

Студенческая школа-конференция  
**Математическая весна 2025**

**Сборник тезисов**

Нижний Новгород, 25–28 марта, 2025

## Организаторы

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»*

### Программный комитет

- Ольга Витальевна Починка
- Елена Яковлевна Гуревич
- Евгений Викторович Жужома

### Организационный комитет

- Елена Вячеславовна Ноздринова
- Владислав Дмитриевич Галкин
- Данила Денисович Шубин
- Илья Александрович Сараев
- Юлия Эдуардовна Петрова

**Благодарности:** Конференция проводится при поддержке проекта «Международное академическое сотрудничество» НИУ ВШЭ.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Численно-аналитическое исследование динамики виброударного механизма с учетом влияния обрабатываемой среды</b> <i>Ю. Д. Анисимова, И. В. Никифорова</i>	5
<b>О системах итерированных функций, аттракторы которых являются канторовыми множествами</b> <i>А. В. Багаев, Д. М. Ганеева</i>	7
<b>Регуляризация некорректных обратных задач через обобщённые псевдообратные операторы</b> <i>А. А. Багирова</i>	9
<b>Attractors of transformation groups of topological manifolds with boundary</b> <i>R. A. Dedaev, R. R. Imaev, N. I. Zhukova</i>	12
<b>Attractors of pseudogroups, transformation groups, and foliations</b> <i>R. A. Dedaev, N. I. Zhukova</i>	14
<b>Исследование пространственной модели стационарных биологических сообществ У. Дикмана и Р. Лоу.</b> <i>В. А. Конева</i>	15
<b>Modeling of filtration of multicomponent hydrocarbon solutions with phase transitions during oil and gas production</b> <i>K. V. Litvinova</i>	16
<b>Exact solution of one countable-dimensional system of ordinary differential equations</b> <i>I. A. Maruseev, A. E. Rassadin</i>	17
<b>Исследование решений дифференциального уравнения второго порядка с импульсной функцией в правой части</b> <i>И. Н. Маслеников, И. С. Кащенко</i>	19
<b>Классификация солитонных решений в обобщенной уравнении Кортевега–де Фриза (KdV)</b> <i>И. Е. Мельников</i>	21

<b>Динамика кальциевых колебаний и синхронизация астроцитов</b>	
<i>Л. П. Никифорова, С. Ю. Маковкин</i>	<b>22</b>
<b>Merging of chaotic and quasiperiodic attractors and their multistability in the Chialvo map</b>	
<i>A. A. Panyushev, N. V. Stankevich</i>	<b>24</b>
<b>Investigation of the SIS model with different migration rates of sick and healthy individuals by the method of breaking the power series</b>	
<i>D. A. Podolin, A. E. Rassadin</i>	<b>25</b>
<b>Переменяющаяся синхронизация в модели трёхчастного сигнала</b>	
<i>Д. Д. Попов, С. Ю. Маковкин</i>	<b>27</b>
<b>Геометрические свойства решений уравнений мелкой воды на вращающейся сфере</b>	
<i>E. S. Stetsyak, A. P. Chupakhin</i>	<b>30</b>

# Численно-аналитическое исследование динамики виброударного механизма с учетом влияния обрабатываемой среды

Ю. Д. Анисимова, И. В. Никифорова

*ННГУ им. Н.И.Лобачевского*

Разнообразие задач, в которых приходится исследовать динамические системы с разрывными нелинейностями необычайно широка. Это системы с сухим трением, виброударные, системы с переменной структурой, многочисленные механические и радиотехнические системы с негладкими характеристиками отдельных элементов и т.д. [1,2,3]. Разработка теории и методики расчета таких устройств весьма актуальна для многих областей современного машиностроения. [4,5,6,]. Необходимость математического описания систем с ударными взаимодействиями возникает также в связи с расчетом процесса ударного торможения систем.

В работе изучается динамика виброударных механизмов с кривошипно-шатунным возбудителем колебаний и с учетом свойств обрабатываемой среды [7].

Исследование направлено на численный анализ динамики виброударного механизма с двумя поршнями-ударниками, в котором сила сопротивления зависит от величины предыдущей осадки грунта. Представлена математическая модель механизма. Выведены уравнения движения системы, приведенные как в размерном, так и безразмерном виде.

Проанализирована динамика взаимодействия уплотняющего механизма с грунтом с учетом силы сопротивления и амортизационных свойств системы. Построены осциллограммы движения, демонстрирующие процесс уплотнения грунта при различных значениях параметров системы. В заключение отмечается, что дальнейшие исследования будут сосредоточены на более детальном учете физико-химических свойств обрабатываемых сред и оптимизации параметров механизма для повышения его эффективности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Yang Liu, Marian Wiercigroch, Ekaterina Pavlovskaja, Hongnian Yu Modelling of a vibro-impact capsule system. International Journal of Mechanical Sciences. V.66. 2013. p. 2-11 <https://clck.ru/3Hx45A>

- [2] Yang Liu, Ekaterina Pavlovskaja, David Hendry, Marian Wiercigroch  
Vibro-impact responses of capsule system with various friction models.  
International Journal of Mechanical Sciences. V. 72. 2013, p. 39-54.  
<https://goo.su/IiReBf>
- [3] Maolin Liao, Jiajia Zhang, Yang Liu, Dibin Zhu Speed optimisation  
and reliability analysis of a self-propelled capsule robot moving in an  
uncertain frictional environment. International Journal of Mechanical  
Sciences. V. 221. 2022. 107156. <https://clck.ru/3Hx4KK>
- [4] V. I. Babitsky, Theory of Vibro-Impact Systems and Applications.  
- Berlin: Springer-Verlag, 1998. 318 p. [https://link.springer.com/  
book/10.1007/978-3-540-69635-3](https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-69635-3)
- [5] Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear  
Discontinuous Systems. - Berlin: Springer-Verlag, 2001. 404 p. [https:  
//clck.ru/3Hx4fw](https://clck.ru/3Hx4fw)
- [6] Коронатов В.А. Глубина погружения ударника в грунт при жесткой  
остановке и сравнение элементарной теории проникания с другими  
методами. //Системы. Методы. Технологии. №2(58). 2023.С. 38-45.  
<https://clck.ru/3Hx4oP>
- [7] Nikiforova I.V., Igumnov L.A., Metrikin V.S. Mathematical Modeling  
of Multidimensional Strongly Nonlinear Dynamic Systems // Springer  
Nature Switzerland AG 2021 D. Balandin et al. (Eds.): MMST  
2020, CCIS 1413, 2021. Switzerland: [https://doi.org/10.1007/  
978-3-030-78759-2\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-030-78759-2_5) 2021. P. 63-76.

## О системах итерированных функций, аттракторы которых являются канторовыми множествами

А. В. Багаев, Д. М. Ганеева

*Высшая школа экономики Нижний Новгород*

Одним из важных инструментов построения фракталов является теория систем итерированных функций. Системой итерированных функций (СИФ) на полном метрическом пространстве  $X$  называется конечный набор сжимающих отображений  $S = \{f_1, \dots, f_k\}$ , заданных на  $X$ . Согласно теореме Хатчинсона [1] для любой СИФ  $S = \{f_1, \dots, f_k\}$  на  $X$  существует единственное непустое компактное подмножество  $A \subset X$ , инвариантное относительно  $S$ :

$$f_1(A) \cup \dots \cup f_k(A) = A.$$

Множество  $A$  называется аттрактором СИФ  $S$ . Аттрактор  $A$  СИФ  $S$  может представлять собой как «простое» множество, так и иметь более сложную структуру и являться фракталом.

Мы исследуем СИФ, аттракторы которых являются канторовыми множествами. Важным классом таких СИФ служат вполне несвязные СИФ.

Понятие вполне несвязной СИФ предложено Барнсли [2]. В своем определении он использовал понятия адресного пространства и адресной функции.

Нами предложены другие определения вполне несвязной СИФ, не использующие понятия адресного пространства и адресной функции, и доказана их эквивалентность определению, данному Барнсли.

Применяя наш подход, мы получили достаточные условия вполне несвязности СИФ.

Найдены достаточные условия, при которых аттрактор СИФ является канторовым.

Построены примеры СИФ, аттракторы которых представляют собой канторовы множества, при этом СИФ не является вполне несвязной.

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J., 30 (1981), 713–747.
- [2] M. F. Barnsley, *Fractals everywhere*, Boston, Academic Press, 1988.

# Регуляризация некорректных обратных задач через обобщённые псевдообратные операторы

А. А. Багирова

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»*

Некорректные обратные задачи, возникающие при решении интегральных уравнений первого рода, как правило, не удовлетворяют условиям корректности по Адамару, что приводит к отсутствию устойчивых решений в пространстве заданных данных [1, 2, 3]. Компактность операторов  $K$  в гильбертовых пространствах делает прямое обращение таких уравнений некорректно поставленной задачей, поскольку спектр оператора  $K$  содержит сходящуюся к нулю последовательность сингулярных значений, что приводит к разрывности обратного оператора  $K^{-1}$  [4].

Регуляризация некорректных задач играет ключевую роль в математическом моделировании и анализе данных, особенно в прикладных дисциплинах. В когнитивных науках и нейронауках методы решения обратных задач широко применяются для восстановления источников нейронной активности на основе магнитных (MEG) и электрических (EEG) сигналов головного мозга [5]. Восстановление распределения нейронной активности по данным многоканальных записей EEG/MEG представляет собой классическую некорректную задачу, так как соответствующий оператор плохо обусловлен. Это приводит к высокой чувствительности решений к шуму и необходимости применения методов регуляризации, включая регуляризацию Тихонова и использование обобщённых псевдообратных операторов [6].

В настоящей работе исследуется подход к стабилизации решений некорректных задач на основе обобщённых псевдообратных операторов  $A^\dagger$  и их представления в терминах разложения в ряды сингулярных значений (SVD). Проведён спектральный анализ таких операторов, на основе которого предложен метод регуляризации, использующий модифицированную псевдообратную матрицу. Рассмотрены примеры применения данного метода к интегральным уравнениям первого рода:

$$Kf = g,$$

где  $K : H_1 \rightarrow H_2$  — компактный оператор между гильбертовыми пространствами.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$(Kf)(x) = \int_{\Omega} K(x, y)f(y) dy = g(x),$$

где  $K(x, y)$  — ядро оператора, а  $g(x)$  — заданная функция. Решение требует регуляризации, так как оператор  $K$  плохо обусловлен. Задача  $Kf = g$  называется некорректно поставленной, если хотя бы одно из условий Адамара нарушается: существование (для любого  $g$  существует решение  $f$ ), единственность (решение единственно), стабильность (малые возмущения  $g$  не приводят к произвольным отклонениям  $f$ ). Для стабилизации решения вводятся регуляризационные методы, одним из которых является использование псевдообратного оператора.

Псевдообратный оператор Мура-Пенроуза для  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  можно выразить через разложение в ряды сингулярных значений (SVD). Пусть  $A : H_1 \rightarrow H_2$  — компактный оператор, тогда существует разложение:

$$A = U\Sigma V^*,$$

где  $U, V$  — унитарные операторы,  $\Sigma$  — диагональная матрица сингулярных чисел  $\sigma_i$ , а  $A^\dagger$  записывается как

$$A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^*,$$

где  $\Sigma^\dagger = \text{diag}(\sigma_i^{-1})$  для  $\sigma_i \neq 0$  [4]. Регуляризация Тихонова основана на модификации псевдообратного оператора:

$$A_\alpha^\dagger = V(\Sigma^2 + \alpha I)^{-1}\Sigma U^*.$$

Параметр  $\alpha > 0$  стабилизирует решение, подавляя влияние малых сингулярных чисел [3].

Рассмотрим операторное уравнение:

$$Kf = g, \quad K : H_1 \rightarrow H_2.$$

Так как  $K$  — компактный оператор, его спектр содержит убывающую последовательность сингулярных чисел  $\sigma_n$ , что делает прямое обращение невозможным. Решение через регуляризацию Тихонова записывается в виде:

$$f_\alpha = K_\alpha^\dagger g = V(\Sigma^2 + \alpha I)^{-1}\Sigma U^* g.$$

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма:

$$\int_0^1 e^{-|x-y|} f(y) dy = g(x).$$

Здесь  $K(x, y) = e^{-|x-y|}$  — компактный оператор. Для его обращения используется спектральное разложение:

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n u_n(x) v_n(y),$$

где  $\sigma_n$  — собственные числа оператора  $K^*K$ . Регуляризованное решение имеет вид:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha} \langle g, v_n \rangle u_n(x).$$

Использование обобщённых псевдообратных операторов позволяет стабилизировать решения некорректных задач. Их связь с разложением в сингулярные числа делает их удобным инструментом для решения интегральных уравнений и обработки сигналов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. *Методы решения некорректных задач*. Москва: Наука, 1979.
- [2] Н. Engl, М. Hanke, А. Neubauer. *Regularization Methods for Inverse Problems*. Springer, 1996.
- [3] P.C. Hansen. *Discrete Inverse Problems: Insight and Algorithms*. SIAM, 2010.
- [4] F. Riesz, B. Sz.-Nagy. *Functional Analysis*. Dover, 1955.
- [5] S. Baillet, J.C. Mosher, R.M. Leahy. *Electromagnetic Brain Mapping*. IEEE Signal Processing Magazine, 2001.
- [6] A. Tarantola. *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. SIAM, 2005.

# Attractors of transformation groups of topological manifolds with boundary

R. A. Dedaev, R. R. Imaev, N. I. Zhukova

*HSE University*

In this paper, by  $G$  is denoted a group of homeomorphisms of an  $n$ -dimensional topological manifold  $M$  with non-empty boundary  $\partial M$ .

The set  $G.x := \{g.x \mid g \in G\}$  is the orbit of the point  $x \in M$ . For any  $B \subset M$  we will use the notation  $G.B := \{G.x \mid x \in B\}$ . A subset  $B \subset M$  is called invariant, if  $G.B = B$ .

Let  $G$  be a group of homeomorphisms of an  $n$ -dimensional topological manifold  $M$  with non-empty boundary  $\partial M$ . A proper closed invariant subset  $\mathcal{A}$  of a topological manifold  $M$  is called an *attractor* of the group  $G$  [2], if there exists an invariant neighborhood  $U$  of  $\mathcal{A}$  with the following property: for any point  $x \in U \setminus \mathcal{A}$ , the closure  $\overline{G.x}$  of the orbit  $G.x$  contains  $\mathcal{A}$ , that is, if

$$\mathcal{A} \subset \overline{G.x} \quad \forall x \in U \setminus \mathcal{A}. \quad (1)$$

The neighborhood  $U$  is called the basin of the attractor  $\mathcal{A}$  and is denoted by  $Attr(\mathcal{A})$ .

If  $Attr(\mathcal{A}) = M$ , then  $\mathcal{A}$  is called a *global attractor*.

Recall that a non-empty closed invariant subset  $\mathcal{M}$  of a manifold  $M$  is called a *minimal set* of a homeomorphism group  $G$  if the orbit  $G.x$  of any point  $x$  from  $\mathcal{M}$  is everywhere dense in  $\mathcal{M}$ .

As emphasized by D. V. Anosov [1], the study of the questions of existence and structure of minimal sets and attractors are central in the theory of dynamic systems and, consequently, in the theory of transformation groups.

In the works [3], [4] and [5], the definition of the attractor  $\mathcal{A}$  additionally requires that  $\mathcal{A}$  be a minimal set. We study the specifics of global attractors that are minimal sets.

First of all, we study the problems of uniqueness of global attractors of homeomorphism groups. We have proven that the existence of two different global attractors  $\mathcal{A}_1$  and  $\mathcal{A}_2$  of the dynamic system  $(G, M)$  is realized. It is shown that in the case when both global attractors  $\mathcal{A}_1$  and  $\mathcal{A}_2$  are minimal sets, they coincide.

We are not aware of any works that investigate the influence of the boundary of the manifold  $M$  on the structure of attractors of homeomorphism groups of  $M$ . The main goal of the work is to fill this gap. We have

proven that any global attractor  $\mathcal{A}$  of the homeomorphism group  $G$  on a manifold  $M$  with a non-empty boundary  $\partial M$  either belongs to the boundary and can be either a proper subset of the boundary or coincide with it; or is equal to the union of the boundary  $\partial M$  with a global attractor  $\mathcal{A}^0$  of the induced homeomorphism group  $G|_{M^0}$  on the interior  $M^0$  of the manifold  $M$ .

Various examples of global and non-global attractors of transformation groups are constructed.

#### REFERENCES

- [1] Anosov D.V. Minimal set, *Mathematical Encyclopedia*. Vol. 3. Moscow: Soviet Encore, 1982. pp. 690–691.
- [2] Dedaev, R. A., Zhukova, N. I. The existence of attractors of foliations, pseudogroups and groups of transformations.
- [3] D. Milnor, “Variétés feuilletées”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **16**, 367–397 (1962).
- [4] N. I. Zhukova, “Minimal sets of Cartan foliations”, *Proceedings of the MIAN*, **256**, 115–147 (2007).
- [5] N. I. Zhukova, “Global attractors of complete conformal foliations”, *Math. collection*, **203**, №3, 79–106 (2012).

# Attractors of pseudogroups, transformation groups, and foliations

R. A. Dedaev, N. I. Zhukova

*HSE University*

A dynamical system is understood as a pair  $(S, X)$ , where  $X$  is a smooth manifold of arbitrary dimension,  $S$  is either a pseudogroup of local diffeomorphisms, or a transformation group, or a smooth foliation of an  $n$ -dimensional manifold  $X$ .

An *attractor* of a dynamical system  $(S, X)$  is a proper closed invariant subset  $\mathcal{A}$  in  $X$ , having a neighborhood  $\mathcal{U}$  that is invariant and open, such that the closure of the orbit  $S.x$  of any point  $x \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{A}$  contains  $\mathcal{A}$ . If  $\mathcal{U} = X$ , then the attractor  $\mathcal{A}$  is called *global*. The compactness of the manifold  $X$  or the attractor  $\mathcal{A}$  is not assumed.

As emphasized by D.V. Anosov [1], minimal sets and attractors are the main objects of study in topological dynamics, as they significantly determine the behavior of dynamical systems as a whole. We investigate the questions of existence and uniqueness of attractors for dynamical systems  $(S, X)$ .

For foliations of arbitrary codimension on  $n$ -dimensional manifolds, two criteria for the existence of an attractor (and a global attractor) have been proven. These criteria reduce the problem of the existence of an attractor to analogous problems for the pseudogroups of holonomy of foliations in the general case and global holonomy groups in the case of foliations covered by fibration.

For dynamical systems  $(S, X)$ , necessary and sufficient conditions for the existence of an attractor that is a minimal set have been found.

Various examples of attractors have been constructed, including regular attractors and attractors that are fractals.

The main results of the work are published in [2].

## REFERENCES

- [1] D. V. Anosov. *Minimal Set*. Moscow: Mathematical Encyclopedia (Sovetskaya Entsiklopediya). 1982, vol. 3, pp. 690–691.
- [2] R. A. Dedaev, N. I. Zhukova N. *Existence of Attractors of Foliation, Pseudogroups and Groups of Transformations*, Rus. J. Nonlin. Dyn., 2025, vol. 21, no. 1, pp. 1–18.

# Исследование пространственной модели стационарных биологических сообществ У. Дикмана и Р. Лоу.

В. А. Конева

*Северный (Арктический) федеральный университет имени  
М. В. Ломоносова*

Главная идея данной модели состоит в том, чтобы найти «проекцию» симулируемого биологического процесса на некоторые характеристики, динамика которых может быть выписана аналитически. В качестве таких «характеристик» в модели Дикмана и Лоу выступают, так называемые «пространственные моменты». Выписывается система интегродифференциальных уравнений, описывающая пространственную динамику в этой модели. Ставится проблема замыкания третьего пространственного момента, избавляющая систему от бесконечного числа уравнений. Выписываются примеры замыканий третьего момента, два из которых, так называемые ассиметричное и симметричное замыкания второй степени, рассматриваются более подробно. Ставится задача с линейным интегральным уравнением равновесия, которая получается при использовании ассиметричного замыкания. Далее анализ недостатков полученной модели, в связи с её биологической интерпретацией, а также с применением этого замыкания при изучении двухвидовой модели. И в итоге формулируется нелинейная проблема, возникающая при использовании симметричного параметрического замыкания второй степени с её численным исследованием. Демонстрация её правомерности, в том числе и в двухвидовой модели.

# Modeling of filtration of multicomponent hydrocarbon solutions with phase transitions during oil and gas production

K. V. Litvinova

*Lomonosov Moscow State University*

Modeling of oil fields is one of the most complex science-intensive problems, the solution of which requires a wide range of knowledge. It is necessary to know individual chapters of thermodynamics of open systems, physics and chemistry of solutions, underground hydrodynamics, mathematical aspects and numerical methods for solving partial differential equations [1]. Forecasting multicomponent filtration accompanied by phase transitions (liquids can be both compressible and incompressible) is possible only using mathematical modeling methods.

Thermodynamically consistent analytical models with adjustable parameters have been constructed, allowing one to approximate the thermodynamic functions of two-component solutions and increase the efficiency of numerical modeling of two-component filtration with phase transitions. In this paper, the method of constructing phase equilibrium constants with adjustable gas meters that take into account the behavior of a specific real solution in a given range of pressures and temperatures has been selected. As an example, a two-component methane-decane model is considered. In the considered pressure range, good agreement between the calculation results and the accurate compositional model has been obtained.

## REFERENCES

- [1] Koldoba E.V. Method for constructing phase equilibrium constants of multicomponent solutions, *Matem. modeling*, 30:4 (2018), 84–96.

# Exact solution of one countable-dimensional system of ordinary differential equations

I. A. Maruseev, A. E. Rassadin

*HSE University*

Let one consider the following countable-dimensional system of ordinary differential equations:

$$\dot{u}_0 = 0, \quad \dot{u}_k = \frac{u_{k-1}}{k}, \quad k \in N, \quad (1)$$

provided by initial conditions:

$$u_0(0) = u_0^0, \quad u_k(0) = u_k^0, \quad k \in N. \quad (2)$$

To solve the Cauchy problem (1)-(2) let us introduce a generating function for solutions of system (1):

$$U(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t) x^k. \quad (3)$$

It is obvious that a generating function for the initial conditions (2) is equal to:

$$U(x, 0) \equiv U_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^0 x^k. \quad (4)$$

Further, it is easy to see that the generating function (3) obeys to the following integro-differential equation:

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \int_0^x U(\xi, t) d\xi. \quad (5)$$

Exact solution of equation (5) under  $x \in [0, 1]$  with initial condition (4) was found in work [1]:

$$U(x, t) = U_0(x) + \sqrt{t} \int_0^x \frac{I_1(2\sqrt{t(x-\xi)})}{\sqrt{x-\xi}} U_0(\xi) d\xi, \quad (6)$$

where  $I_1(\dots)$  is the modified Bessel function of the first kind.

If  $U_0(x) = x^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) then in accordance with formula (6) exact solution of the Cauchy problem (4)-(5) is equal to [1]:

$$U(x, t) = n! \sqrt{\left(\frac{x}{t}\right)^n} I_n(2\sqrt{xt}) \quad (7)$$

Using formula (7), due to the linearity of operator (6), it easy to see that the general solution of equation (5) with the initial condition in the form (4) has the following form:

$$U(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^0 n! \sqrt{\left(\frac{x}{t}\right)^n} I_n(2\sqrt{xt}). \quad (8)$$

By decomposing the modified Bessel functions of the first kind in formula (8), we obtain a general solution of the input Cauchy problem (1)-(2):

$$u_k(t) = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^k \frac{n!}{(k-n)!} t^{k-n} u_n^0.$$

*The publication was prepared within the framework of the Academic Fund Program at HSE University (grant N 25-00-014, 'A new numerical-analytical method for solving Cauchy problems for evolutionary equations and systems of evolutionary equations with quadratic nonlinearity').*

#### REFERENCES

- [1] Maruseev I.A., Rassadin A.E. The exact solution of an integro-differential equation and some of its applications // Youth and science: Transformations through education / Proceedings of the VI All-Russian Scientific Student Conference of the Higher School of Economics-Nizhny Novgorod, April 26-28, 2022 / Edited by E. A. Sergeeva. – N. Novgorod: Higher School of Economics - Nizhny Novgorod, 2022. – pp. 78-80.

# Исследование решений дифференциального уравнения второго порядка с импульсной функцией в правой части

И. Н. Маслеников, И. С. Кащенко

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова*

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с запаздыванием

$$\ddot{x} + \sigma \dot{x} + x = f(x(t-h)), \quad (1)$$

где  $\sigma > 0$  и  $h > 0$ . Относительно нелинейной функции  $f(x)$  предполагаем, что она имеет импульсный тип, т.е. является  $\delta$ -функцией:  $f(x) = 0$ , при  $x \neq 0$  и  $\int_{-a}^b f(x)dx = f_0$  при любых  $a, b > 0$ . Будем исследовать поведение решений при фиксированных значениях параметров  $\sigma, f_0, h$ .

Сначала мы определим класс начальных условий  $S_A$ , зависящий от параметра  $A$  и состоящий из непрерывных функций  $\varphi(t)$ , заданных на отрезке  $[-h, 0]$ , для которых  $\varphi(t) \neq 0$  при  $t < 0$ ,  $\varphi(0) = 0$  и  $\dot{\varphi}(0) = A$ . Для каждой начальной функции из  $S(A)$  методом шагов построим решение  $x_A(t)$  и найдем первый его положительный корень  $t_* = t_*(A)$ :  $x_A(t_*(A)) = 0$ . При выполнении условия  $t_*(A) > h$  можно утверждать, что  $x_A(t_*(A) + t) \in S(\bar{A})$ , где  $\bar{A} = p(A) = \dot{x}_A(t_*(A))$ . Таким образом определяется отображение  $A_{n+1} = p(A_n)$ , динамика которого описывает поведение решений исходного дифференциального уравнения с запаздыванием. Конкретный вид отображения и его свойства зависят от параметров  $\sigma, f_0, h$ .

Показано, что при  $\sigma > 2$  существует значение  $A_*$ , при котором решение  $x(t)$  из класса начальных функций  $S(\pm A_*)$  является периодическим и неустойчивым. Для остальных функций  $x(t)$  из  $S(A)$  найдется такое  $T$ , что все решения задачи (1) с начальным условием из  $S_A$  при  $t > T$  сохраняют знак и стремятся к нулю (Рис. 1 а). При  $0 < \sigma < 2$  существуют устойчивые периодические решения (Рис. 1 б) и решения, совершающие нерегулярные колебания (Рис. 1 с).

Работа выполнена в рамках программы развития Регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Со-

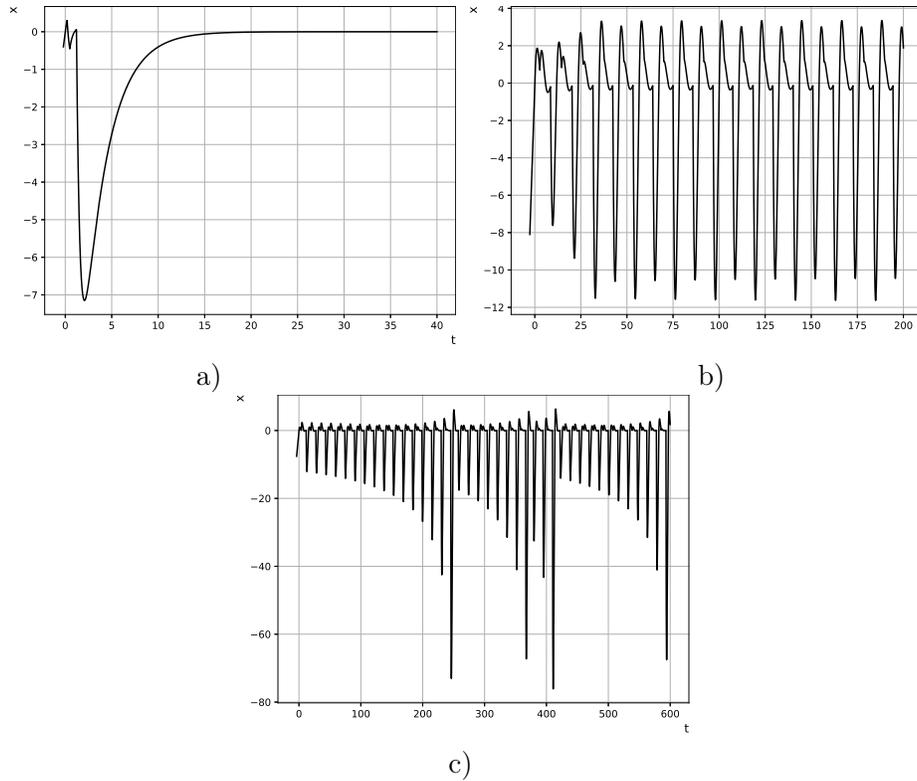


Рис. 1: Графики решения уравнения (1) при:  
 а)  $h = 0.2, \sigma = 3, f_0 = -10$ , б)  $h = 2.74, \sigma = 0.737, f_0 = 10$ ,  
 с)  $h = 3.8, \sigma = 1.24, f_0 = 10$

глашение о предоставлении субсидии из федерального бюджета №075-02-2025-1636).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кащенко С.А. Динамика уравнений с запаздывающей обратной связью импульсного типа // Дифференц. уравнения, 1999. Т. 35, №7. С. 889–898.
- [2] Кащенко И.С., Кащенко С.А., Маслеников И.Н. Динамика уравнений второго порядка с запаздывающей обратной связью импульсного типа // УМН, 2025 Т. 80, № 1 С. 159–160.

# Классификация солитонных решений в обобщенной уравнении Кортевега–де Фриза (KdV)

И. Е. Мельников<sup>1,2</sup>

1. Нижегородский кампус НИУ ВШЭ, Нижний Новгород
2. Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород

Дана классификация возможных солитонных решений в обобщенном уравнении KdV с гладкой нелинейной функцией. Доказано, что солитонное решение может быть только четырех возможных типов - классическим (то есть знакопостоянным, с одним экстремумом и двумя точками перегиба), пирамидальным (с большим количеством точек перегиба), классическим кинком (монотонным решением, выходящим на отличную от нуля константу на плюс бесконечности с одной точкой перегиба) и пирамидальным кинком (как классический, но с большим количеством точек перегиба).

Для нелинейных функций типа обобщенного полинома или Чебышевской системы (гладких функций) уточнены условия появления солитонов этих четырех различных типов. Приведены примеры уравнений с нетривиальной формой солитонов, а также обсуждаются другие формы солитонных решений для негладкой нелинейности.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №24-27-00110.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ostrovsky L., Pelinovsky E., Shrira V., Stepanyants Y. (2024) Localized wave structures: Solitons and beyond, *Chaos* 34, 062101 <https://doi.org/10.1063/5.0210903>
- [2] Pelinovsky E., Talipova T., Soomere T. (2021) The structure of algebraic solitons and compactons in the generalized Korteweg-de Vries equation. *Physica D*, 419 132785.
- [3] Schamel H. (1973) A modified Korteweg-de Vries equation for ion acoustic waves due to resonant electrons, *J. Plasma Phys.* 9 (3), pp. 377–387, <http://dx.doi.org/10.1017/S002237780000756X>.

## Динамика кальциевых колебаний и синхронизация астроцитов

Л. П. Никифорова, С. Ю. Маковкин

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского*

В статье исследуются бифуркационные механизмы генерации колебаний в биофизической модели химически возбудимых клеток мозга — астроцитов. В отличие от нейронов, широко изучаемых в нелинейной динамике, астроциты не обладают собственной электрической активностью, однако способны генерировать химические сигналы, влияющие на динамику нейронов. Модель Уллаха-Юнга [1] описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. Для интегрирования системы применяется численный метод Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным временным шагом. Одним из ключевых механизмов, приводящих к автоколебательным процессам, является бифуркация Андронова-Хопфа, определяющая изменение устойчивости стационарного состояния концентрации кальция.

Анализ проводится при изменении параметра  $IP3^*$ , который играет роль в регуляции кальциевой динамики, в то время как параметр  $v_4$  остается фиксированным. Исследуются максимальные и минимальные значения концентрации кальция  $[Ca^{2+}]$ , что позволяет выявить бифуркационные переходы и критические точки системы. Для наглядного представления динамики строится график предельного цикла, демонстрирующий зависимость амплитуд колебаний от изменения управляющего параметра.

Дополнительно рассматривается реакция астроцита на импульсное воздействие с изменением его параметров — амплитуды, длительности и частоты стимуляции. При определенных условиях наблюдается усложнение динамики, приводящее к нерегулярным колебаниям, а при дальнейшем уменьшении периода стимуляции система может переходить в квазистационарное состояние. Для оценки характера динамических режимов используется расчет старшего показателя Ляпунова, позволяющий определить наличие хаотических режимов и границы устойчивых состояний.

Анализ показателей Ляпунова позволил выявить характерные режимы динамики системы. При  $\lambda > 0$  наблюдается хаотическое поведение, связанное со странным аттрактором. В случае  $\lambda = 0$  в системе присутствует регулярная динамика.

Далее рассматривается синхронизация двух астроцитов, взаимодействующих через двустороннюю диффузионную связь. Для оценки синхронизации используется ряд показателей, включая мгновенную частоту колебаний, разницу фаз и дисперсию фазового сдвига. Определены условия, при которых астроциты демонстрируют полную синхронизацию, противофазные или несинхронизированные режимы. Выявлены переходные области, где взаимодействие приводит к изменению характера колебаний, включая неустойчивые и хаотические состояния. Особое внимание уделяется анализу фазовой динамики: если разница мгновенных частот астроцитов не превышает 1% от среднего значения, считается, что они синхронизированы по частоте.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ullah G., Jung P., Cornell-Bell A.H. Anti-phase calcium oscillations in astrocytes via inositol (1,4,5)-trisphosphate regeneration // *Cell Calcium*. 2006. Vol. 39. P. 197.
- [2] Makovkin, S. Y., Shkerin, I. V., Gordleeva, S. Y., & Ivanchenko, M. V. (2020). Astrocyte-induced intermittent synchronization of neurons in a minimal network. // *Chaos, Solitons & Fractals*, 138, 109951.
- [3] Matrosov V.V., Kazantsev V.B. Bifurcation mechanisms of regular and chaotic network signaling in brain astrocytes // *Chaos*. 2011. Vol. 21, №2. P. 23103.

# Merging of chaotic and quasiperiodic attractors and their multistability in the Chialvo map

A. A. Panyushev, N. V. Stankevich

*HSE University*

In this paper, we explore the multistable behavior of irregular attractors and the process of their formation and fusion in the Chialvo map, which is a two-dimensional discrete-time model with rich dynamics [1]. The map is described by the following equations:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 e^{y-x} + I \\ y_{n+1} = ay - bx + c \end{cases}$$

We study the parameter domain where several nontrivial attractors co-exist in phase space. One attractor is chaotic and the other is quasi-periodic. These attractors arise from different equilibrium states, and their basins of attraction have complex fractal shapes. There is a saddle point at the border between the two attractors that prevents them from merging. When the parameter reaches a certain value, one of the attractors collides with the separating saddle, and they merge to form a new composite attractor. This composite attractor contains elements of both original attractors and is the global attractor for the system.

## REFERENCES

- [1] Generic excitable dynamics on a two-dimensional map. *Chaos, Solitons Fractals* 1995;3-4(5):461–79

# Investigation of the SIS model with different migration rates of sick and healthy individuals by the method of breaking the power series

D. A. Podolin, A. E. Rassadin

*HSE University*

The report deals with the following generalization of the well-known SIS model [1]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = -SI + I, \quad \frac{\partial I}{\partial t} + U \frac{\partial I}{\partial x} = SI - I. \quad (1)$$

In this system of partial differential equations of hyperbolic type  $S(x, t)$  is linear density of susceptible to this disease individuals and  $I(x, t)$  is linear density of infectious ones. Parameter  $U$  is migration rate of sick individuals. This parameter obeys to the next inequalities:  $0 < U < 1$ , which means that the sick move more slowly then the healthy.

System (1) ought to be provided by initial conditions:

$$S(x, 0) = S_0(x) \geq 0, \quad I(x, 0) = I_0(x) \geq 0, \quad x \in R. \quad (2)$$

Further, let one suppose, that the initial conditions (2) belong to the class of real-analytic functions on the entire real axis:

$$S_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} S_k^0 x^k, \quad I_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} I_k^0 x^k. \quad (3)$$

Therefore, in this case, it is convenient to search for a solution to system (1) also in the form of a power series:

$$S(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} S_k(t) x^k, \quad I(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} I_k(t) x^k. \quad (4)$$

Substituting power series (4) into system (1) reduces it to the following countable system of ordinary differential equations:

$$\dot{S}_k = -(k+1) S_{k+1} + I_k - \sum_{n=0}^k S_n I_{k-n},$$

$$\dot{I}_k = -U(k+1)I_{k+1} - I_k + \sum_{n=0}^k S_n I_{k-n}, \quad (5)$$

where the dot above the letter means the time derivative.

The initial conditions for the system (5) are extracted from the power series (3):

$$S_k(0) = S_k^0, \quad I_k(0) = I_k^0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

The report considers approximate solutions of the Cauchy problem (5)-(6), which are obtained numerically as follows: in system (5), starting from a certain  $k$ ,  $S_k(t) = 0$  and  $I_k(t) = 0$  are assumed, which corresponds to the termination of the power series (4) on a certain term. As test solutions for this procedure a number of exact solutions of system (1) found in work [1] has been used.

*The publication was prepared within the framework of the Academic Fund Program at HSE University (grant N 25-00-014, 'A new numerical-analytical method for solving Cauchy problems for evolutionary equations and systems of evolutionary equations with quadratic nonlinearity').*

#### REFERENCES

- [1] Podolin D.A., Rassadin A.E. Exact solution of SIS-model with different velocities of migration of susceptible and infectious // VII International Conference 'Topological Methods in Dynamics and Related Topics' (Russia, Nizhny Novgorod, December 13-15, 2024). Book of abstracts. P. 67-68.

## Перемежающаяся синхронизация в модели трёхчастного синапса

Д. Д. Попов, С. Ю. Маковкин

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского*

В работе изучается нейрон-астроцитарный ансамбль, состоящий из двух нейронов и одного астроцита. Динамика внутриклеточной концентрации  $Ca^{2+}$  в астроците описывается моделью Уллаха-Юнга [1], мембранный потенциал нейрона описывается моделью Ходжкина-Хаксли [2] с модификацией Мэйнена [3, 4] для мозга млекопитающих.

Трёхчастный синапс — это функциональная единица, состоящая из трёх ключевых компонентов: пресинаптического нейрона, выделяющего нейромедиаторы, постсинаптического нейрона, содержащего рецепторы для их восприятия, и астроцита — глиальной клетки, окружающей синаптическую щель. Астроциты активно участвуют в регуляции синаптической передачи, контролируя концентрацию нейромедиаторов, ионов и других сигнальных молекул в синаптической щели, а также модулируя активность нейронов.

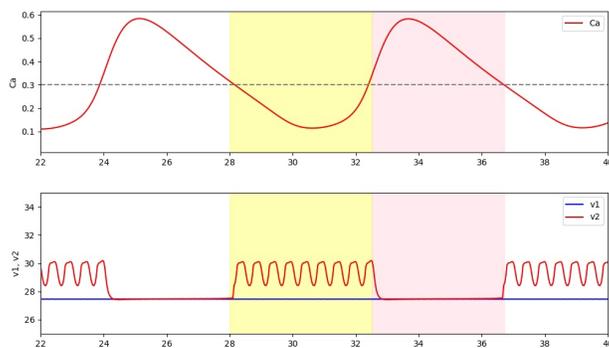


Рис. 1: Динамика двух тормозно синаптически связанных колеблющихся нейронов с усиливающим астроцитарным воздействием. На верхнем графике показаны два периода динамики увеличения внутриклеточной концентрации кальция в астроците. Пунктирная линия показывает порог активации для астроцитарного влияния на синаптическую силу связи. На нижнем графике изображены мгновенные частоты нейронов. Желтым цветом на графиках выделена область синхронизации нейронов, розовым цветом выделена область асинхронизации

На рис.1 видно, что колебания нейронов вызывают колебания кальция в астроците. При достижении порога внутриклеточной концентрации  $Ca^{2+}$ , астроцит усиливает синаптическую силу связи между нейронами, и они синхронизируются в противофазе на интервале времени равном длительности импульсов кальция в астроците.

Астроцитарная модуляция синаптической связи нейронов улучшает синхронизацию между колеблющимися нейронами. Влияние астроцита на динамику пары связанных нейронов заключается в стимуляции синхронизации колебательной активности нейронов за счет управляемого астроцитом увеличения нейронной синаптической силы связи [5].

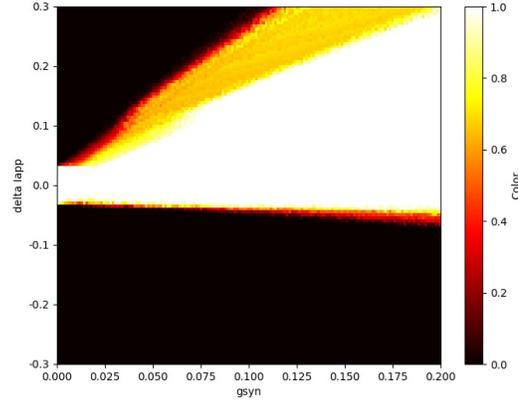


Рис. 2: Граница частотной синхронизации. Относительное время синхронизации для тормозной связи между нейронами. Данная диаграмма показывает зависимость  $g_{syn}$  от  $\Delta I_{app}$ , где  $\Delta I_{app} = I_{app1} - I_{app2}$ ,  $I_{app1} = 1.5$ . Цвет на данной диаграмме характеризует отношение времени, когда нейроны синхронизированы  $t_s$  ко времени наблюдения  $t_{tot}$ , т.е. относительное время синхронизации  $\frac{t_s}{t_{tot}}$ . На рисунке можно видеть, что вызванная астроцитами модуляция синаптической связи расширяет полосу синхронизации. Это происходит из-за того, что, во время повышения уровня кальция, астроцит увеличивает нейронную синаптическую силу связи на продолжительности импульсов кальция, благодаря чему становится возможным добиться временной синхронизации двух нейронов с большей частотной расстройкой.

Для детального исследования этого явления, рассчитана зависимость относительного времени синхронизации от частоты расстройки осцилля-

торов и синаптической силы связи. Вызванная астроцитами модуляция синаптической связи расширяет полосу синхронизации (рис.2).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ullah, G., Jung, P., & Cornell-Bell, A. H. (2006). Anti-phase calcium oscillations in astrocytes via inositol (1, 4, 5)-trisphosphate regeneration. *Cell calcium*, 39(3), 197-208.
- [2] Hodgkin, A. L., & Huxley, A. F. (1952). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of physiology*, 117(4), 500.
- [3] Mainen, Z. F., Joerges, J., Huguenard, J. R., & Sejnowski, T. J. (1995). A model of spike initiation in neocortical pyramidal neurons. *Neuron*, 15(6), 1427-1439.
- [4] Mainen, Z. F., & Sejnowski, T. J. (1996). Influence of dendritic structure on firing pattern in model neocortical neurons. *Nature*, 382(6589), 363-366.
- [5] Makovkin, S. Y., Shkerin, I. V., Gordleeva, S. Y., & Ivanchenko, M. V. (2020). Astrocyte-induced intermittent synchronization of neurons in a minimal network. *Chaos, Solitons & Fractals*, 138, 109951.

# Геометрические свойства решений уравнений мелкой воды на вращающейся сфере

E. S. Stetsyak<sup>1,2</sup>, A. P. Chupakhin <sup>1,2</sup>

1. *Novosibirsk State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Novosibirsk*

2. *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the SB of the RAS*

Consider a shallow-water model on a rotating, attracting sphere, which approximately describes the large-scale motions of air and ocean masses on long time scales [1]. The system of equations for such motions is:

$$\begin{aligned} D_0 v &= w^2 \operatorname{ctg} \theta + r_0 w \cos \theta + \frac{1}{4} \sin \theta \cos \theta - f_0 h_\theta, \\ D_0 w &= -v w \operatorname{ctg} \theta - r_0 v \cos \theta - f_0 (\sin \theta)^{-1} h_\theta, \\ D_0 h &+ (\sin \theta)^{-1} h (w_\phi + (v \sin \theta)_\theta) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

where  $D_0 = \partial_t + v \partial_\theta + (\sin \theta)^{-1} w \partial_\phi$  is the material derivative on the sphere. In (1), the following notations are used:  $0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi$  are the latitude and longitude,  $v, w$  are the corresponding velocity components,  $h$  is the depth of the fluid layer;  $r_0 = \frac{2\Omega_0 a_0}{V_0}$ ,  $f_0 = \frac{gH_0}{V_0^2}$  are the Rossby and Froude numbers.

In [2], [3] some exact solutions of the system of equations (1) have been found and investigated analytically and numerically, including those describing motions with weak and strong discontinuities (shock waves).

In this work, the geometric properties of such wave motions are investigated using methods of differential geometry. For the surface  $h = h(\theta, \phi)$ , which defines stationary wave profiles, the curvatures, the Willmore functional, and other geometric parameters are computed and analyzed. Questions about the domains of definition of the solutions, their properties, and applications to hydrophysics problems are discussed.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dijkstra H. *Nonlinear Physical Oceanography*, Moscow, Izhevsk: Scientific Research Center for Regular and Chaotic Dynamics, , 2007, 680 p.

- [2] Cherevko A.A., Chupakhin A.P. Shallow water equations on a rotating attracting sphere 1,2. // .2009, vol.50, No. 2 pp. 24-36, Vol. 50 No. 3 pp. 82-96
- [3] Ostapenko B.B., Speshilova A.V., Cherevko A.A., Chupakhin A.N. Numerical simulation of wave motions on an attractive rotating spherical belt. // 2015, T. 55, No. 3, pp. 469-487