Семинар научно-учебной группы
«Нижегородские эволюционисты»
Нижний Новгород, Россия, 11 февраля 2025 года

СМЕШАННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

А.Э. Рассадин
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Задача Коши для СФДУ:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{u(x+a,t) - 2\cdot u(x,t) + u(x-a,t)}{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in R \qquad \alpha > 0 \quad a > 0$$

$$U(k,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\cdot \exp(-ikx)\cdot dx$$

$$\frac{\partial U(k,t)}{\partial t} = \alpha \cdot (\cos ka - 1)\cdot U(k,t)$$

$$U(k,t) = \exp(-\alpha t + \alpha t \cdot \cos ka)\cdot U(k,0)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha t) \cdot I_n(\alpha t) \cdot u_0(x - na)$$

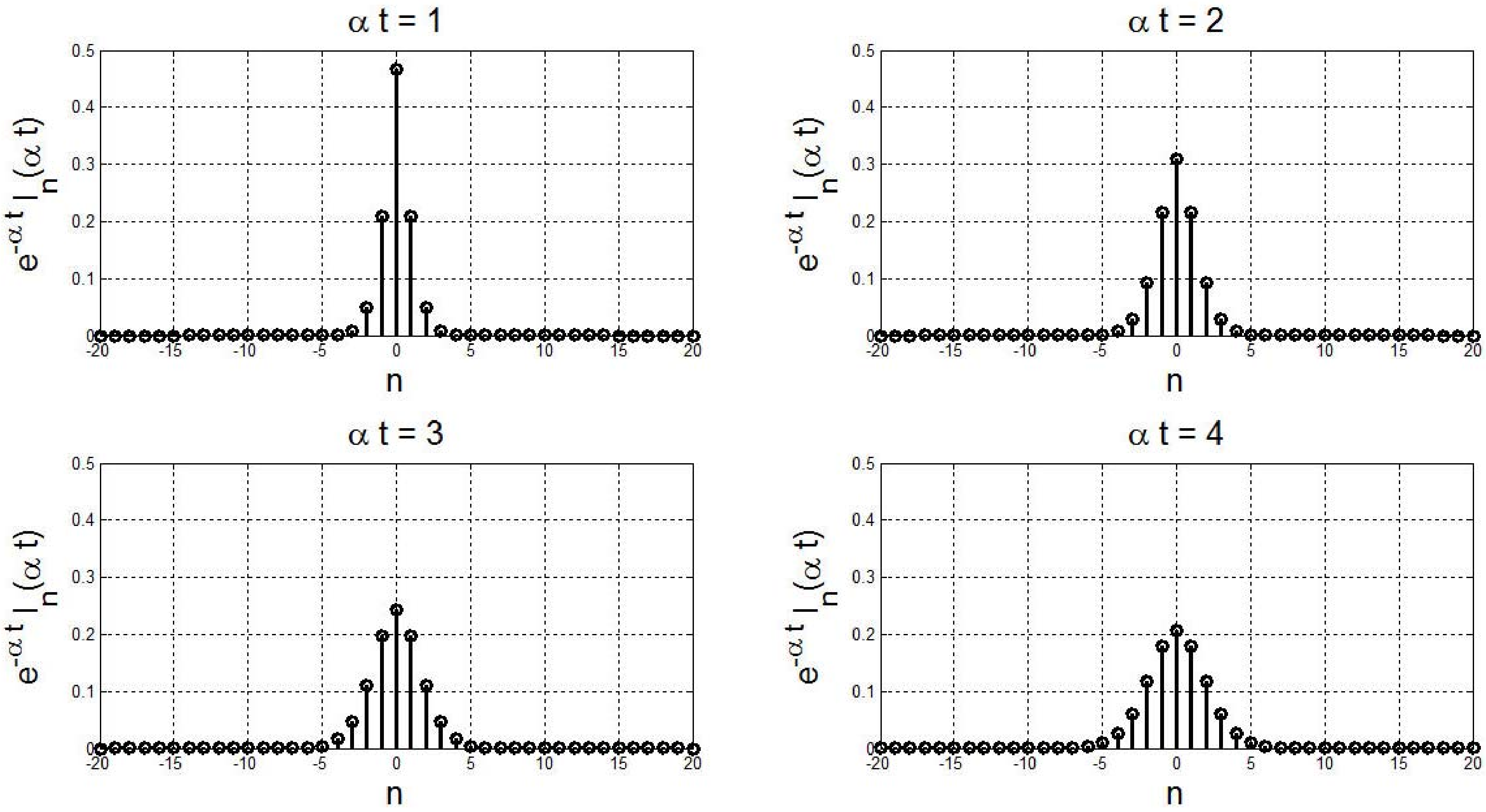
$$\frac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial t} = \frac{\alpha \cdot a^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}(x,t)}{\partial x^2} \qquad u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in R$$

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{2\alpha a^2 t}\right] \cdot u_0(\xi) \cdot d\xi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{2\alpha a^2 t}\right] \cdot \frac{u_0(\xi) \cdot d\xi}{\sqrt{2\pi\alpha a^2 t}} \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha t) \cdot I_n(\alpha t) \cdot u_0(x - na)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(x,t) \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) \cdot dx$$

Амплитуды сдвинутых начальных условий:



СФДУ и операторная полугруппа:

$$\frac{du}{dt} = Au \qquad u(0) = u_0$$

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot (T_a - 2 \cdot I + T_{-a}) \equiv \frac{\alpha}{2} \cdot (T_{a/2} - T_{-a/2})^2$$

$$A^k = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^k \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^l C_{2k}^l \cdot T_{(l-k)a}$$

$$(T_a u)(x,t) = u(x+a,t)$$

$$\| T_a \| = 1$$

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \cdot t^k \big/ k!$$

$$\| A \| \leq 2\alpha$$

$$u(x,t) = (\exp(At)u_0)(x)$$

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\alpha t}{2} \right)^k \sum_{l=0}^{2k} (-1)^l C_{2k}^l u_0(x + (l-k)a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{2\alpha a^2 t} \right] \cdot \frac{u_0(\xi) \cdot d\xi}{\sqrt{2\pi\alpha a^2 t}} \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\alpha t}{2} \right)^k \sum_{l=0}^{2k} (-1)^l C_{2k}^l u_0(x + (l-k)a)$$

Резольвенты

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} = -\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) \cdot \exp(At) \cdot dt$$

$$\exp(At) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha t) \cdot I_n(\alpha t) \cdot T_{na}$$

$$R_\lambda(A) = -\frac{I}{\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\alpha}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cdot (T_{na} + T_{-na})}{\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\alpha} \cdot (\lambda + \alpha + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\alpha})^n}$$

$$R_\lambda(A) = -\frac{I}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{2\lambda} \right)^k \sum_{l=0}^{2k} (-1)^l C_{2k}^l \cdot T_{(l-k)a}$$

$$\widetilde{A} = \alpha a^2 / 2 \cdot \partial^2 / \partial x^2$$

$$(R_\lambda(\widetilde{A}) f)(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\alpha a^2 \lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\sqrt{\frac{2\lambda}{\alpha}} \frac{|x-\xi|}{a} \right] \cdot f(\xi) \cdot d\xi$$

$$(R_\lambda(\widetilde{A}) f)(x) \approx -\frac{f(x)}{\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\alpha}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cdot (f(x+na) + f(x-na))}{\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\alpha} \cdot (\lambda + \alpha + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\alpha})^n}$$

$$(R_\lambda(\widetilde{A}) f)(x) \approx -\frac{f(x)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{2\lambda} \right)^k \sum_{l=0}^{2k} (-1)^l C_{2k}^l \cdot f(x + (l-k)a)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int_0^x u(\xi,t)\,d\xi \qquad u(x,0) = u_0(x) \in C[0,l]$$

$$(Au)(x) = \int_0^x u(\xi)\,d\xi$$

— оператор Вольтерры $\quad x \in [0,l]$

$$\frac{du}{dt} = Au$$

— линейное эволюционное уравнение

Его решение: $\quad u(t) = Q(t)u_0$

$$Q(t) = \exp(At)$$

— оператор C0-полугруппы

$$\| A \| = \sup_{u \neq 0} \frac{\| Au \|}{\| u \|} = l < \infty \qquad \| u \| = \sup_{x \in [0,l]} | u(x) |$$

Для ограниченного оператора:

$$\exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

$$(A^n u)(x) = \int_0^x \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} u(\xi) d\xi$$

— формула Коши

$$I_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{\alpha+2n}$$

— функция Бесселя мнимого аргумента

Точное решение исходного уравнения:

$$u(x,t) = (Q(t)u_0)(x) = u_0(x) + \sqrt{t} \cdot \int_0^x \frac{I_1(2\sqrt{t(x-\xi)})}{\sqrt{x-\xi}} \cdot u_0(\xi) d\xi$$

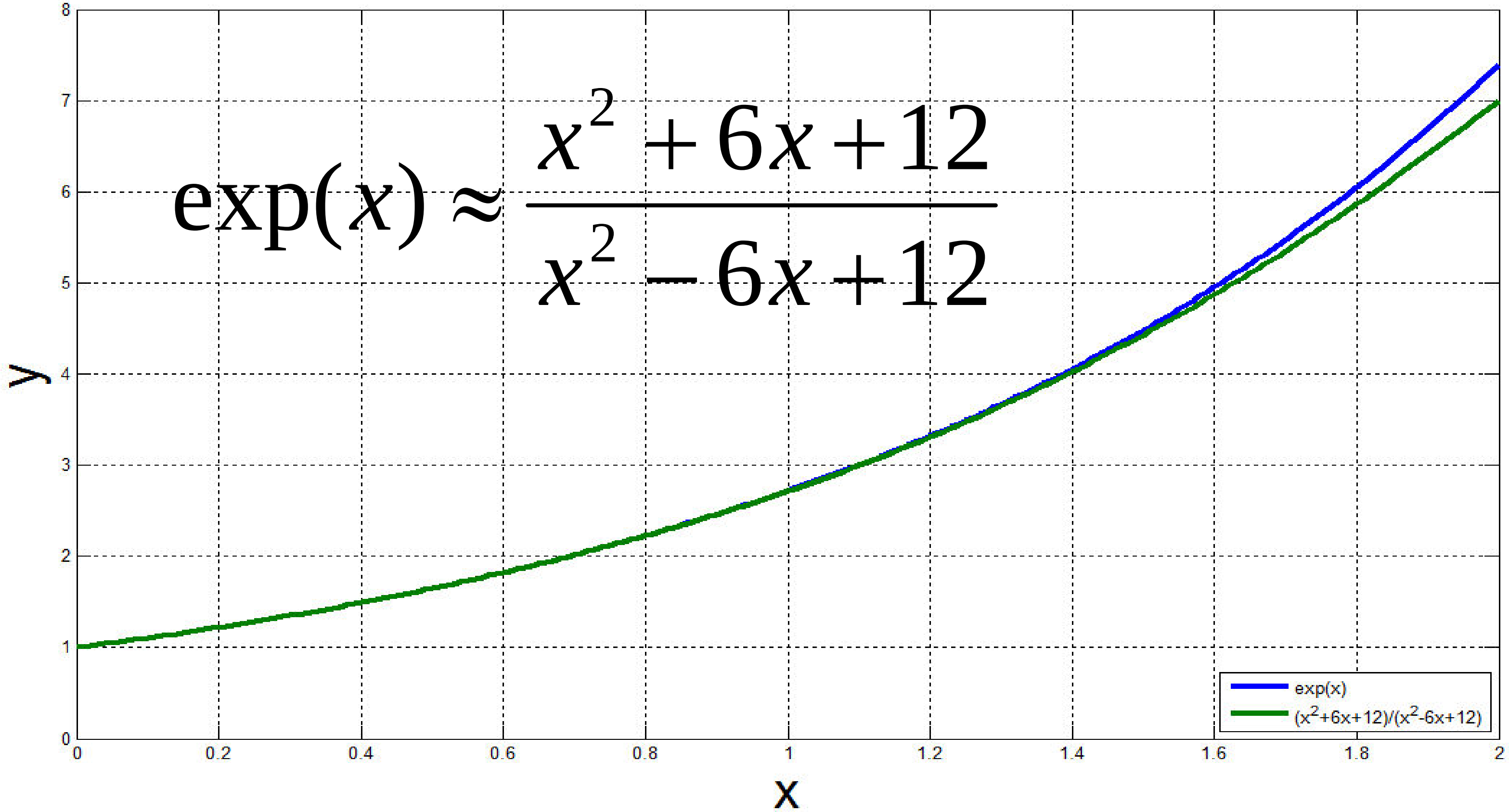
Начальное условие:

$$u(x,0) = x^{\alpha} \qquad \alpha \geq 0$$

$$u(x,t) = \Gamma(\alpha+1) \cdot \left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{\alpha}{2}} I_{\alpha}(2\sqrt{xt})$$

Однако для произвольного оператора А явный вид оператора С0-полугруппы известен далеко не всегда. Что же делать?

Паде-аппроксимация экспоненты



$$\exp(x) \approx \frac{x^2+6x+12}{x^2-6x+12}$$

$$x^2-6x+12=(x-3-i\sqrt{3})\cdot(x-3+i\sqrt{3})$$

$$x \mapsto At \qquad \frac{1}{x-3\mp i\sqrt{3}} \mapsto \frac{1}{t}\cdot\left(A-\frac{3\pm i\sqrt{3}}{t}I\right)^{-1}$$

$$R_\lambda(A) = (A-\lambda I)^{-1}$$ **— резольвента оператора A**

$$\exp(At) \mapsto \left(A^2+\frac{6}{t}A+\frac{12}{t^2}I\right)\cdot R_{\frac{3+i\sqrt{3}}{t}}(A)\cdot R_{\frac{3-i\sqrt{3}}{t}}(A)$$

Резольвента оператора Вольтерры известна:

$$(R_\lambda(A)u)(x) = -\frac{u(x)}{\lambda} - \int_0^x \exp\left[\frac{x-\xi}{\lambda}\right]\frac{u(\xi)}{\lambda^2}d\xi$$

БЛАГОДАРЮ
ЗА
ВНИМАНИЕ!