

**Семинар научно-учебной группы
«Нижегородские эволюционисты»**

Нижний Новгород, Россия, 23 октября 2025 года

Фейнманоны в задачах физики твёрдого тела

А. Э. Рассадин

**Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»**

Легендарный физик

Письма в ЖЭТФ

Т. 9

1969

Вып. 1

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

28

Ю.В. Гуляев

В настоящей работе будет показано, что вдоль поверхности однородного пьезоэлектрического или проводящего твердого тела может распространяться поверхностная звуковая волна нерелевского типа — чисто поперечная с вектором поляризации, параллельным поверхности. Выполнение граничных условий на поверхности при этом обеспечивается наличием в такой волне продольного и поперечного электрического поля. Последние могут быть связаны как с чистым пьезоэффектом (в пьезоэлектрических диэлектриках), так и с перераспределением свободных электронов и возникновением объемных зарядов вследствие электрон-фононного взаимодействия через пьезоэффект или потенциал деформации (в проводящих телах). Так как поверхностный характер этих волн принципиально связан с взаимодействием электрических полей с решеткой кристалла, мы будем называть их "электрозвукowymi" 1).

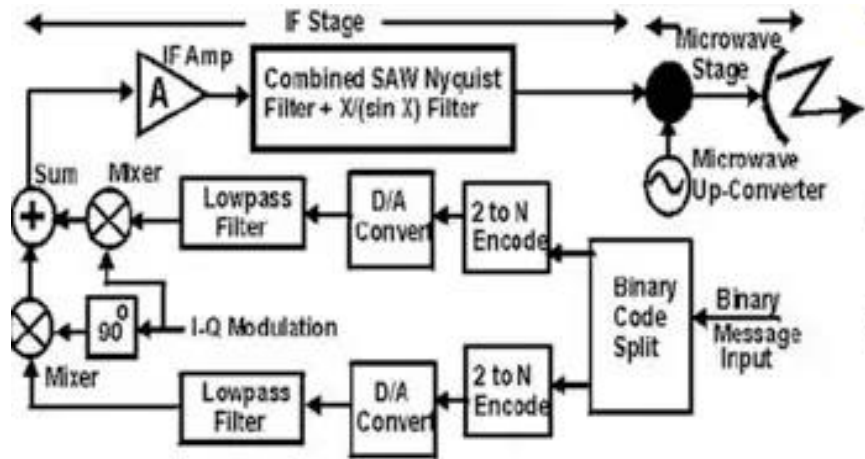
Рассмотрим для определенности полубесконечный пьезоэлектрический проводящий кристалл типа сульфида кадмия (класс C_{6v}), ориентированный так, что гексагональная ось z и ось ox параллельны по-



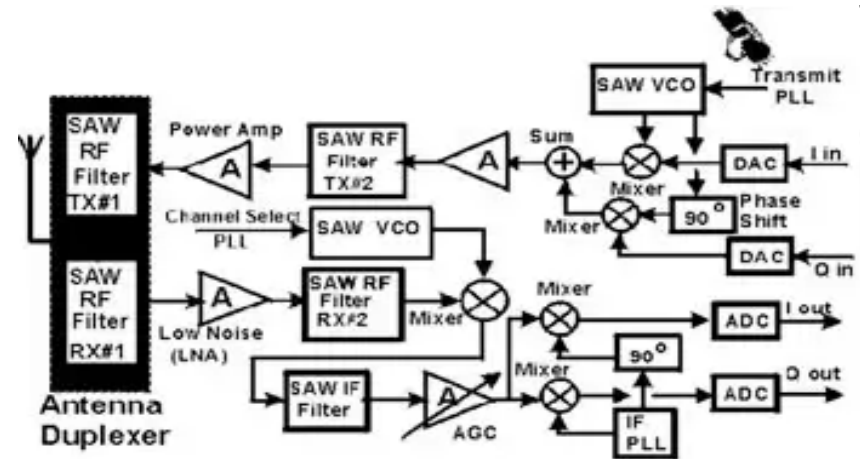
Юрий Васильевич Гуляев,
академик РАН, научный
руководитель
ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН

Применение акустоэлектронных устройств в системах и средствах связи

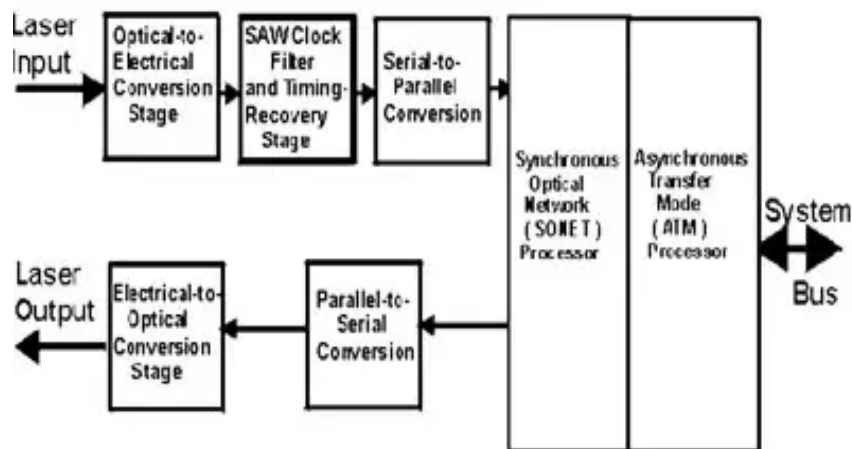
Цифровой радиопередатчик с квадратурной амплитудной модуляцией



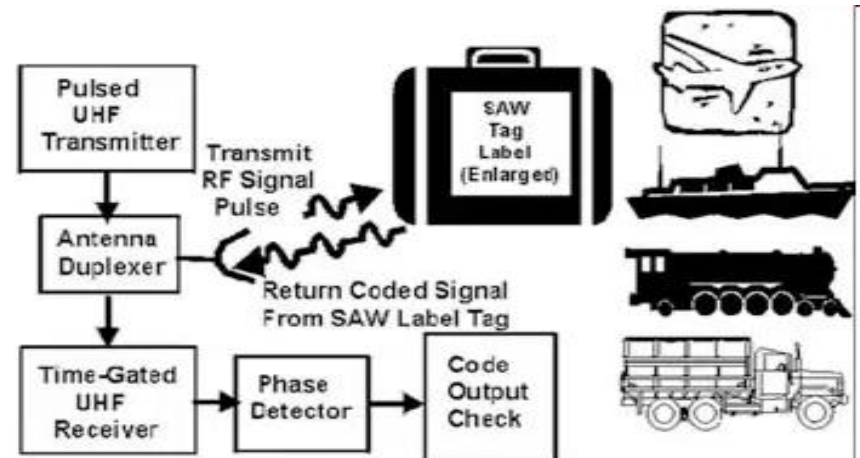
Базовая цифровая абонентская сотовая станция типа GSM



Регенератор для ВОЛС в стандарте АТМ



Инспекционные устройства на ПАВ



Система уравнений, описывающая распространение связанных электрических и упругих волн в пьезоэлектрической среде:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

Тензор напряжений пьезоэлектрика:

$$\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} \cdot u_{lm} + \beta_{l,ik} \cdot E_l$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0$$

Вектор электрической индукции:

$$D_i = D_{0i} + \varepsilon_{ik} \cdot E_k - 4 \cdot \pi \cdot \beta_{i,lm} \cdot u_{lm}$$

D_{0i} — вектор пьезоэлектрической индукции

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

Тензор деформаций:

$$u_{lm} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right)$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

Свойства симметрии тензора модулей упругости

$$\lambda_{iklm} = \lambda_{kilm} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik}$$

— остаётся
21 независимая
компонента

Рассмотрим кристалл класса C_{6v} : ось симметрии 6-го порядка
(ось z) с проходящей через неё плоскостью симметрии

$$\begin{aligned}\lambda_{xxxx} &= \lambda_{yyyy} = a + b & \lambda_{xxyy} &= a - b \\ \lambda_{xxzz} &= \lambda_{yyzz} = c & \lambda_{xyxy} &= b \\ \lambda_{xzxz} &= \lambda_{yzyz} = d & \lambda_{zzzz} &= f\end{aligned}$$

— остаётся 5 независимых компонент

$$\vec{u} = (0, \quad 0, \quad u(x, y, t)) \quad \text{— вектор смещения}$$

$$\lambda_{xzxz} = \lambda_{yzyz} \equiv \lambda \qquad \varphi = \varphi(x, y, t)$$

$$\beta_{x,xz} = \beta_{y,yz} \equiv \beta \qquad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \equiv \varepsilon$$

$$\sigma_{zx} = \frac{\partial}{\partial x} (-\beta \cdot \varphi + \lambda \cdot u) \quad \sigma_{zy} = \frac{\partial}{\partial y} (-\beta \cdot \varphi + \lambda \cdot u)$$

$$\vec{D} = \left(-\frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon \cdot \varphi + 4 \cdot \pi \cdot \beta \cdot u), \quad -\frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon \cdot \varphi + 4 \cdot \pi \cdot \beta \cdot u), \quad D_0 \right)$$

$$\varphi = -\frac{4 \cdot \pi \cdot \beta}{\varepsilon} \cdot u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \Delta u \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad a = \sqrt{\frac{1}{\rho} \cdot \left(\lambda + \frac{4 \cdot \pi \cdot \beta^2}{\varepsilon} \right)}$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -a \cdot \sqrt{-\Delta} \cdot \psi_2 \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = a \cdot \sqrt{-\Delta} \cdot \psi_1$$

$$\psi_1(x, y, t) \equiv u(x, y, t)$$

$$\sqrt{-\Delta} f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x, y) - f(x', y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2]^{3/2}} \cdot \frac{dx' \cdot dy'}{2 \cdot \pi}$$

$$(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x', y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \cdot \frac{dx' \cdot dy'}{2 \cdot \pi}$$

$$i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = a \cdot \sqrt{-\Delta} \cdot \sigma_y \cdot \psi \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— матрица Паули}$$

$$\psi(x, y, t) = (\psi_1(x, y, t), \quad \psi_2(x, y, t))^T$$

$$\psi(x, y, 0) = \left(u(x, y, 0), \quad -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(x', y', 0)}{\partial t} \frac{dx' \cdot dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \right)^T$$

$$\psi(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, y; x', y'; t) \cdot \psi(x', y', 0) \cdot dx' \cdot dy'$$

$$\Gamma(x, y; x', y'; t) = \langle x, y | \exp[-i \cdot a \cdot t \cdot \sqrt{-\Delta} \cdot \sigma_y] | x', y' \rangle$$

$$\exp(-i \cdot a \cdot t \cdot \sqrt{-\Delta} \cdot \sigma_y) = \frac{1 - \sigma_y}{2} \cdot \exp(i \cdot t \cdot a \cdot \sqrt{-\Delta}) + \frac{1 + \sigma_y}{2} \cdot \exp(-i \cdot t \cdot a \cdot \sqrt{-\Delta})$$

$$\Gamma(x, y; x', y'; t) = \frac{1 - \sigma_y}{2} \cdot G^*(x', y'; x, y; t) + \frac{1 + \sigma_y}{2} \cdot G(x, y; x', y'; t)$$

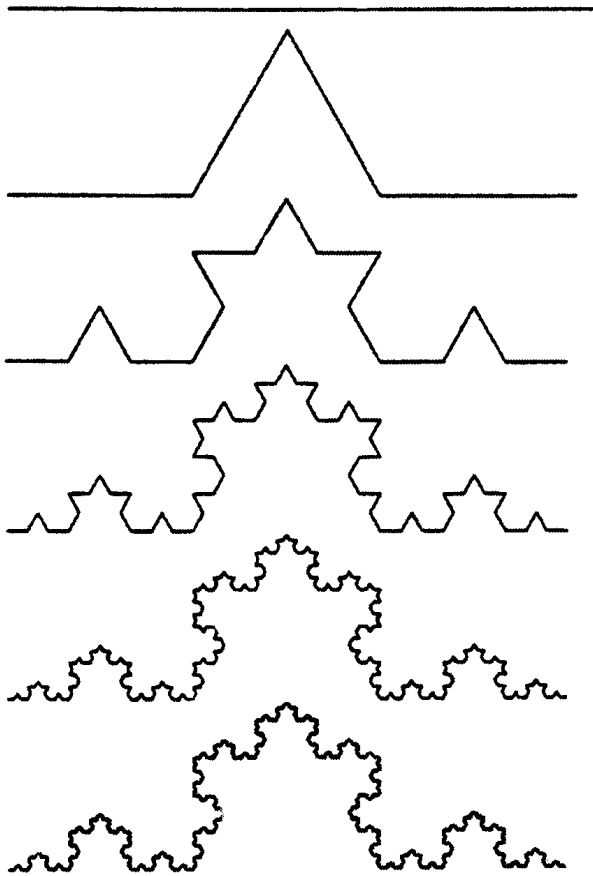
$$G(x, y; x', y'; t) \equiv \langle x, y | \exp(-i \cdot t \cdot a \cdot \sqrt{-\Delta}) | x', y' \rangle$$

$$G(x, y; x', y'; t) = \int_{\substack{Q_1(t)=x, \\ Q_1(0)=x', \\ Q_2(t)=y, \\ Q_2(0)=y'}} \exp[i \cdot S] \cdot \prod_{k=1}^2 \prod_{\tau} \frac{dP_k(\tau) \cdot dQ_k(\tau)}{2 \cdot \pi}$$

$$S = \int_0^t [P_1(\tau) \cdot \dot{Q}_1(\tau) + P_2(\tau) \cdot \dot{Q}_2(\tau) - a \cdot \sqrt{P_1^2(\tau) + P_2^2(\tau)}] \cdot d\tau$$

Fractal dynamics on plane of coordinates:

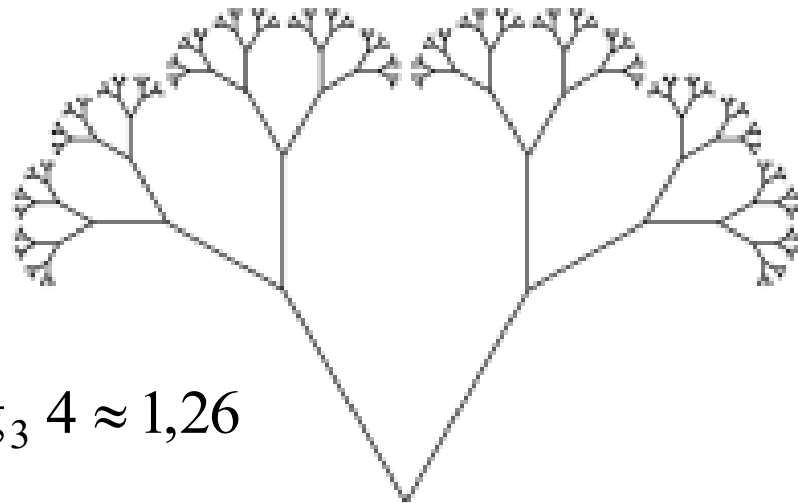
Iterations of Koch's curve



Iterations of Gosper curve:



Fractal tree:



$$D_{fr} = \log_3 4 \approx 1,26$$

Взаимоотношения фейнманона с фононами и фотонами

$$\hat{u}(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{c}(\vec{p}, t) \cdot U_{\vec{p}}(x, y) + \hat{c}^+(\vec{p}, t) \cdot U_{\vec{p}}^*(x, y)] \cdot \frac{dp_x \cdot dp_y}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2 \cdot a \cdot |\vec{p}|}}$$

$$\hat{\vec{E}}(x, y, t) = \frac{4 \cdot \pi \cdot \beta}{\varepsilon} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{p} \cdot [\hat{a}(\vec{p}, t) \cdot U_{\vec{p}}(x, y) + \hat{a}^+(\vec{p}, t) \cdot U_{\vec{p}}^*(x, y)] \cdot \frac{dp_x \cdot dp_y}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2 \cdot a \cdot |\vec{p}|}}$$

$$\vec{p} = (p_x, p_y) \quad U_{\vec{p}}(x, y) = \exp[i \cdot p_x \cdot x + i \cdot p_y \cdot y]$$

$$\hat{c}(\vec{p}, t) = \hat{c}(\vec{p}) \cdot \exp[-i \cdot a \cdot |\vec{p}| \cdot t] \quad \hat{c}^+(\vec{p}, t) = \hat{c}^+(\vec{p}) \cdot \exp[i \cdot a \cdot |\vec{p}| \cdot t]$$

$$\hat{a}(\vec{p}, t) = i \cdot \hat{c}(\vec{p}, t) \quad \hat{a}^+(\vec{p}, t) = -i \cdot \hat{c}^+(\vec{p}, t)$$

$$\frac{U_{\vec{p}}(x, y)}{-2 \cdot \pi \cdot i} = \int_{\substack{Q_1(0)=p_0 \cdot x, \\ Q_1(-\pi/2)=p_x/p_0,}}^{\substack{Q_2(0)=p_0 \cdot y \\ Q_2(-\pi/2)=p_y/p_0}} \exp[-i \cdot \tilde{S}] \cdot \prod_{k=1}^2 \prod_{\tau} \frac{dP_k(\tau) \cdot dQ_k(\tau)}{2 \cdot \pi}$$

$$\tilde{S} = \int_{-\pi/2}^0 \sum_{k=1}^2 \left(P_k(\tau) \cdot \dot{Q}_k(\tau) - \frac{P_k^2(\tau) + Q_k^2(\tau)}{2} \right) \cdot d\tau$$

$$\psi(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(p_x, p_y, 0) \cdot U_{\vec{p}}(x, y) \cdot \frac{dp_x \cdot dp_y}{2 \cdot \pi}$$

$$\hat{u}(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{c}(\vec{p}) \cdot U_{\vec{p}}(x, y) + \hat{c}^+(\vec{p}) \cdot U_{\vec{p}}^*(x, y)] \cdot \frac{dp_x \cdot dp_y}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2 \cdot a \cdot |\vec{p}|}}$$

Локальный гамильтониан:

$$\hat{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \hat{u}(x, y, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial \hat{u}(x, y, t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial \hat{u}(x, y, t)}{\partial y} \right)^2 \right] : \cdot dx \cdot dy$$

$$\hat{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot |\vec{p}| \cdot \hat{c}^+(\vec{p}) \cdot \hat{c}(\vec{p}) \cdot dp_x \cdot dp_y$$

Нелокальный гамильтониан:

$$\hat{\tilde{H}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \hat{u}(x, y, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{a^2}{2} \cdot (\sqrt{-\Delta} \cdot \hat{u}(x, y, t))^2 \right] : \cdot dx \cdot dy$$

$$\hat{\tilde{H}} = \hat{H}$$

— квантовая теория поля пьезоэлектриков
по самой своей природе нелокальна.

Советские классики физики сверхтекучести:



П. Л. Капица



Л. Д. Ландау



Н. Н. Боголюбов

Гамильтониан Н. Н. Боголюбова для слабо неидеального бозе-газа при близких к нулю температурах (1947 г.):

$$\hat{H} = E_0 + \sum_{\vec{p}} \left(\frac{p^2}{2 \cdot m} + m \cdot u^2 \right) \cdot \hat{a}_{\vec{p}}^+ \cdot \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{m \cdot u^2}{2} \cdot \sum_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}} \cdot \hat{a}_{-\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^+ \cdot \hat{a}_{-\vec{p}}^+)$$

**Коммутационные
соотношения Бозе:**

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 \quad [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^+] = \delta_{\vec{p}\vec{p}'}$$

$$\hat{a}_{\vec{p}} = \frac{\hat{b}_{\vec{p}} + L_{\vec{p}} \cdot \hat{b}_{-\vec{p}}^+}{\sqrt{1 - L_{\vec{p}}^2}} \quad \hat{a}_{\vec{p}}^+ = \frac{\hat{b}_{\vec{p}}^+ + L_{\vec{p}} \cdot \hat{b}_{-\vec{p}}}{\sqrt{1 - L_{\vec{p}}^2}}$$

$$[\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}] = 0 \quad [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}^+] = \delta_{\vec{p}\vec{p}'}$$

Диагонализация гамильтониана Боголюбова:

$$\hat{H} = \tilde{E}_0 + \sum_{\vec{p}} \varepsilon(p) \cdot \hat{b}_{\vec{p}}^+ \cdot \hat{b}_{\vec{p}} \quad L_{\vec{p}} = \frac{1}{m \cdot u^2} \cdot \left[\varepsilon(p) - \frac{p^2}{2 \cdot m} - m \cdot u^2 \right]$$

$$\varepsilon(p) = \sqrt{u^2 \cdot p^2 + \left(\frac{p^2}{2 \cdot m} \right)^2}$$

— спектр элементарных
возбуждений слабо
неидеального бозе-газа

$$\hat{F}(x) = \int (\hat{b}(\vec{p}) \cdot \exp[-i \cdot p \cdot x] + \hat{b}^+(\vec{p}) \cdot \exp[i \cdot p \cdot x]) \cdot d\vec{p}$$

$$\exp[-i \cdot p \cdot x] \equiv \exp[-i \cdot \varepsilon(p) \cdot t + i \cdot \vec{p} \cdot \vec{x}]$$

$$[\hat{b}(\vec{p}), \hat{b}^+(\vec{p}')] = \delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad d\vec{p} \equiv \frac{d^3 p}{\sqrt{2 \cdot \varepsilon(p)} \cdot (2 \cdot \pi)^{3/2}}$$

Уравнение для квантованного скалярного поля $F(x)$:

$$\frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial t^2} + \varepsilon^2(\hat{\vec{p}}) \cdot \hat{F} = 0 \quad \varepsilon^2(\hat{\vec{p}}) = \frac{\Delta^2}{4 \cdot m^2} - u^2 \cdot \Delta \quad \hat{\vec{p}} = -i \cdot \nabla$$

$$\hat{H} = \int : \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \hat{F}(x)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon(\hat{\vec{p}}) \cdot \hat{F}(x))^2 \right] : d^3 x$$

$$\hat{H} = \int \varepsilon(p) \hat{b}^+ (\vec{p}) \cdot \hat{b}(\vec{p}) \cdot d\vec{p}$$

**— результат совпадает
с диагонализированным
гамильтонианом
Боголюбова**

Рассмотрим классическое уравнение для скалярного поля $F(x)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \varepsilon^2(\hat{\vec{p}}) \cdot F = 0 \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = -\varepsilon(\hat{\vec{p}}) \cdot F_2 \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} = \varepsilon(\hat{\vec{p}}) \cdot F_1$$

$$i \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = \varepsilon(\hat{\vec{p}}) \cdot \sigma_y \cdot \vec{F} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}(\vec{x}, t) = \int \Gamma(\vec{x}, \vec{x}'; t) \cdot \vec{F}(\vec{x}', 0) \cdot d^3 x' \quad \sigma_y^2 = 1$$

$$\Gamma(\vec{x}, \vec{x}'; t) = \langle \vec{x} | \exp(-i \cdot t \cdot \varepsilon(\hat{\vec{p}}) \cdot \sigma_y) | \vec{x}' \rangle$$

$$\exp(-i \cdot t \cdot \varepsilon(\hat{\vec{p}}) \cdot \sigma_y) = \frac{1 - \sigma_y}{2} \cdot \exp(i \cdot t \cdot \varepsilon(\hat{\vec{p}})) + \frac{1 + \sigma_y}{2} \cdot \exp(-i \cdot t \cdot \varepsilon(\hat{\vec{p}}))$$

$$\Gamma(\vec{x}, \vec{x}'; t) = \frac{1 - \sigma_y}{2} \cdot G^*(\vec{x}', \vec{x}; t) + \frac{1 + \sigma_y}{2} \cdot G(\vec{x}, \vec{x}'; t)$$

$$G(\vec{x}, \vec{x}'; t) \equiv \langle \vec{x} | \exp(-i \cdot t \cdot \varepsilon(\hat{\vec{p}})) | \vec{x}' \rangle$$

Функция Грина выражается интегралом Фейнмана вида:

$$G(\vec{x}, \vec{x}'; t) = \int_{\vec{Q}(0)=\vec{x}'}^{\vec{Q}(t)=\vec{x}} \exp[i \cdot \int_0^t (\vec{P}(\tau) \cdot \dot{\vec{Q}}(\tau) - \varepsilon(\vec{P}(\tau))) \cdot d\tau] \cdot \prod_{\tau} \frac{d\vec{P}(\tau) \cdot d\vec{Q}(\tau)}{2 \cdot \pi}$$

Траектории в интеграле Фейнмана:

$$\vec{Q}(\tau) = \vec{Q}_j + (\vec{Q}_{j+1} - \vec{Q}_j) \cdot (\tau - \tau_j) / \Delta\tau, \quad \vec{P}(\tau) = \vec{P}_j, \quad \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}],$$

$$\tau_j = j \cdot \Delta\tau \quad \Delta\tau = t/N \quad j = \overline{0, N}$$

Траектория в пространстве импульсов — просто набор точек, задаваемых неким отображением трёхмерного пространства:

$$\vec{P}_{j+1} = \vec{\Phi}(\vec{P}_j) \quad \vec{\Phi} : R^3 \rightarrow R^3$$

Теорема Вильямса-Хатчисона:

$\vec{f}_k : R^d \rightarrow R^d$ — сжимающие отображения $k = \overline{1, s}$

$$|\vec{f}_k(\vec{x}) - \vec{f}_k(\vec{y})| \leq \lambda_k \cdot |\vec{x} - \vec{y}| \quad 0 < \lambda_k < 1$$

$D_0 \subset R^d$ — компактная область

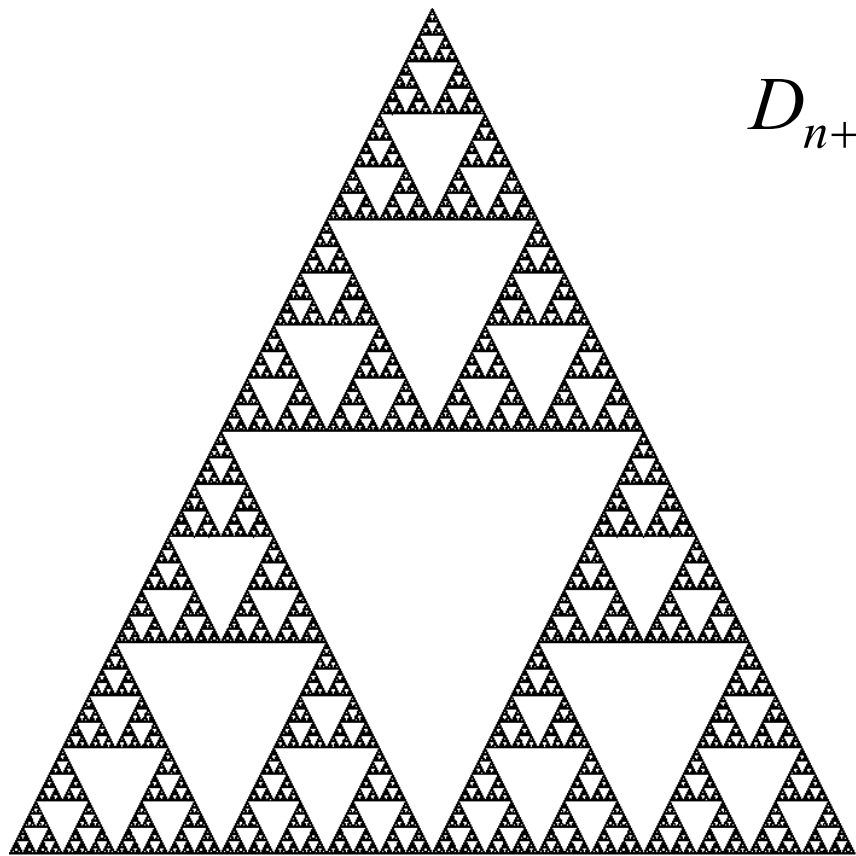
$$D_{n+1} = \vec{f}_1(D_n) \cup \vec{f}_2(D_n) \cup \dots \cup \vec{f}_s(D_n)$$

Существует предел: $D = \lim_{n \rightarrow +\infty} D_n$ сходимость понимается по метрике Хаусдорфа:

$$\rho_H(U, V) = \max \left\{ \max_{\vec{x} \in U} \min_{\vec{y} \in V} |\vec{x} - \vec{y}|, \max_{\vec{y} \in V} \min_{\vec{x} \in U} |\vec{x} - \vec{y}| \right\}$$

Пример построения фрактала на двумерной плоскости
с помощью теоремы Вильямса-Хатчисона

$$f_i(\vec{x}) = \frac{1}{2} \cdot \vec{x} + \vec{b}_i \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_3 = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

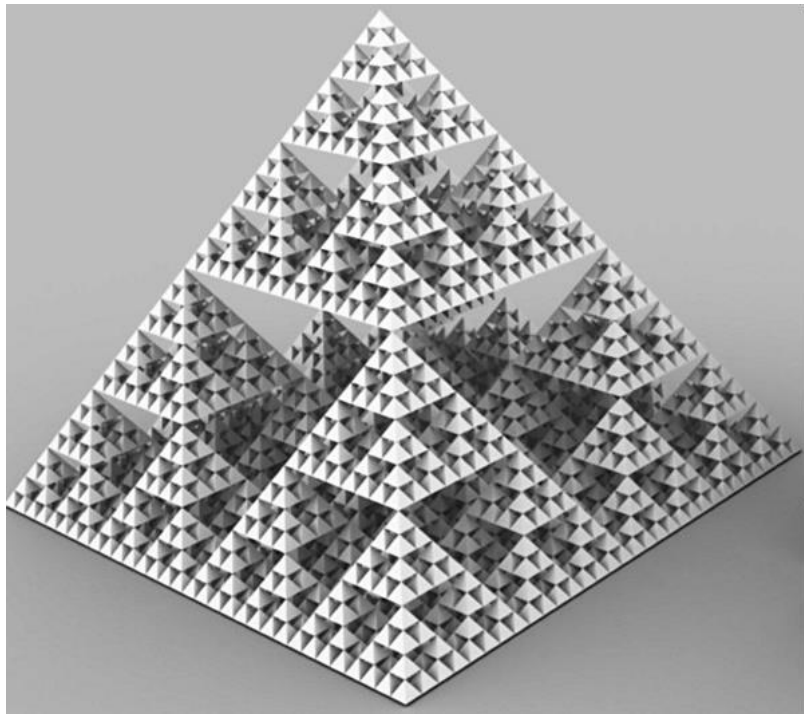


$$D_{n+1} = f_1(D_n) \cup f_2(D_n) \cup f_3(D_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_H(D_n, D) = 0$$

**D — салфетка Серпинского
(Вятка, 1915 г.) с фрактальной
размерностью:**

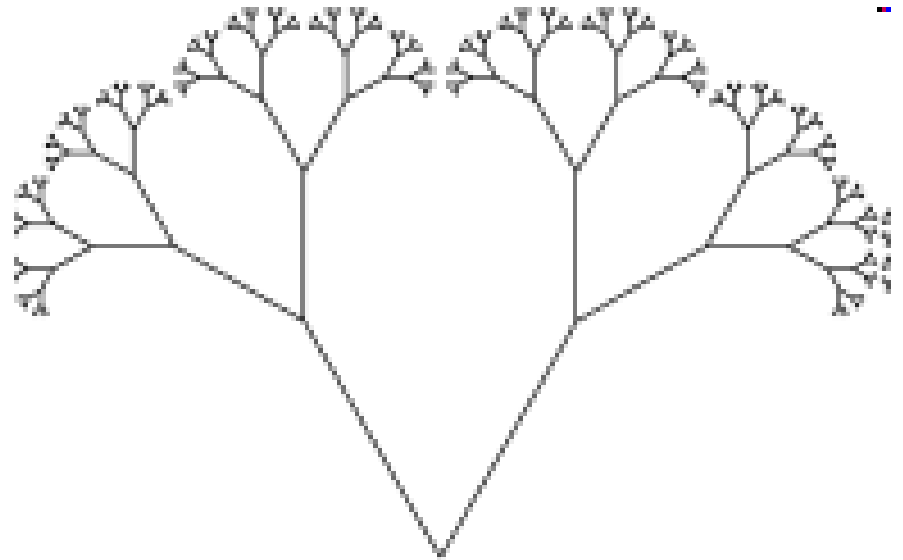
$$D_{fr} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,5849$$



Фейнманон — объект,двигающийся в фазовом пространстве по фрактальным траекториям подобно квантовомеханической частице.

При соответствующем выборе сжимающих отображений предельное множество является фракталом.

Траектории координат являются прямыми, которые могут проходиться в обратном направлении. Значит, координаты могут пробегать фрактальные деревья в трёхмерном пространстве.



Фейнманы и фононы в бозе-жидкости

Волновая функция
бозе-конденсата:

$$\Xi(\vec{x}, t) = \sqrt{n_0(\vec{x}, t)} \cdot \exp[i \cdot \Phi(\vec{x}, t)]$$

$$\varphi = \frac{\hbar}{m} \cdot \Phi \quad \text{— потенциал скорости жидкости}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = u^2 \cdot \Delta \varphi \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -u \cdot \sqrt{-\Delta} \cdot \varphi_2 \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = u \cdot \sqrt{-\Delta} \cdot \varphi_1$$

$$(-\Delta)^{-1/2} f(\vec{x}) = \frac{1}{2 \cdot \pi^2} \cdot \int \frac{f(\vec{x}') \cdot d^3 x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \quad \text{— обратный оператор к оператору модуля импульса}$$

$$i \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} = u \cdot \sqrt{-\Delta} \cdot \sigma_y \cdot \vec{\varphi} \quad \vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\varphi}(t) = \exp(-i \cdot t \cdot u \cdot \sqrt{-\Delta} \cdot \sigma_y) \cdot \vec{\varphi}(0)$$

$$\exp(-i \cdot t \cdot u \cdot \sqrt{-\Delta} \cdot \sigma_y) = \frac{1 - \sigma_y}{2} \cdot \exp(i \cdot t \cdot u \cdot \sqrt{-\Delta}) + \frac{1 + \sigma_y}{2} \cdot \exp(-i \cdot t \cdot u \cdot \sqrt{-\Delta})$$

Матрица Грина для фононов:

$$\Gamma_f(\vec{x}, \vec{x}'; t) = \frac{1 - \sigma_y}{2} \cdot G_f^*(\vec{x}', \vec{x}; t) + \frac{1 + \sigma_y}{2} \cdot G_f(\vec{x}, \vec{x}'; t)$$

$$G_f(\vec{x}, \vec{x}'; t) \equiv \langle \vec{x} | \exp(-i \cdot t \cdot u \cdot \sqrt{-\Delta}) | \vec{x}' \rangle = \frac{i}{2 \cdot \pi^2 \cdot u} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(\vec{x} - \vec{x}')^2 - (u \cdot t)^2 + i \cdot 0}$$

$$G_f(\vec{x}, \vec{x}'; t) = \int_{\vec{Q}(0)=\vec{x}'}^{\vec{Q}(t)=\vec{x}} \exp[i \cdot \int_0^t (\vec{P}(\tau) \cdot \dot{\vec{Q}}(\tau) - u \cdot |\vec{P}(\tau)|) \cdot d\tau] \cdot \prod_{\tau} \frac{d\vec{P}(\tau) \cdot d\vec{Q}(\tau)}{2 \cdot \pi}$$

**Функция Грина для фононов представляется интегралом Фейнмана.
Опять появился фейнманон.**

Квантованное поле потенциала скорости и нелокальность

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int [\hat{c}(\vec{p}) \cdot \exp(i \cdot \vec{p} \cdot \vec{x} - i \cdot u \cdot |\vec{p}| \cdot t) + \hat{c}^+(\vec{p}) \cdot \exp(-i \cdot \vec{p} \cdot \vec{x} + i \cdot u \cdot |\vec{p}| \cdot t)] \cdot d\vec{p}$$

Вычислим два
гамильтониана:

$$[\hat{c}(\vec{p}), \hat{c}^+(\vec{p}')] = \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$\hat{H} = \int \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \hat{\phi}(\vec{x}, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{u^2}{2} \cdot (\sqrt{-\Delta} \cdot \hat{\phi}(\vec{x}, t))^2 \right] \cdot d^3 x$$

$$\hat{H} = \int \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \hat{\phi}(\vec{x}, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{u^2}{2} \cdot (\nabla \hat{\phi}(\vec{x}, t))^2 \right] \cdot d^3 x$$

Результаты
совпадают:

$$\hat{H} = \int u \cdot |\vec{p}| \cdot \hat{c}^+(\vec{p}) \cdot \hat{c}(\vec{p}) \cdot d^3 p$$

Фейнманы в линеаризованном уравнении Гросс-Питаевского

$$i \cdot \frac{\partial \Xi}{\partial t} = -\frac{1}{2 \cdot m} \cdot \Delta \Xi + U_0 \cdot (\Xi \cdot |\Xi|^2 - n \cdot \Xi) \quad \text{— уравнение Гросс-Питаевского}$$

Линеаризуем его:

$$\Xi = \sqrt{n} + \zeta \quad \begin{cases} i \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left(-\frac{\Delta}{2 \cdot m} + n \cdot U_0 \right) \cdot \zeta + n \cdot U_0 \cdot \zeta^* \\ i \cdot \frac{\partial \zeta^*}{\partial t} = -\left(-\frac{\Delta}{2 \cdot m} + n \cdot U_0 \right) \cdot \zeta^* - n \cdot U_0 \cdot \zeta \end{cases}$$

Введём
«энергетический»
вектор:

$$\vec{\varepsilon}(\vec{p}) = \left(0, \quad -i \cdot n \cdot U_0, \quad \frac{\vec{p}^2}{2 \cdot m} + n \cdot U_0 \right)$$

$$\vec{\varepsilon}^2(\vec{p}) = \left(\frac{p^2}{2 \cdot m} \right)^2 + \frac{n \cdot U_0}{m} \cdot p^2 \equiv \varepsilon^2(p)$$

$$u = \sqrt{\frac{n \cdot U_0}{m}} \quad \text{— скорость звука}$$

Опять
появился
фейнманон...

$$i \cdot \frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} = \vec{\varepsilon}(\hat{\vec{p}}) \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{\zeta} \quad \vec{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \exp[-i \cdot t \cdot \vec{\varepsilon}(\hat{\vec{p}}) \cdot \vec{\sigma}] &= \frac{\exp[-i \cdot t \cdot \vec{\varepsilon}(\hat{\vec{p}})] + \exp[i \cdot t \cdot \vec{\varepsilon}(\hat{\vec{p}})]}{2} + \\ &+ (\vec{\varepsilon}(\hat{\vec{p}}) \cdot \vec{\sigma}) \cdot \frac{1}{\varepsilon(\hat{\vec{p}})} \cdot \frac{\exp[-i \cdot t \cdot \vec{\varepsilon}(\hat{\vec{p}})] - \exp[i \cdot t \cdot \vec{\varepsilon}(\hat{\vec{p}})]}{2} \end{aligned}$$

$$\varepsilon^{-1}(\vec{x} - \vec{x}') = \langle \vec{x} | \frac{1}{\varepsilon(\hat{\vec{p}})} | \vec{x}' \rangle = \int \frac{\exp[i \cdot \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] }{\varepsilon(p)} \cdot \frac{d^3 p}{(2 \cdot \pi)^3}$$

$$\varepsilon^{-1}(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{m}{\pi^2 \cdot |\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin[2 \cdot m \cdot u \cdot |\vec{x} - \vec{x}'| \cdot \eta]}{\sqrt{\eta^2 + 1}} \cdot d\eta$$

$$\begin{aligned}\vec{\zeta}(\vec{x}, t) = & \int \frac{G(\vec{x}, \vec{x}'; t) + G^*(\vec{x}', \vec{x}; t)}{2} \cdot \vec{\zeta}(\vec{x}', 0) \cdot d^3 x' + \\ & + (\vec{\varepsilon}(\hat{\vec{p}}) \cdot \vec{\sigma}) \cdot \int \varepsilon^{-1}(\vec{x} - \vec{x}') \cdot \vec{\xi}(\vec{x}', t) \cdot d^3 x'\end{aligned}$$

$$\vec{\xi}(\vec{x}, t) = \int \frac{G(\vec{x}, \vec{x}'; t) - G^*(\vec{x}', \vec{x}; t)}{2} \cdot \vec{\zeta}(\vec{x}', 0) \cdot d^3 x'$$

$$G(\vec{x}, \vec{x}'; t) = \int_{\vec{Q}(0)=\vec{x}'}^{\vec{Q}(t)=\vec{x}} \exp[i \cdot \int_0^t (\vec{P}(\tau) \cdot \dot{\vec{Q}}(\tau) - \varepsilon(\vec{P}(\tau))) \cdot d\tau] \cdot \prod_{\tau} \frac{d\vec{P}(\tau) \cdot d\vec{Q}(\tau)}{2 \cdot \pi}$$

Выводы

- в задачах сверхтекучести имеются фейнманоны — квазичастицы, двигающиеся по фрактальным траекториям интеграла Фейнмана;
- возможность введения фейнманонов тесно связана с рассмотрением дробных дифференциальных операторов.

**БЛАГОДАРЮ
ЗА
ВНИМАНИЕ!**