Точное решение SIS-модели с различными скоростями миграции здоровых и больных

Д. А. Подолин, А. Е. Рассадин

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
г. Нижний Новгород, Россия

Содержание

Введение

- Анализ распространения инфекционных заболеваний через государственные границы.
- Использование двухкомпонентной эпидемиологической модели («здоровые» и «больные»).
- Альтернатива моделям типа реакция-диффузия.
- Применение модели для повышения эффективности карантинных мер.

Постановка задачи

Рассмотрим модификацию SIS-модели для распространения заболеваний:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + V\frac{\partial S}{\partial x} = -\beta SI + \gamma I, \quad \frac{\partial I}{\partial t} + U\frac{\partial I}{\partial x} = \beta SI - \gamma I.$$

- $I(x,t)$ — линейная плотность больной популяции.
- $S(x,t)$ — линейная плотность здоровой популяции.
- V — скорость миграции здоровой подгруппы.
- U — скорость миграции больной подгруппы.
- Допущение: здоровые перемещаются быстрее больных ($V > U$).
- β — скорость распространения инфекции.
- γ — скорость выздоровления.

Начальные условия

Начальные условия, описывающие естественность процесса:

$$I(x,0) = I_0(x) \geq 0, \quad S(x,0) = S_0(x) \geq 0, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Задача Коши (1)-(2) описывает модель миграции больной популяции.

Общее преобразование переменных

Полная линейная плотность популяции:

$$N(x,t) = I(x,t) + S(x,t).$$

Введем новые переменные:

$$\xi = x - Vt, \quad \eta = x - Ut.$$

В этих переменных система принимает вид:

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = -aI\left(S - \frac{\gamma}{\beta}\right), \quad \frac{\partial I}{\partial \xi} = -aI\left(S - \frac{\gamma}{\beta}\right), \quad a = \frac{\beta}{V-U}.$$

Система гиперболическая и может быть решена точно.

Точное решение

- Точное решение:

$$I = \frac{F'(\eta)}{G(\xi) + aF(\eta)}, \quad S = \frac{\gamma}{\beta} + \frac{1}{a}\frac{G'(\xi)}{G(\xi) + aF(\eta)}.$$

- $F(\eta)$ и $G(\xi)$: произвольные $C^1(\mathbb{R})$-функции.
- Обратное подставление переменных:

$$\xi = x - Vt, \quad \eta = x - Ut.$$

- Получаем:

$$I = \frac{F'(x - Ut)}{G(x - Vt) + aF(x - Ut)}, \quad S = \frac{\gamma}{\beta} + \frac{1}{a}\frac{G'(x - Vt)}{G(x - Vt) + aF(x - Ut}$$

Начальные условия

- Соответствующие начальные условия:

$$I_0(x) = \frac{F'(x)}{G(x) + aF(x)}, \quad S_0(x) = \frac{\gamma}{\beta} + \frac{1}{a}\frac{G'(x)}{G(x) + aF(x)}.$$

- Выбирая $F(\eta)$ и $G(\xi)$, можно получить конкретные решения.

Пример точного решения

Выберем функции в точном решении:

$$F(\eta) = 2 + arctg(\eta),$$

$$G(\xi) = 2 + arctg(\xi)$$

Тогда производные функций принимают вид:

$$F'(\eta) = \frac{1}{1+\eta^2}$$

$$G'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$$

Пример точного решения

Установим свободные параметры системы:

$$a = 1$$

$$\frac{\gamma}{\beta} = 1$$

Тогда при этих условиях точное решение для линейной плотности больной популяции принимает вид:

$$I(x,t) = \frac{1}{(1+(x-ut)^2)} \cdot \frac{1}{(4+\arctan(x-ut)+\arctan(x-vt))}$$

$$S(x,t) = 1 + \frac{1}{(1+(x-vt)^2)} \cdot \frac{1}{(4+\arctan(x-ut)+\arctan(x-vt))}$$

I(x,t)

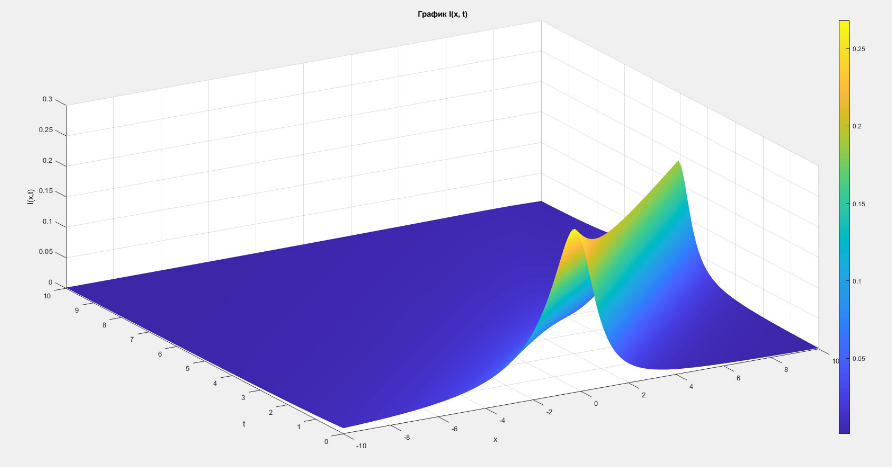
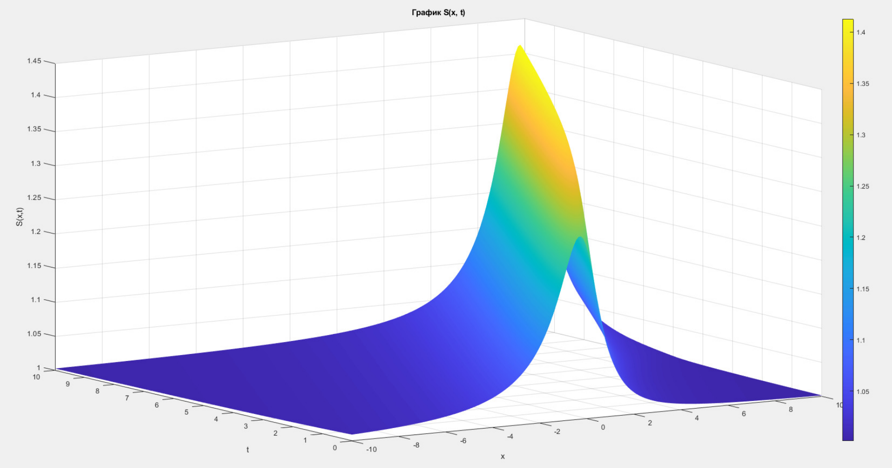
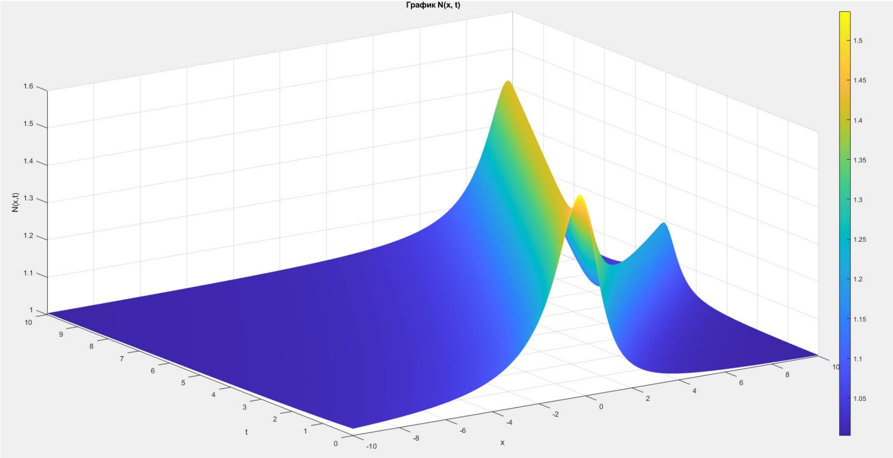


График I(x, t)
I(x,t)
t
x
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05

S(x,t)



N(x,t)



Заключение

- Точные решения $S(x, t)$ и $I(x, t)$ можно построить для различных начальных условий.
- Эти решения могут быть использованы для тестирования численных методов, таких как метод разложения в степенной ряд.