

Семинар научно-учебной группы "Нижегородские
эволюционисты" Нижний новгород, Россия, 28 января 2025
года

Новый численно-аналитический метод решения уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова

Рубцов М.И.

Национальный исследовательский университет "Высшая школа
экономики", Нижний Новгород, Россия

Уравнение Колмогорова Петровского пискунова

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - u^2 \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (1)$$

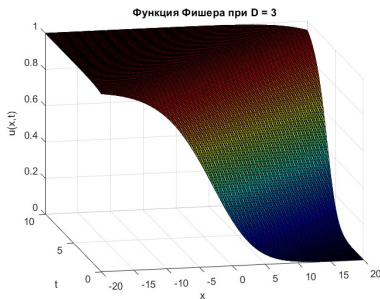
Kolmogorov A., Petrovsky I., Piscounov N. Etude de l'equation de la diffusion avec croissance de la quantite de matiere et son application a un probleme biologique // Moscou Univ. Bull. Math. 1(6), 1-25 (1937).

Решение Фишера

Решение приведённое Р.А. Фишером для уравнения КПП.

Fisher, R.A. : The wave of advance of advantageous genes. Annals of Eugenics. 7, 355369 (1937)

$$u(x, t) = \frac{1}{(1 + \exp(\frac{-5*t}{6} + \frac{x}{\sqrt{6D}}))^2} \quad (2)$$



Ищем решение уравнения КПП в классе вещественноаналитических функций

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) x^k$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{du_k}{dt} x^k$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k+1}(k+1) x^k$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k+2}(k+1) * (k+2) x^k$$

Тогда при подстановке в уравнение КПП получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - u^2 \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (3)$$

$$\frac{du_k}{dt} = D(k+1)(k+2)u_{k+2} + u_k - \sum_{n=0}^k u_n u_{k-n} \quad (4)$$

Метод обрыва степенного ряда

Выберем натуральное N и положим :

$$u_k(t) \equiv 0 \text{ для всех } k \geq N + 1$$

Тогда система ОДУ сведётся к $N + 1$ - мерной. Мы получим такое выражение для искомой функции :

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^N u_k(t) x^k \quad (5)$$

Пример для уравнения КПП для $N = 2$

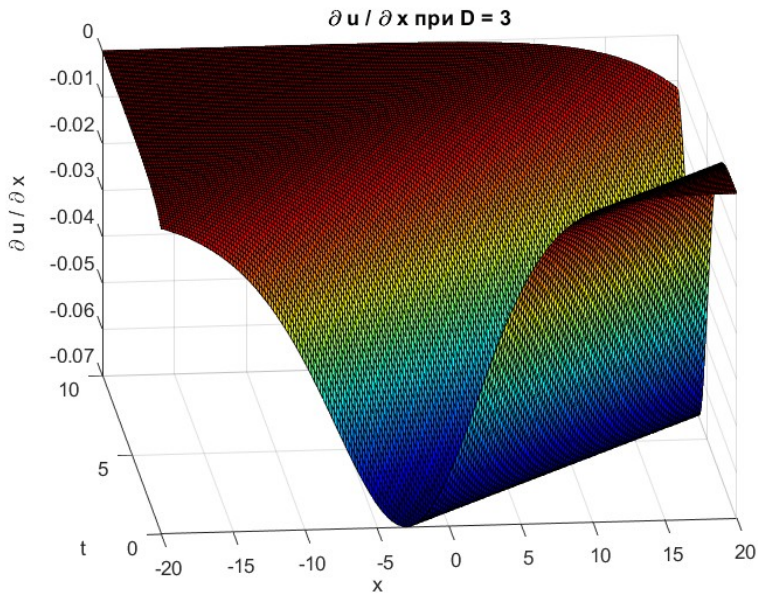
$$\begin{cases} \frac{du_0}{dt} = u_0 - u_0^2 + 2Du_1 \\ \frac{du_1}{dt} = u_1 - 2u_0u_1 \\ \frac{du_2}{dt} = u_2 - 2u_0u_2 - u_1^2 \end{cases}$$

Найдём начальные условия, взяв производные решения Фишера.

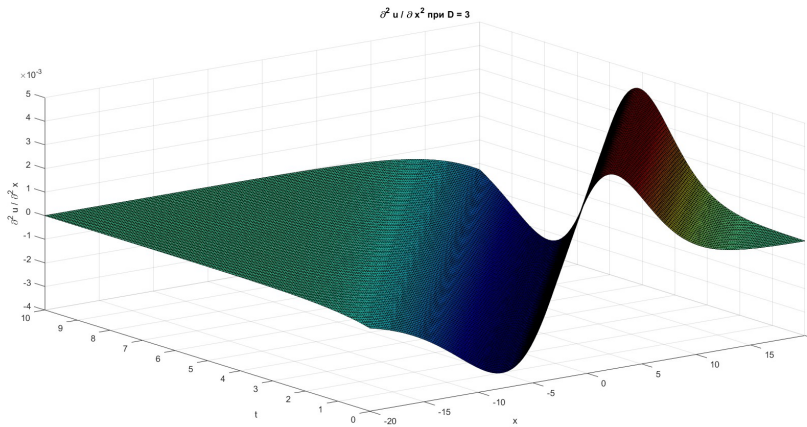
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\sqrt{6} \cdot \exp\left(-\frac{5t}{6} + \frac{\sqrt{6}x}{6\sqrt{D}}\right)}{3\sqrt{D} \left(\exp\left(-\frac{5t}{6} + \frac{\sqrt{6}x}{6\sqrt{D}}\right) + 1\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\exp\left(-\frac{5t}{6} + \frac{\sqrt{6}x}{6\sqrt{D}}\right)}{6D \left(\exp\left(-\frac{5t}{6} + \frac{\sqrt{6}x}{6\sqrt{D}}\right) + 1\right)^3} + \frac{\exp\left(-\frac{5t}{3} + \frac{\sqrt{6}x}{3\sqrt{D}}\right)}{2D \left(\exp\left(-\frac{5t}{6} + \frac{\sqrt{6}x}{6\sqrt{D}}\right) + 1\right)^4}$$

Первая производная



Вторая производная



```
+8  Funct_kpp10_optim.m  x  distinguishable_colors.m  x  New_task.m  x  vdpkppN0.m  x  vdpkppN1.m  x  vdpkppN2.m  x  +
4      D = 3;                % Коэффициент диффузии
5      TS = 1;               % Конечное время интегрирования
6      Nmax = 9;             % Максимальный порядок ряда Фишера
7      tspan = linspace(0, TS, 200);
8      x = linspace(-1, 1, 400);
9
10     %% --- Начальные условия ---
11     u0 = [ ...
12         0.25, ...
13         -1/sqrt(96*D), ...
14         1/(96*D), ...
15         sqrt(6)/(1728*D^(3/2)), ...
16         -1/31104, ...
17         -sqrt(2)/933120, ...
18         17/67184640, ...
19         17*sqrt(2)/2821754880, ...
20         -31/16930529280, ...
21         -31*sqrt(2)/914248581120 ...
22     ];
23
24     %% --- Цветовая схема ---
25     colors = lines(Nmax + 1);
```

```

result_ode = zeros(size(x));
for k = 0:N
    result_ode = result_ode + (x.^k) .* Yend(k+1);
end

% График
plot(x, result_ode, 'LineWidth', 2.5, 'Color', colors(N+1, :));
end

```

```

%% --- Точное решение ---

```

```

t = TS;
Z = 1 ./ (1 + exp(-5 * t / 6 + x ./ sqrt(6 * D))).^2;
plot(x, Z, 'k', 'LineWidth', 3); % Чёрная линия

```

```

%% --- Оформление графика ---

```

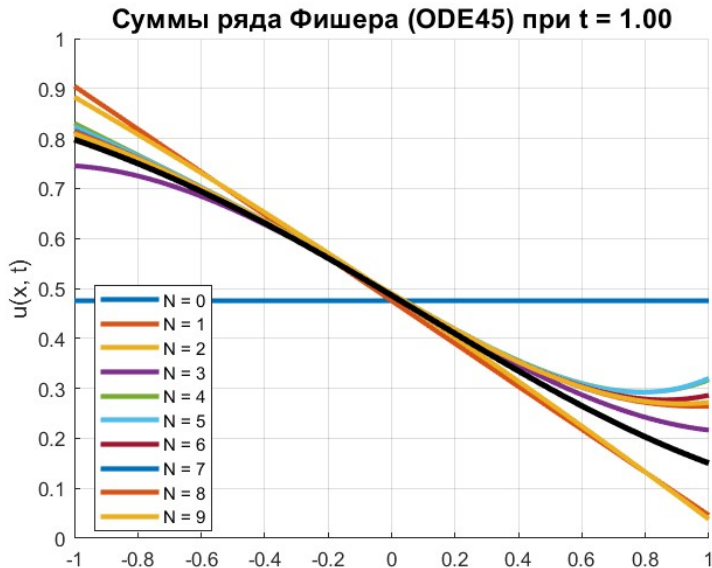
```

legend(arrayfun(@(n) sprintf('N = %d', n), 0:Nmax, 'UniformOutput', false), 'Location', 'best');
title(sprintf('Суммы ряда Фишера (ODE45) при t = %.2f', TS), 'FontSize', 14);
xlabel('x', 'FontSize', 12);
ylabel('u(x, t)', 'FontSize', 12);
grid on;
hold off;

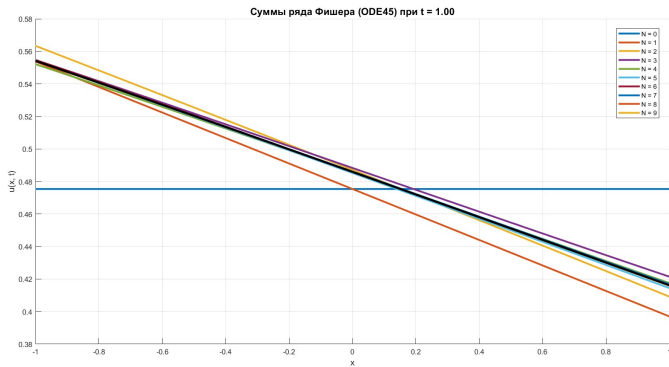
```

```
function dy = ydpkpp1(t,y)
dy = zeros(3,1);    % a column vector
D = 3;
dy(1) = y(1)-y(1)^2+2*D*y(3);
dy(2) = y(2) - 2*y(1)*y(2);
dy(3) = y(3)-2*y(1)*y(3)-y(2)^2;
```

Решение обрезанной системы методом $\text{ode45}(N = 9, D = 0.1)$



$$N = 9, D = 3$$



```
%% --- Настройки ---
clear; clc; close all;

D = 0.1;
TS = 1;
elems_comp = [6,7];
u_comp = 3;
tspan = linspace(0, TS, 200);
t_uniform = linspace(0, TS, 200);

%% --- Начальные условия ---
u0 = [ ...
    0.25, ...
    -1/sqrt(96*D), ...
    1/(96*D), ...
    sqrt(6)/(1728*D^(3/2)), ...
    -1/31104, ...
    -sqrt(2)/933120, ...
    17/67184640, ...
    17*sqrt(2)/2821754880, ...
    -31/16930529280, ...
    -31*sqrt(2)/914248581120 ...
```

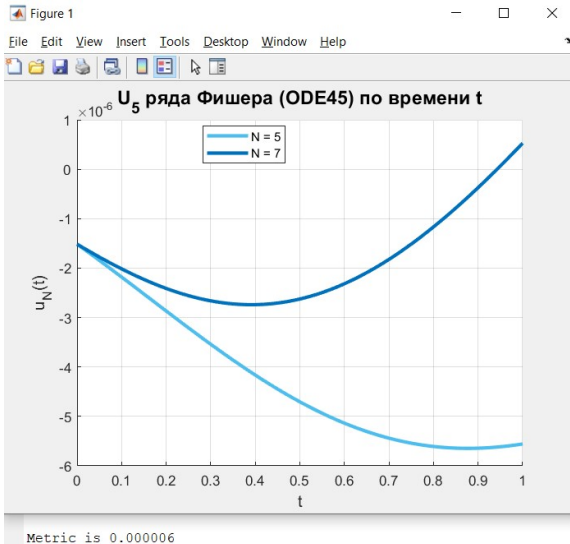
```
%% --- Вычисление метрики ---
```

```
diff = max(abs(u_arr(:,1) - u_arr(:,2)));  
fprintf('Metric is %.6f\n', diff);
```

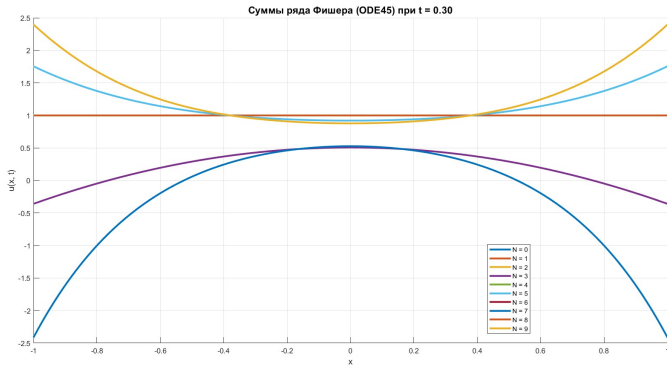
```
%% --- Оформление графика ---
```

```
legend(arrayfun(@(n) sprintf('N = %d', n), elems_comp, 'UniformOutput', false), ...  
        'Location', 'best');  
title('Члены ряда Фишера (ODE45) по времени t', 'FontSize', 14);  
xlabel('t', 'FontSize', 12);  
ylabel('u_{N}(t)', 'FontSize', 12);  
grid on;  
hold off;
```

Пример подсчёта точности



Пример когда метод работает $u(x, 0) = e^{-x^2}$, $D = 1$



Пример когда решения скорее всего не существует
решения $u(x, 0) = e^{-x^2}, D = 3$

