О включении в поток и топологической классификации каскадов Морса-Смейла

Елена Гуревич

НИУ ВШЭ-Нижний Новгород

Определения

M^n — гладкое связное замкнутое многообразие размерности n.

Определения

M^n — гладкое связное замкнутое многообразие размерности n.

C^m-поток $(m \geq 0)$ — непрерывно зависящее от $t \in \mathbb{R}$ семейство C^m-диффеоморфизмов $f^t : M^n \to M^n$ такое, что:
$f^0(x) = x$, $f^t(f^s(x)) = f^{t+s}(x)$ для любых $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in M^n$.

Определения

M^n — гладкое связное замкнутое многообразие размерности n.

C^m-поток $(m \geq 0)$ — непрерывно зависящее от $t \in \mathbb{R}$ семейство C^m-диффеоморфизмов $f^t : M^n \to M^n$ такое, что:
$f^0(x) = x, f^t(f^s(x)) = f^{t+s}(x)$ для любых $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in M^n$.

Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ включается в C^m-поток f^t, если f является сдвигом на единицу времени вдоль f^t $(f = f^1)$.

Palis, Bull. of AMS, 1974. Vector fields generate few diffeomorphisms

Определения

M^n — гладкое связное замкнутое многообразие размерности n.

C^m-поток $(m \geq 0)$ — непрерывно зависящее от $t \in \mathbb{R}$ семейство C^m-диффеоморфизмов $f^t : M^n \to M^n$ такое, что: $f^0(x) = x$, $f^t(f^s(x)) = f^{t+s}(x)$ для любых $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in M^n$.

Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ включается в C^m-поток f^t, если f является сдвигом на единицу времени вдоль f^t $(f = f^1)$.

Palis, Bull. of AMS, 1974. Vector fields generate few diffeomorphisms

Диффеоморфизмы Морса-Смейла порождают открытые множества диффеоморфизмов, включающихся в топологические потоки.

Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ называется диффеоморфизмом Морса-Смейла, если:

- его неблуждающее множество Ω_f конечно и состоит из гиперболических периодических точек;
- для любых двух точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение устойчивого многообразия W^s_p точки p и неустойчивого многообразия W^u_q точки q трансверсально.

Структура доклада

1. Необходимые условия Палиса включения диффеоморфизма Морса-Смейла в топологический поток
2. Топологические инварианты, позволяющие получить критерий включения в поток диффеоморфизмов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях
3. Результаты для размерности четыре и выше

Условия Палиса

Palis J. On Morse-Smale dynamical systems. Topology. 1969.

Пусть диффеоморфизм Морса-Смейла $f : M^n \to M^n$ включается в топологических поток. Тогда:

- неблуждающее множество Ω_f состоит из неподвижных точек;

Условия Палиса

Palis J. On Morse-Smale dynamical systems. Topology. 1969.

Пусть диффеоморфизм Морса-Смейла $f : M^n \to M^n$ включается в топологических поток. Тогда:

- неблуждающее множество Ω_f состоит из неподвижных точек;
- ограничение диффеоморфизма f на каждое инвариантное многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega_f$ сохраняет его ориентацию;

Условия Палиса

Palis J. On Morse-Smale dynamical systems. Topology. 1969.

Пусть диффеоморфизм Морса-Смейла $f : M^n \to M^n$ включается в топологических поток. Тогда:

- неблуждающее множество Ω_f состоит из неподвижных точек;
- ограничение диффеоморфизма f на каждое инвариантное многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega_f$ сохраняет его ориентацию;
- если для различных седловых точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение $W^s_p \cap W^u_q$ непусто, то оно не содержит компактных компонент связности.

Условия Палиса

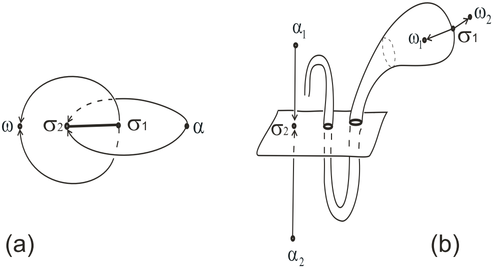


Рис.: Пересечения инвариантных многообразий седловых точек

Достаточность условий Палиса для $n = 2$

Теорема (Палис)

Если диффеоморфизм $f \in G(M^2)$ удовлетворяет условиям Палиса, то он включается в топологический поток.

Схема доказательства:
1) Включение в поток $b^t(x,y) = ((1/2)^t x, 2^t y)$ в окрестности седел.
Положим $v = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2y^2 \leq 1, |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$, $v_p = h_p^{-1}(v)$, $V_p = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} f^i(v_p)$, поставим в соответствие каждой точке $M \in V_p$ число $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $f^n(M) \subset v_p$ и определим поток G_p^t на множестве V_p соотношением $G_p^t(M) = f^{-n}(g_p^t(f^n(M)))$.

Достаточность условий Палиса для $n = 2$

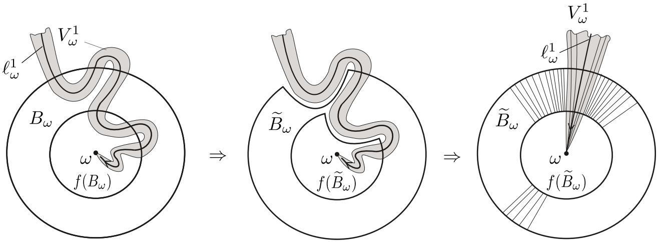


Рис.: Модификация диска D

2) Продолжение построенного потока в бассейнах стоков.

Эффекты размерности 3

Рис.: Диффеоморфизмы с дико вложенными сепаратрисами

Тривиальный пучок одномерных сепаратрис

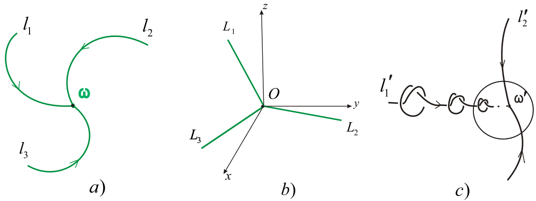


Рис.: a), b) тривиальные пучки; c) ручной нетривиальный пучок сепаратрис

Пучок одномерных сепаратрис F_ω называется тривиальным, если существует гомеоморфизм $h_\omega : W^s_\omega \to \mathbb{R}^n$ такой, что $f|_{W^s_\omega} = h_\omega^{-1} a_0 h_\omega|_{W^s_\omega}$ и $h_\omega(F_\omega)$ — стандартный одномерный пучок. Здесь $a_0(x_1, \ldots, x_n) = (\frac{1}{2}x_1, \ldots, \frac{1}{2}x_n)$.

Тривиальный пучок одномерных сепаратрис

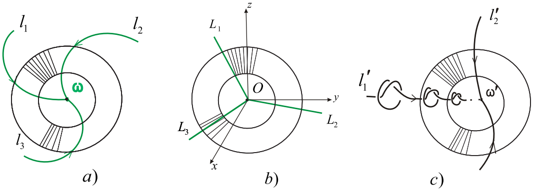


Рис.: a), b) тривиальные пучки; c) ручной нетривиальный пучок сепаратрис

Пучок одномерных сепаратрис F_ω называется тривиальным, если существует гомеоморфизм $h_\omega : W^s_\omega \to \mathbb{R}^n$ такой, что $f|_{W^s_\omega} = h_\omega^{-1} a_0 h_\omega|_{W^s_\omega}$ и $h_\omega(F_\omega)$ — стандартный одномерный пучок. Здесь $a_0(x_1, \ldots, x_n) = (\frac{1}{2}x_1, \ldots, \frac{1}{2}x_n)$.

Тривиальный пучок одномерных сепаратрис

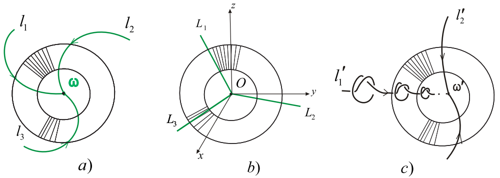


Рис.: a), b) тривиальные пучки; c) ручной нетривиальный пучок сепаратрис

Предложение

Если диффеоморфизм $f \in MS_+(M^3)$ включается в топологический поток, то любой его пучок одномерных сепаратрис является тривиальным.

Dugundji, Antosiewicz, Parallelizable flows and Lyapunov's second method, Ann. of Math. 1961. Young, On the factors and fiberings of manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 1950.

Эффекты размерности 3

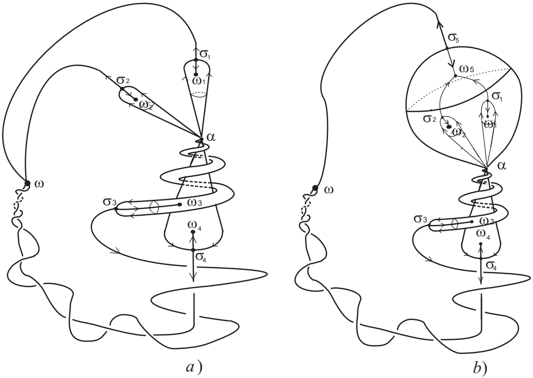


Рис.: Фазовые портреты диффеоморфизмов из класса $G(\mathbb{S}^3)$, не включающихся ни в какие топологические потоки: a) диффеоморфизм, все пучки одномерных сепаратрис которого являются ручными, но пучок F_ω не является тривиальным; b) диффеоморфизм, все пучки одномерных сепаратрис которого являются тривиальными

Схема диффеоморфизма

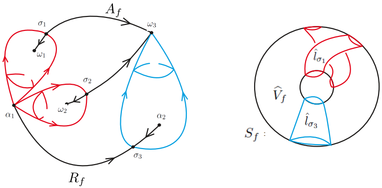


Рис.: Фазовый портрет диффеоморфизма $f : S^3 \to S^3$ и его схема S_f

Пусть $f : M^3 \to M^3$ — каскад Морса-Смейла,

- $A_f (R_f)$ — объединение замыканий всех неустойчивых (устойчивых) одномерных сепаратрис,
- $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$;
- $\widehat{V}_f = V_f$;
- $\hat{L}^s_f, \hat{L}^u_f$ — проекции двумерных сепаратрис в $\widehat{V}_f = V_f$.

Набор $S_f = (\widehat{V}_f, \hat{L}^s_f, \hat{L}^u_f, \eta_f)$ называется схемой диффеоморфизма f.

Схема диффеоморфизма

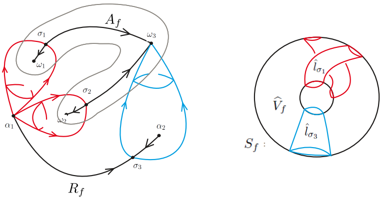


Рис.: Фазовый портрет диффеоморфизма $f : S^3 \to S^3$ и его схема S_f

Пусть $f : M^3 \to M^3$ — каскад Морса-Смейла,

- $A_f(R_f)$ — объединение замыканий всех неустойчивых (устойчивых) одномерных сепаратрис,
- $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$;
- $\widehat{V}_f = V_f$;
- $\hat{L}^s_f, \hat{L}^u_f$ — проекции двумерных сепаратрис в $\widehat{V}_f = V_f$.

Набор $S_f = (\widehat{V}_f, \hat{L}^s_f, \hat{L}^u_f, \eta_f)$ называется схемой диффеоморфизма f.

Схема диффеоморфизма

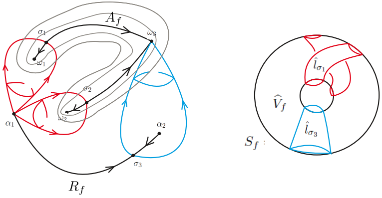


Рис.: Фазовый портрет диффеоморфизма $f : S^3 \to S^3$ и его схема S_f

Пусть $f : M^3 \to M^3$ — каскад Морса-Смейла,

- $A_f(R_f)$ — объединение замыканий всех неустойчивых (устойчивых) одномерных сепаратрис,
- $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$;
- $\widehat{V}_f = V_f$;
- $\hat{L}^s_f, \hat{L}^u_f$ — проекции двумерных сепаратрис в $\widehat{V}_f = V_f$.

Набор $S_f = (\widehat{V}_f, \hat{L}^s_f, \hat{L}^u_f, \eta_f)$ называется схемой диффеоморфизма f.

Схема диффеоморфизма

Теорема (Бонатти, Гринес, Починка, 2000-2018)

Диффеомофизмы $f, f' \in MS_+(M^3)$ топологически сопряжены тогда и тогда, когда их схемы эквивалентны.

Необходимые и достаточные условия включения в поток для $n = 3$

Положим $\mathcal{S}_g^2 = \mathbb{S}^2 \sharp \underbrace{\mathbb{T}^2 \sharp \ldots \sharp \mathbb{T}^2}_{g}$.

Схема S_f диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ тривиальна, если существует гомеоморфизм

$$\psi_f : \widehat{V}_f \to \mathcal{S}_{g_f}^2 \times \mathbb{S}^1$$

такой, что для каждого $l \subset \hat{L}_f^s \cup \hat{L}_f^u$ найдется простая замкнутая дуга $c_l \subset \mathcal{S}_{g_f}^2$ такая, что $\psi_f(l) = c_l \times \mathbb{S}^1$.

Теорема (Гринес, Гуревич, Медведев, Починка, 2012)

Диффеоморфизм $f \in MS_+(M^3)$ включается в топологический поток тогда и только тогда, когда его схема тривиальна.

Эффекты размерности 3

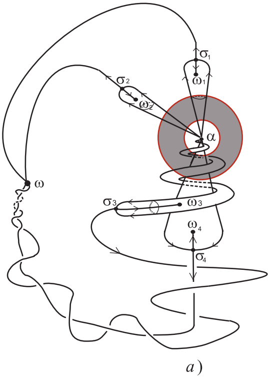


Рис.: Фазовые портреты диффеоморфизмов из класса $G(\mathbb{S}^3)$, не включающихся ни в какие топологические потоки: a) диффеоморфизм, все пучки одномерных сепаратрис которого являются ручными, но пучок F_ω не является тривиальным; b) диффеоморфизм, все пучки одномерных сепаратрис которого являются тривиальными

Достаточные условия включения в поток диффеоморфизмов Морса-Смейла на сфере S^n, $n \geq 4$

Пусть $f : S^n \to S^n$ — сохраняющих ориентацию диффеоморфизм Морса-Смейла такой, что $W^u_p \cap W^s_q = \emptyset$ для любых седловых периодических точек $p \neq q$.

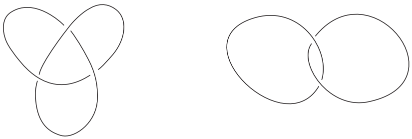
Предложение

Множество седловых периодических точек диффеоморфизма $f \in G(S^n)$ состоит из точек, размерность инвариантных многообразий которых принимает значения только 1 и $(n-1)$.

Теорема (ГрГуПо, 2016-2019)

Если $n \geq 4$ и $\Omega_f = Fix_f$, то f включается в топологический поток.

Топологические основания



a) b)

Рис.: a) нетривиальная дуга; b) нетривиальное зацепление на S^3.

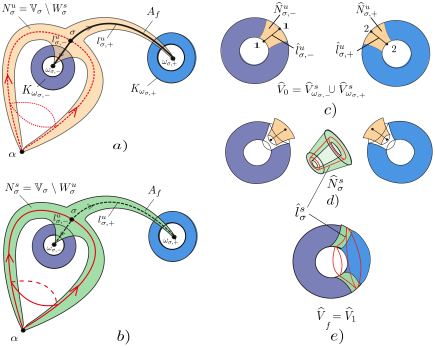
Предложение (Hudson, 1966; Weller, 1971; Miller, 1972)

Пусть $\gamma, \gamma' \in M^n$ — топологически вложенные простые замкнутые кривые. Если γ, γ' гомотопны и $n \geq 4$, то существует гомеоморфизм $h : M^n \to M^n$ такой, что $h(\gamma) = \gamma'$.

Следствие

При $n \geq 4$ все пучки одномерных сепаратрис тривиальны.

Тривиальность схемы



Предложение (Max, 1967)

При $n \geq 4$ хирургия вдоль узлов не меняет топологии многообразия.

Следствие

При $n \geq 4$ схема диффеоморфизма Морса-Смейла $f : S^n \to S^n$ без гетероклинических пересечений тривиальна.

Гетероклинические пересечения как препятствие к включению в топологический поток

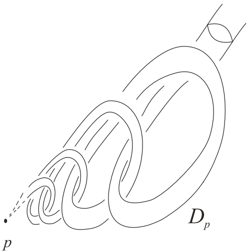


Рис.: Дикий диск D_p, принадлежащий гетероклиническому пересечению трехмерных сепаратрис

Диффеоморфизмы без гетероклинических пересечений, не включающиеся в топологические потоки

Теорема (Гринес, Гуревич, Починка, 2015, 2022)

Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса-Смейла такой, что $W^s_p \cap W^u_q = \emptyset$ для любых седловых периодических точек $p \neq q$. Любая седловая точка имеет одномерное устойчивое или неустойчивое инвариантное многообразие тогда и только тогда, когда M^n гомеоморфно $\mathbb{S}^n \sharp \underbrace{\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \sharp \dots \sharp \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1}_{g_{f^t}}$, $n \geq 4$.

Теорема

Для любого $n \geq 4$ существует диффеоморфизм Морса-Смейла $f : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, не имеющий гетероклинических пересечений и такой, что $\Omega_f = Fix_f$, не включающийся в топологический поток.