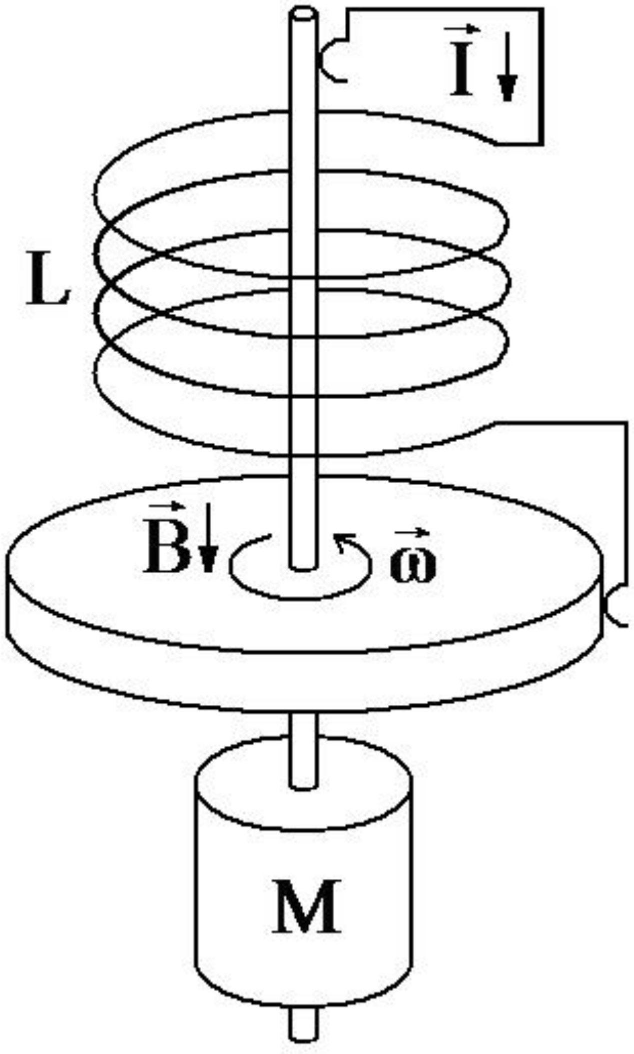
IX Всероссийская научная студенческая конференция НИУ ВШЭ — Нижний Новгород
Нижний Новгород, 23-24 апреля 2025 года

ЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАНС В ДИНАМО БУЛЛАРДА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СЛАБО МОДУЛИРОВАННОГО ВРАЩАТЕЛЬНОГО МОМЕНТА

В.О. Бугров, А.Э. Рассадин

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Динамо Булларда (однодисковое динамо)



$$\begin{cases} L\dfrac{dI}{dt} + R\,I = K\,I\,\omega \\ J\dfrac{d\omega}{dt} = M - K\,I^2 - 2\,\gamma\,\omega \end{cases}$$

$I(t)$ — электрический ток через индуктивность

$\omega(t)$ — угловая скорость вращения диска динамо

R — сопротивление электрической цепи

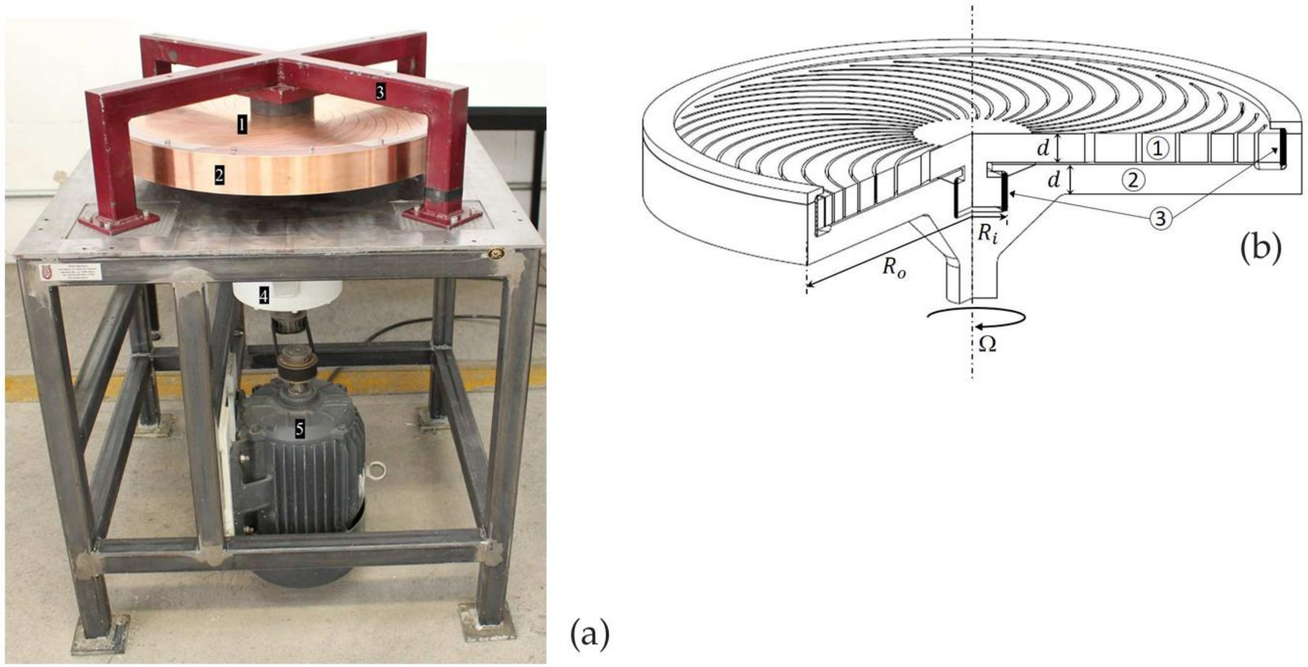
K — коэффициент взаимной индуктивности

J — момент инерции динамо

M — механический момент на оси динамо

$2\,\gamma$ — коэффициент механического трения в оси динамо

Avalos-Zúñiga R., Priede J. Realization of Bullard’s disc dynamo // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2023. V. 479. 2271.



Отличие от оригинальной работы **Bullard, E. Oscillations of a system of disk dynamos // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51, Is. 4. P. 744-760.**

Будем считать, что механический момент на оси динамо зависит от времени следующим образом:

$$M = M_0 + M_1 \cos \Omega\, t$$

$$M_0 > M_1 > 0$$

глубина модуляции: $m = M_1/M_0$

$$0 < m \ll 1$$

Удобно ввести безразмерные переменные и параметры:

$$x = I\sqrt{\frac{K}{M_0}} \quad y = \omega\sqrt{\frac{K\,J}{L\,M_0}} \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{K\,M_0}{L\,J}} \quad \mu = R\sqrt{\frac{J}{K\,L\,M_0}} \quad \delta = \gamma\sqrt{\frac{L}{J\,K\,M_0}}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu\, x + x\, y \\ \dot{y} = 1 + m\cos\nu\,\tau - x^2 - 2\,\delta\, y \end{cases} \qquad \tau = \Omega_0\, t$$

$\nu = \Omega/\Omega_0$ — безразмерная частота модуляции

Пусть сначала $m = 0$, тогда система становится автономной:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu\, x + x\, y \\ \dot{y} = 1 - x^2 - 2\,\delta\, y \end{cases}$$

$$0 < \delta < 1/2\,\mu$$

Система обладает тремя состояниями равновесия:

$$O^s(0, 1/2\,\delta)$$

$$O^\pm\left(\pm, \sqrt{1 - 2\,\delta\,\mu}\;\;\mu\right)$$

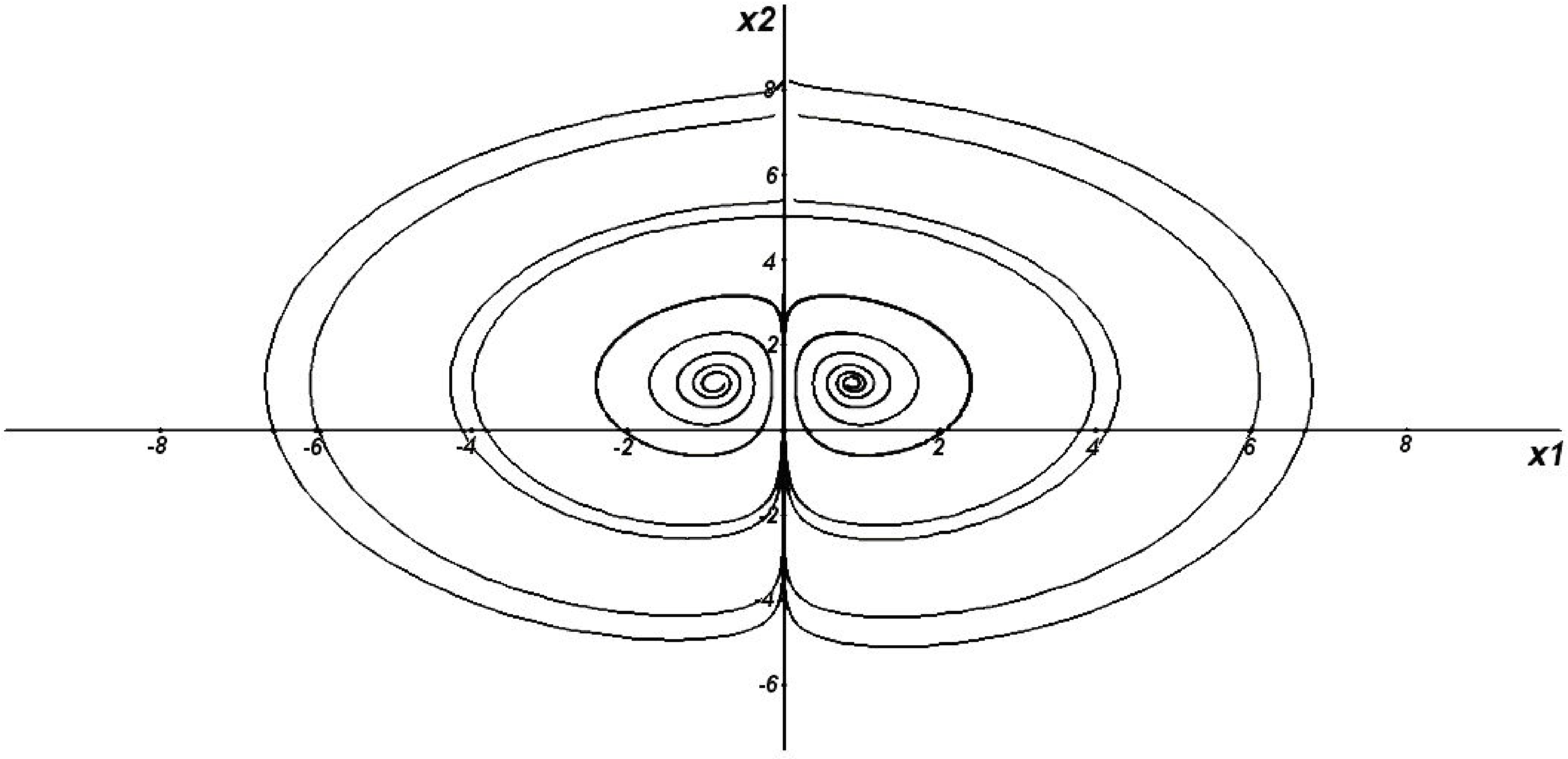
$$0 < \delta < \sqrt{2 + 4\,\mu^2} - 2\,\mu$$

$O^\pm$ — устойчивые фокусы

O^s — седло

Система инвариантна относительно замены переменных $(x, y) \to (-x, y)$

Фазовая плоскость автономной системы Булларда



Ищем решение системы вблизи точки O^+ в виде ($0 < m \ll 1$):

$$x = +\sqrt{1-2\delta\mu} + \xi \qquad y = \mu + \eta \qquad |\xi| \ll 1 \qquad |\eta| \ll 1$$

Линеаризованная система:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \sqrt{1-2\,\delta\,\mu}\,\eta \\ \dot{\eta} = -2\sqrt{1-2\,\delta\,\mu}\,\xi - 2\,\delta\,\eta + m\,\cos\nu\tau \end{cases}$$

$$\ddot{\xi} + 2\,\delta\,\dot{\xi} + 2\,(1-2\,\delta\,\mu)\,\xi = m\sqrt{1-2\,\delta\,\mu}\,\cos\nu\tau$$

$$\xi(\tau) = Re[A_\xi(\nu)\exp(i\nu\tau)] \qquad A_\xi(\nu) = \frac{m\,\omega_0}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\omega_0^2-\nu^2+2\,i\,\delta\,\nu}$$

$\omega_0 = \sqrt{2\,(1-2\,\delta\,\mu)}$ — безразмерная собственная частота колебаний системы

$$\eta(\tau) = Re[A_\eta(\nu)\exp(i\nu\tau)]$$

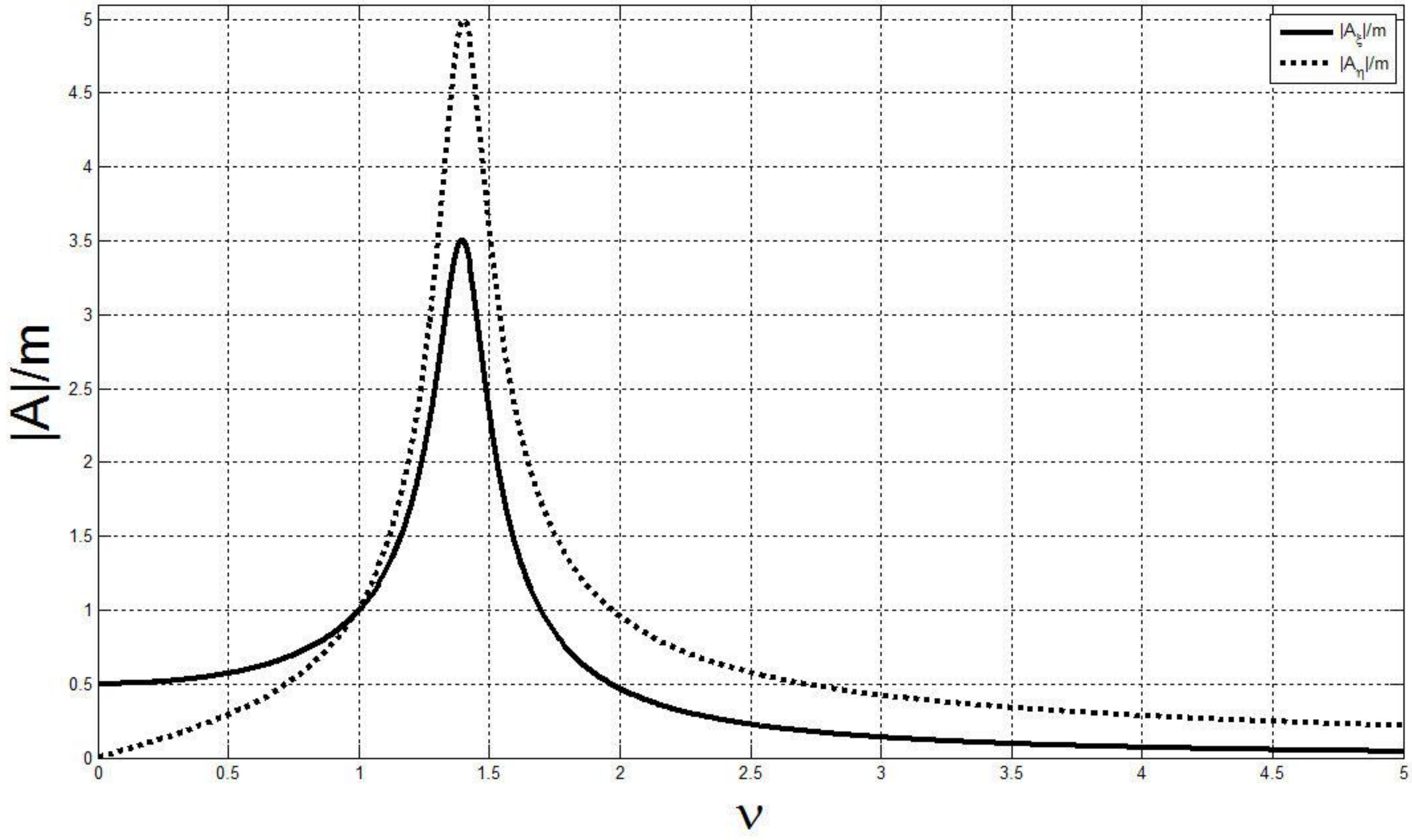
$$A_\eta(\nu) = \frac{i\,\nu\,m}{\omega_0^2 - \nu^2 + 2\,i\,\delta\,\nu}$$

Амплитудно-частотные характеристики линеаризованной системы:

$$\frac{|A_\xi(\nu)|}{m} = \frac{\omega_0^2}{2}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + 4\,\delta^2\nu^2}}$$

$$\frac{|A_\eta(\nu)|}{m} = \frac{\nu}{\sqrt{(\omega_0^2-\nu^2)^2+4\,\delta^2\nu^2}}$$

Амплитудно-частотные характеристики при $\mu = 0{,}1$ и $\delta = 0{,}1$



БЛАГОДАРИМ ЗА ВНИМАНИЕ!

Работа подготовлена в ходе проведения исследования (проект № 25-00-014 «Новый численно-аналитический метод решения задач Коши для эволюционных уравнений и систем эволюционных уравнений с квадратичной нелинейностью») в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)»