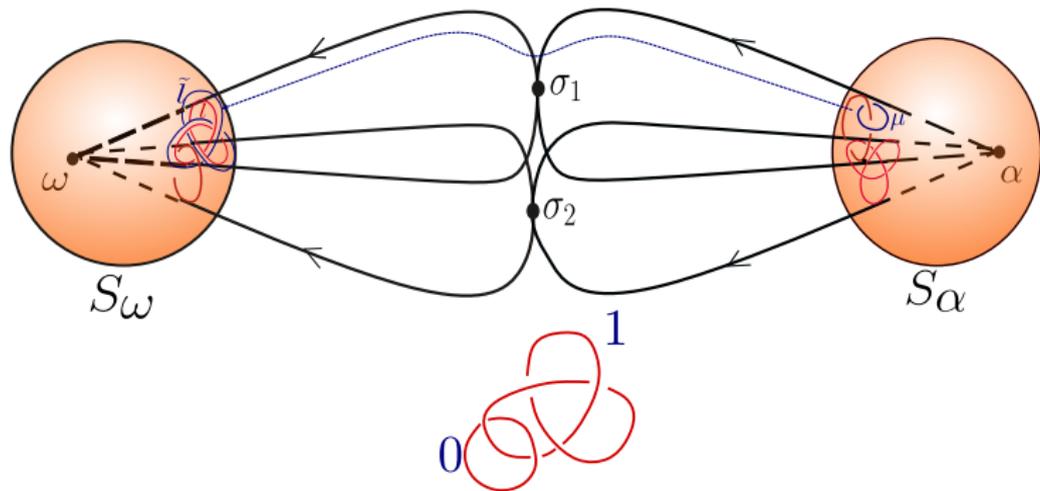
# О комбинаторной классификации градиентно-подобных потоков на четырехмерных многообразиях



**Рис.:** Фазовый портрет градиентно-подобного потока с дикими замыканиями двумерных сепаратрис

**Zhuzhoma E. V., Medvedev V. S.,** *Morse-Smale systems with few non-wandering points*, *Topology and its Applications*, 2013, V. 160(3), P. 498 - 507.

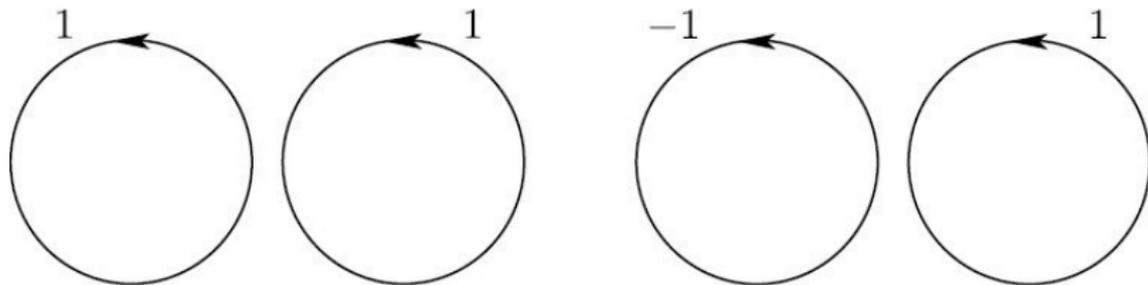
# Необходимые и достаточные условия эквивалентности градиентно-подобных потоков без седел типа (1, 3), (3, 1)



**Теорема.** Полярные потоки  $f^t$ ,  $f'^t$  на четырехмерных многообразиях без седловых состояний равновесия типа (1, 3), (3, 1) топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их диаграммы Кирби эквивалентны.

**Гуревич Е. Я., Сараев И. А.** *Диаграмма Кирби полярных потоков на четырехмерных многообразиях*, Математические заметки. 2024. Т. 116 (1) (в печати).

## Существование условий теоремы



**Рис.:** Диаграммы Кирби потоков на многообразиях  $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$  и  $S^2 \tilde{\times} S^2$

**Гуревич Е. Я., Сараев И. А.** *Диаграмма Кирби полярных потоков на четырехмерных многообразиях*, Математические заметки. 2024. Т. 116 (1) (в печати).

## Градиентно-подобные потоки без гетероклинических пересечений. Топология несущего многообразия

Пусть  $f^t$  – градиентно-подобный поток без гетероклинических пересечений на  $M^4$ .

Обозначим за  $k_i$  число состояний равновесия типа  $(i, 4 - i)$ ,

$$g_{f^t} = \frac{k_3 + k_1 - k_0 - k_4 + 2}{2}.$$

**Утверждение.** Число  $g_{f^t}$  – целое неотрицательное и  $M^4$  гомеоморфно связной сумме

$$\underbrace{(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1) \# \dots \# (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1)}_{g_{f^t}} \# N^4 \quad (1)$$

$g_{f^t}$ , где  $N^4$  – односвязное многообразие, допускающее градиентно-подобный поток без гетероклинических пересечений и седловых состояний равновесия коразмерности один.

Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Медведев В. С., Жужома Е. В. *О топологии многообразий, допускающих градиентно-подобные потоки с заданным неблуждающим множеством*, Siberian Advances in Mathematics. 2018. Т. 21. № 2. С. 163-180.

## Уточнение топологии $N^4$

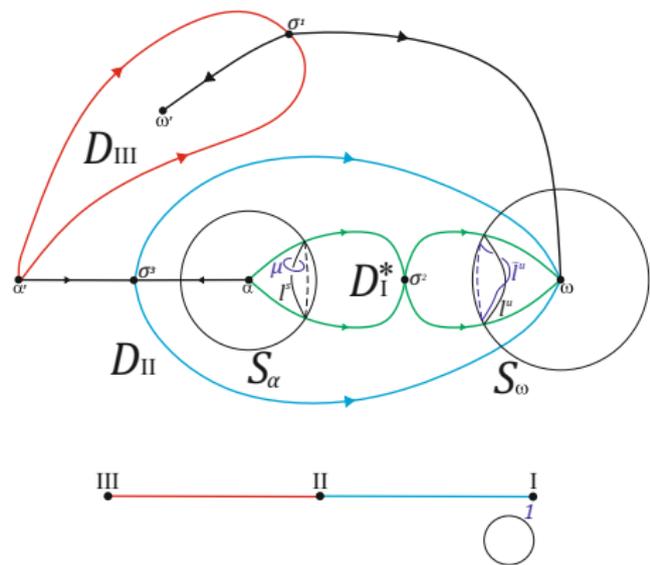
**Теорема.** Пусть  $N^4$  допускает полярный поток  $f^t$  без седел типов  $(1, 3)$ ,  $(3, 1)$ . Тогда  $N^4$  гомеоморфно одному из следующих попарно негомеоморфных многообразий:

1. сфера  $S^4$  тогда и только тогда, когда  $k_2 = 0$ ;
2. связная сумма  $m_1$  копий  $CP^2$  и  $m_2$  копий  $-CP^2$ , где  $CP^2$ ,  $-CP^2$  – комплексная проективная плоскость с противоположными ориентациями,  $m_1 + m_2 = k_2 > 0$ ;
3. связная сумма  $2m_1$  копий  $E_8$ -многообразий Фридмана и  $m_2 \geq 2m_1 + 1$  копий  $S^2 \times S^2$ ,  $m_1 \geq 0$  и  $16m_1 + 2m_2 = k_2 > 0$ .

**Freedman M.H.** *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom., 1982, V. 17, P. 357–453.

**Рохлин В.А.** *Новые результаты теории четырехмерных многообразий*, Докл. АН СССР, 1952, Т. 84, С. 221 – 224.

# Необходимые и достаточные условия эквивалентности градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений на $M^4$



Графы  $\Gamma_{f^t}$ ,  $\Gamma_{f'^t}$  **изоморфны**, если выполняются следующие условия:

1. существует изоморфизм  $I_* : \Gamma_{f^t} \rightarrow \Gamma_{f'^t}$  сохраняющий цвета ребер и отмеченные вершины;
2. для любой пары отмеченных вершин  $v \in V(\Gamma_{f^t})$  и  $v' = I_*(v) \in V(\Gamma_{f'^t})$  существует гомеоморфизм  $h_D : S_\omega \rightarrow S_{\omega'}$  такой, что  $h_D(L_D) = L'_{D'}$ , и существует нумерация узлов  $L_D$  такая, что  $h_D(l_i^u) = l'_i{}^u$  и  $h_D(\tilde{l}_i^u) = \tilde{l}'_i{}^u$  для любого  $i \in \{1, \dots, r_D\}$ .

**Теорема.** Потоки  $f^t, f'^t \in G_*(M^4)$  топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их оснащенные графы изоморфны.

Рис.: Фазовый портрет потока и его оснащенный граф

## Список литературы

- [1] И.А. Сараев *О сведении проблемы топологической классификации градиентно-подобных потоков к классификации полярных потоков*, Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25 (2). С. 62-75.
- [2] Гуревич Е.Я., Сараев И.А. *Диаграмма Кирби полярных потоков на четырехмерных многообразиях*, Математические заметки. 2024. Т. 116 (1) (в печати).
- [3] Donaldson S. *An application of gauge theory to four-dimensional topology*, J. Diff. Geom., 1983, V. 18, P. 279 – 315.
- [4] Furuta M. *Monopole equation and the  $\frac{11}{8}$ -conjecture*, Math. Res. Lett., 2001, V. 8(3), P. 279 – 291.
- [5] R. Kirby. *A Calculus for Framed Links in  $S^3$* , Invent math., 1978, V. 45(1), P. 35—56.

## Список литературы

- [6] de Sa E.C. *A link calculus for 4-manifolds*, in: Fenn R. *Topology of Low-Dimensional Manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, 1979, Springer, Berlin, Heidelberg, p. 16-31.
- [7] Grines V., Gurevich E., Pochinka O. *Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection*, Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 208. No. 1. P. 81-91.
- [8] Гринес В.З., Жужома Е. В., Медведев В. С. *О структуре несущего многообразия для систем Морса Смейла без гетероклинических пересечений*, Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 2017, Т. 297, С. 201-210.