

Семинар научно-учебной группы

«Нижегородские эволюционисты»

Нижний Новгород, Россия, 6 ноября 2025 года

Исследование точности решения
уравнения Бюргерса методом
обрыва степенного ряда

М.А. Писарев

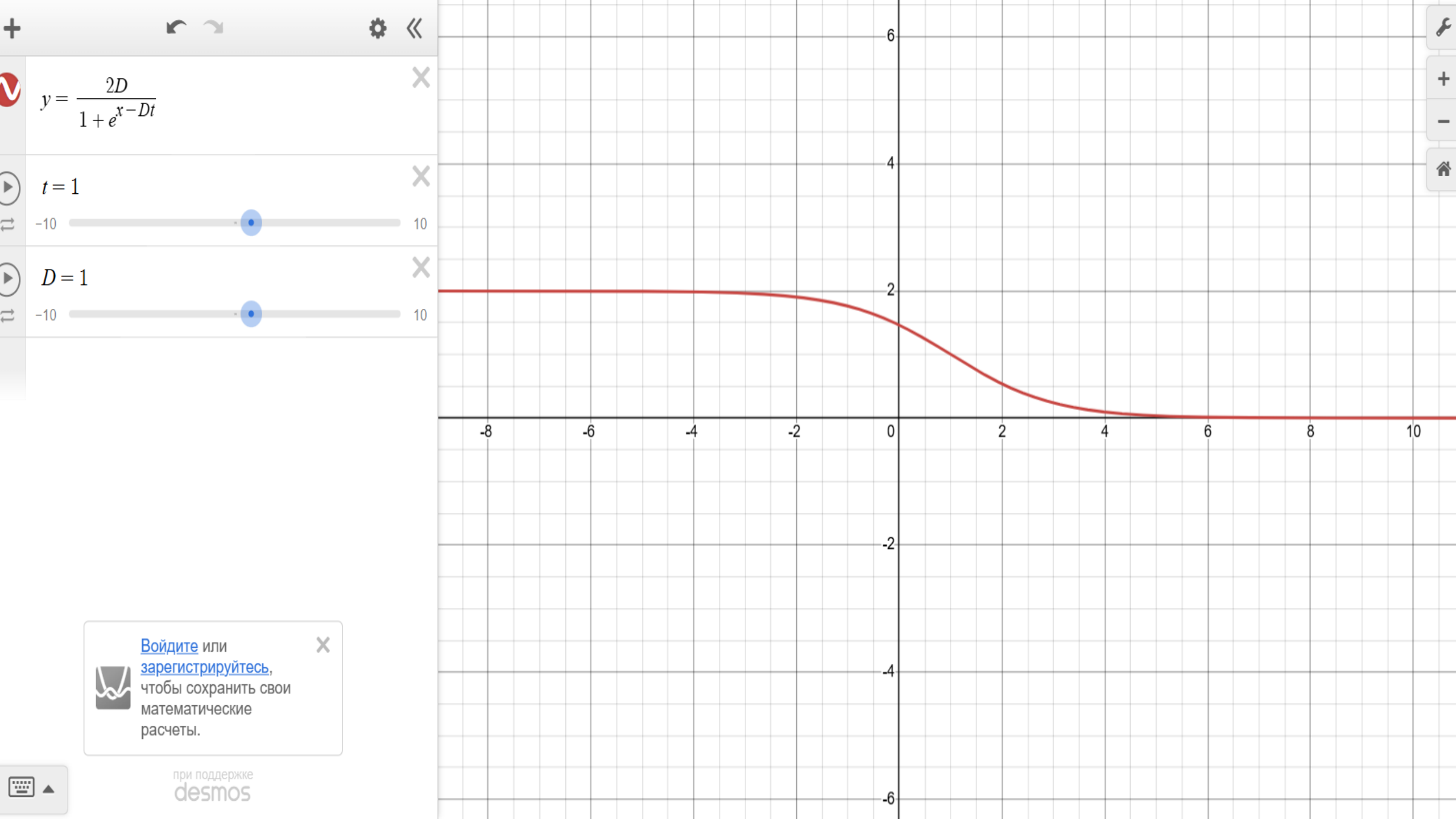
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

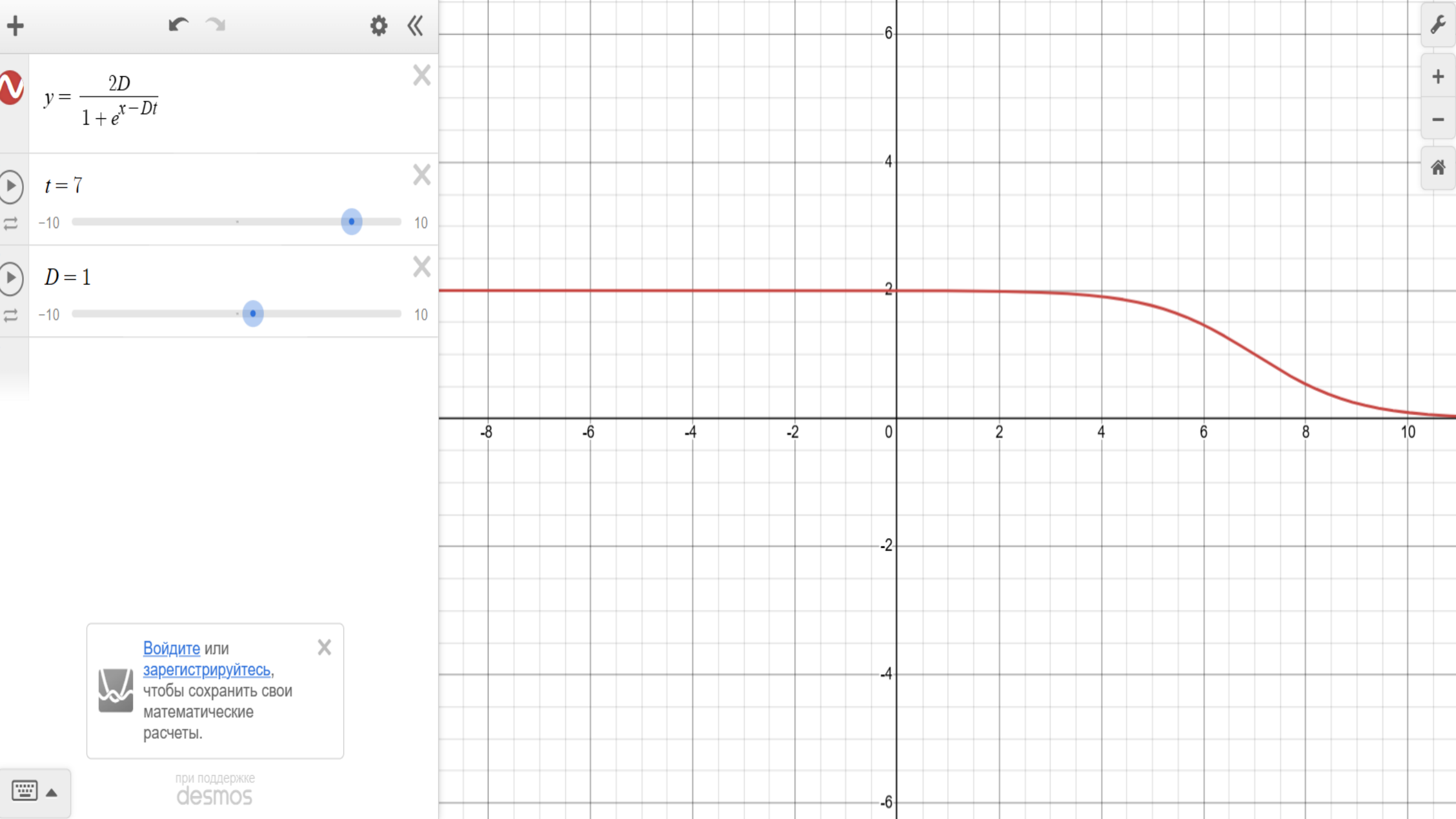
История создания уравнения

- $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

Решение Бэйтмана (1915)

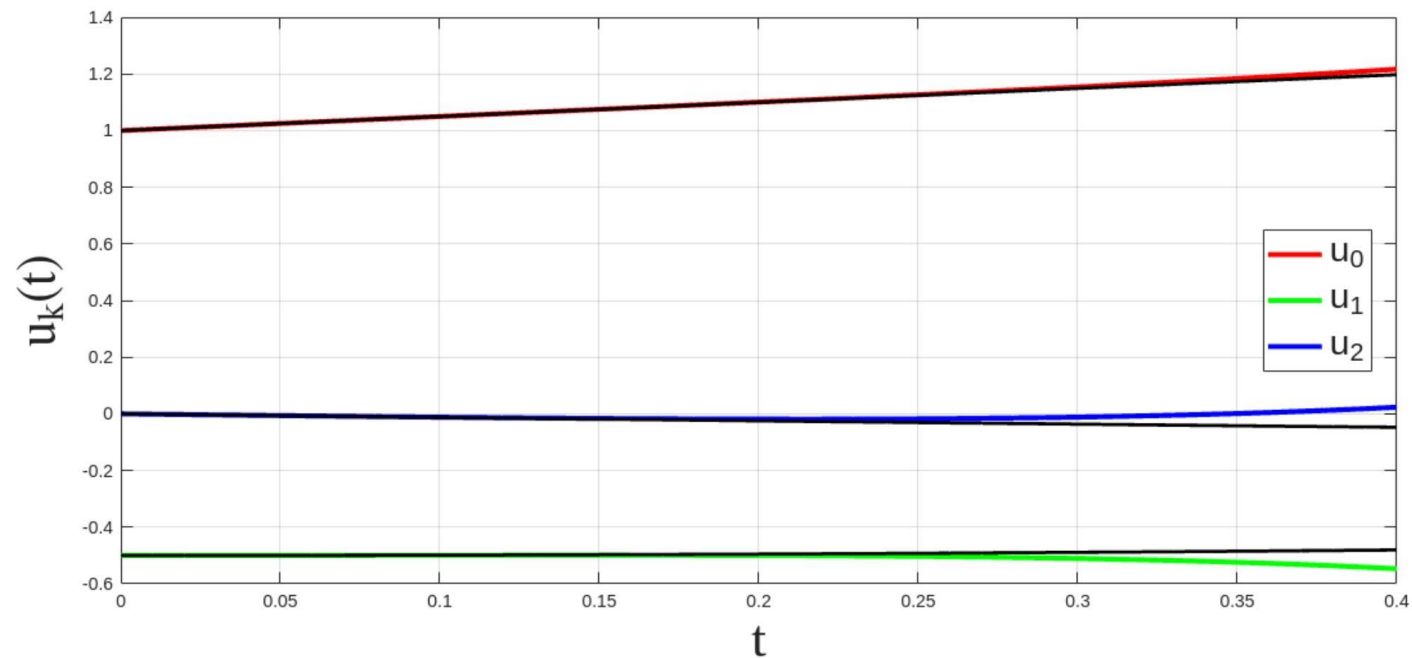
- $$u(x, t) = \frac{2D}{1 + e^{x-Dt}}$$



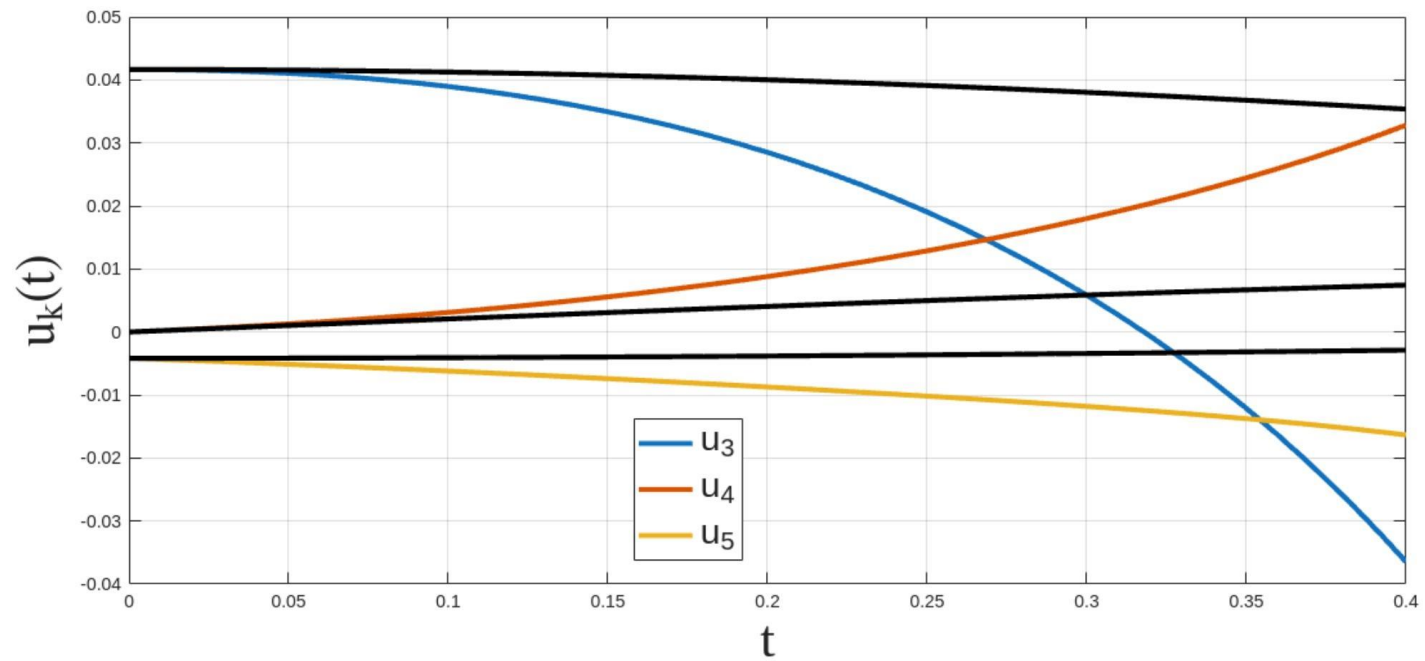


Сравнение численных решений с
точными для системы из $N=6$
уравнений

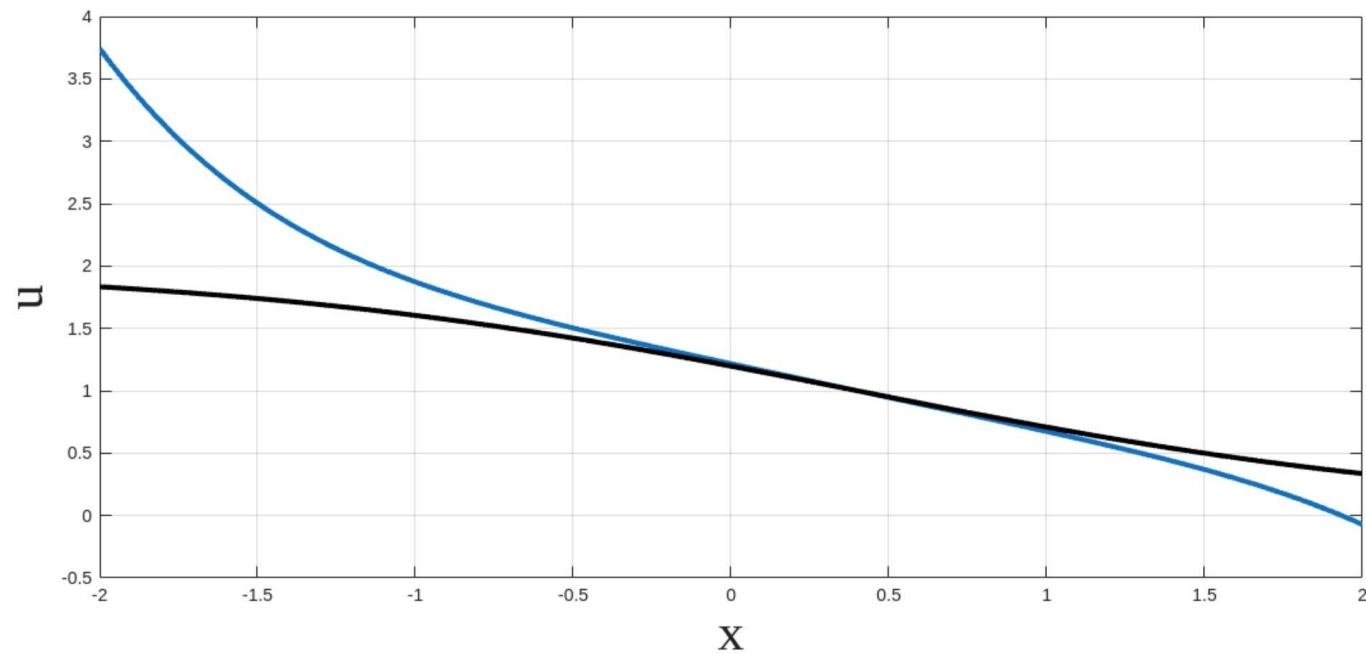
Сравнение поведения коэффициентов u_0 - u_2



Сравнение поведения коэффициентов u_3 - u_5

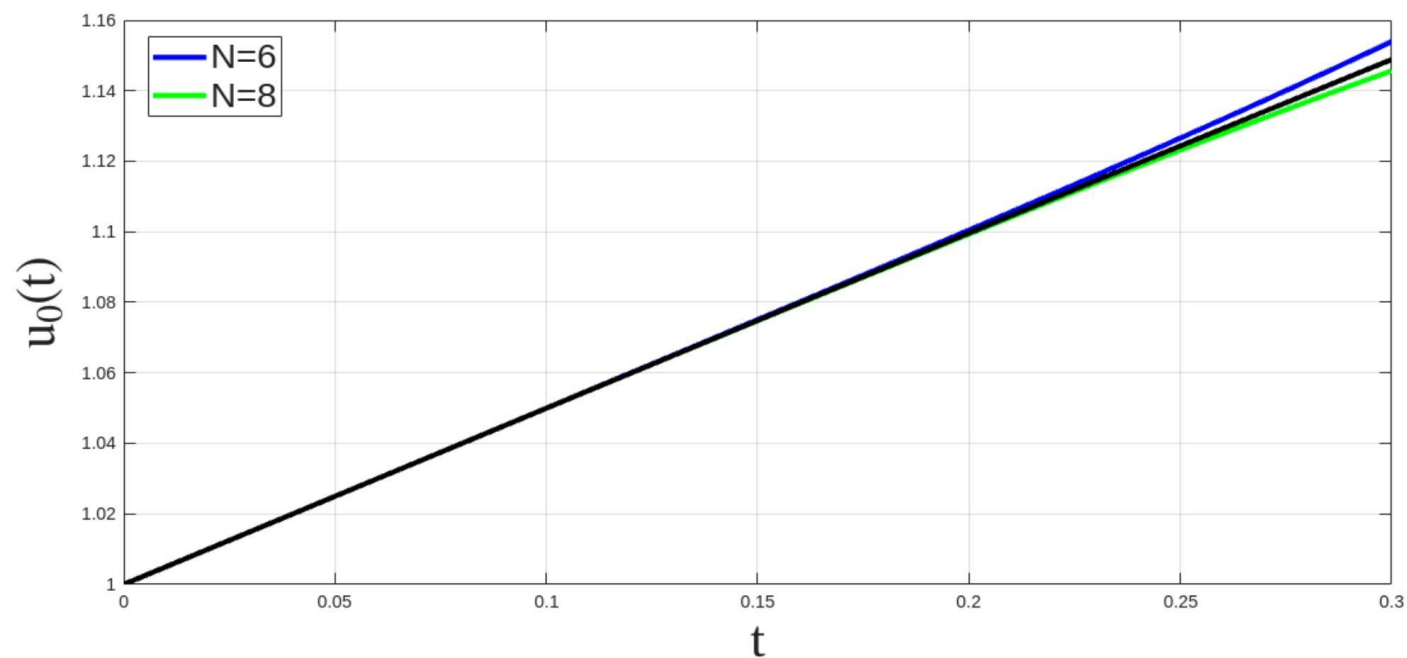


Поведение итогового решения $u(x,t)$ при фиксированном времени $T=0,4$

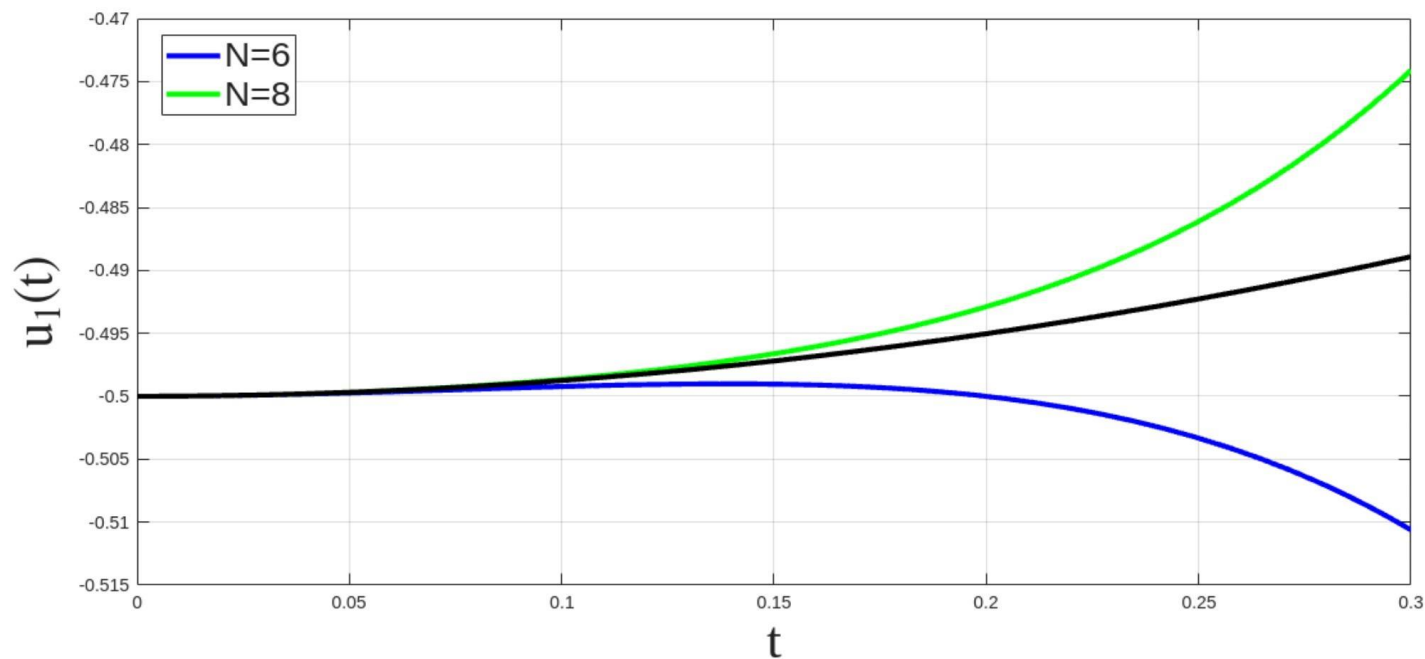


Сравнение численных решений с
точными для систем из $N=6$ и $N=8$
уравнений

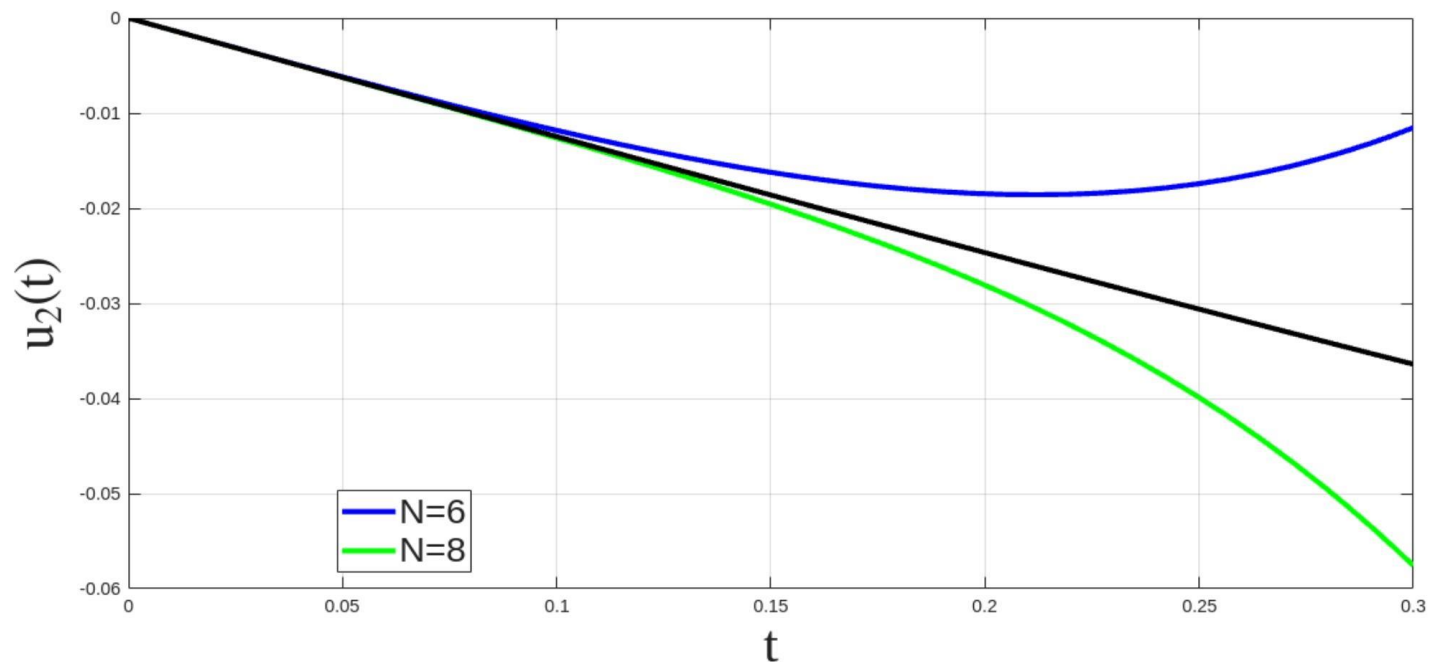
Сравнение поведения u_0 для систем из 6 и 8 уравнений



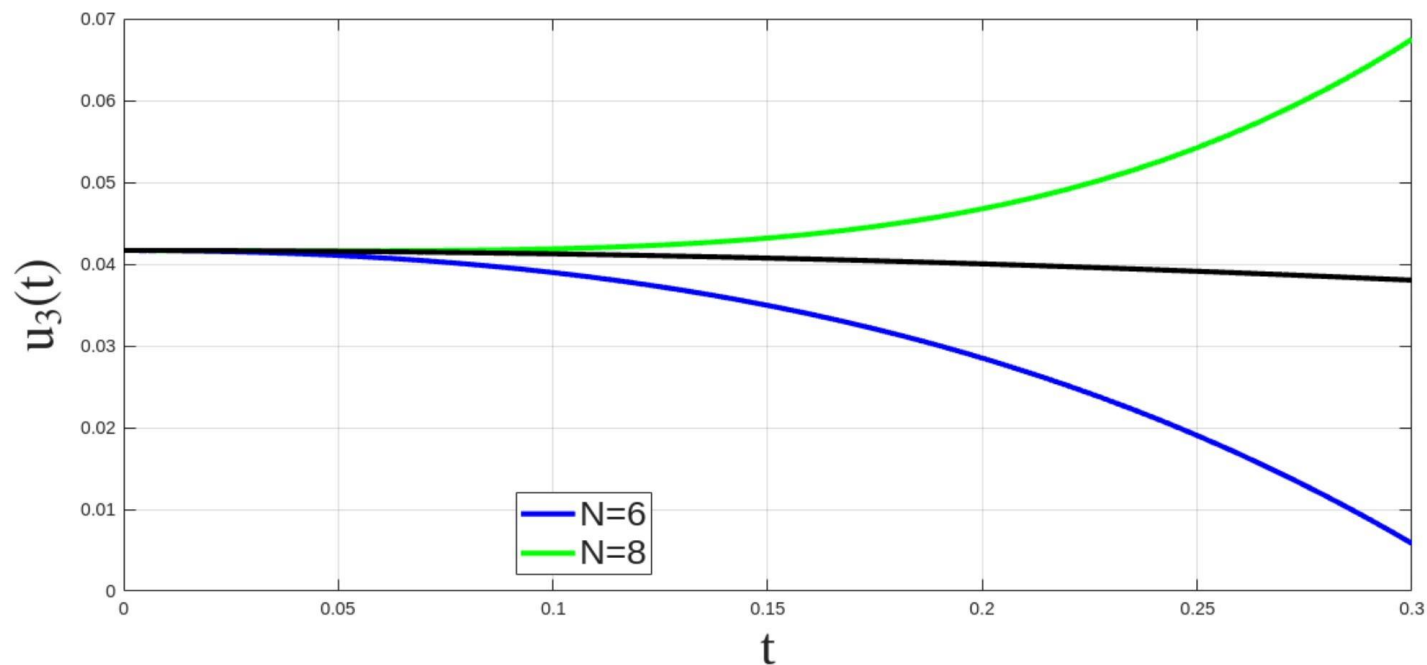
Сравнение поведения u_1 для систем из 6 и 8 уравнений



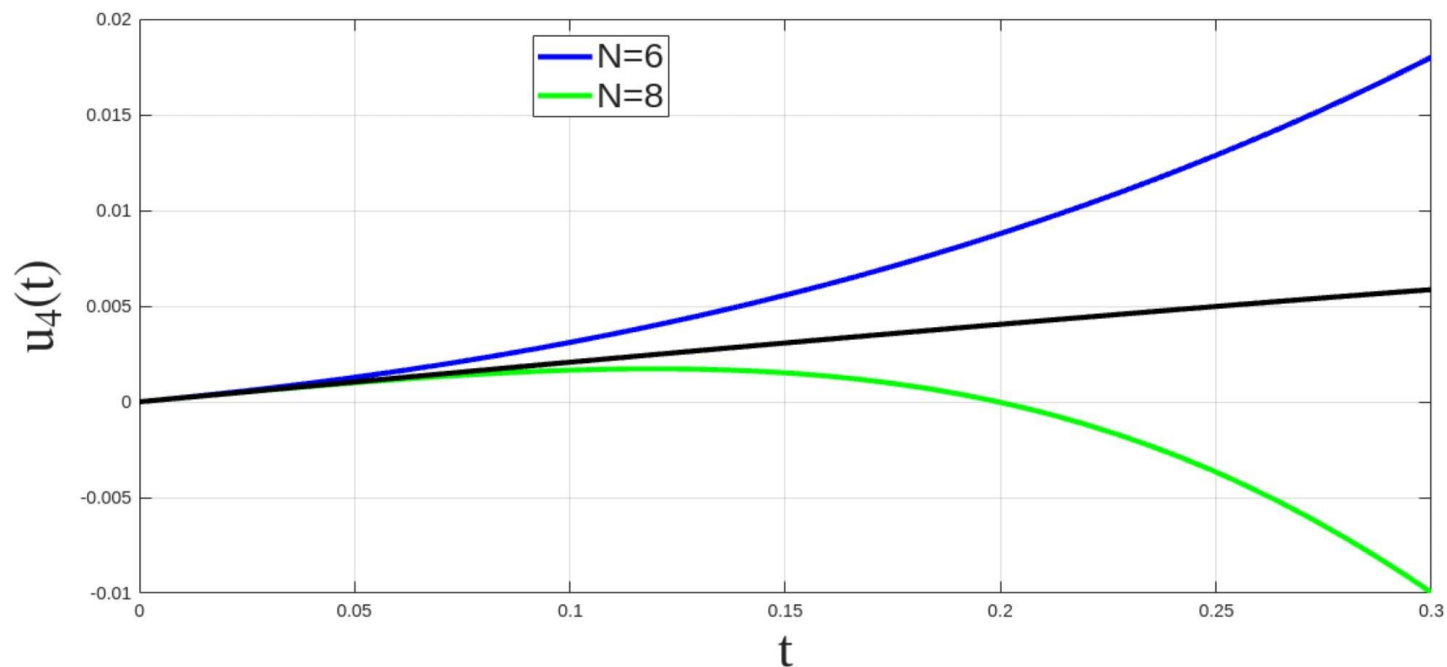
Сравнение поведения u_2 для систем из 6 и 8 уравнений



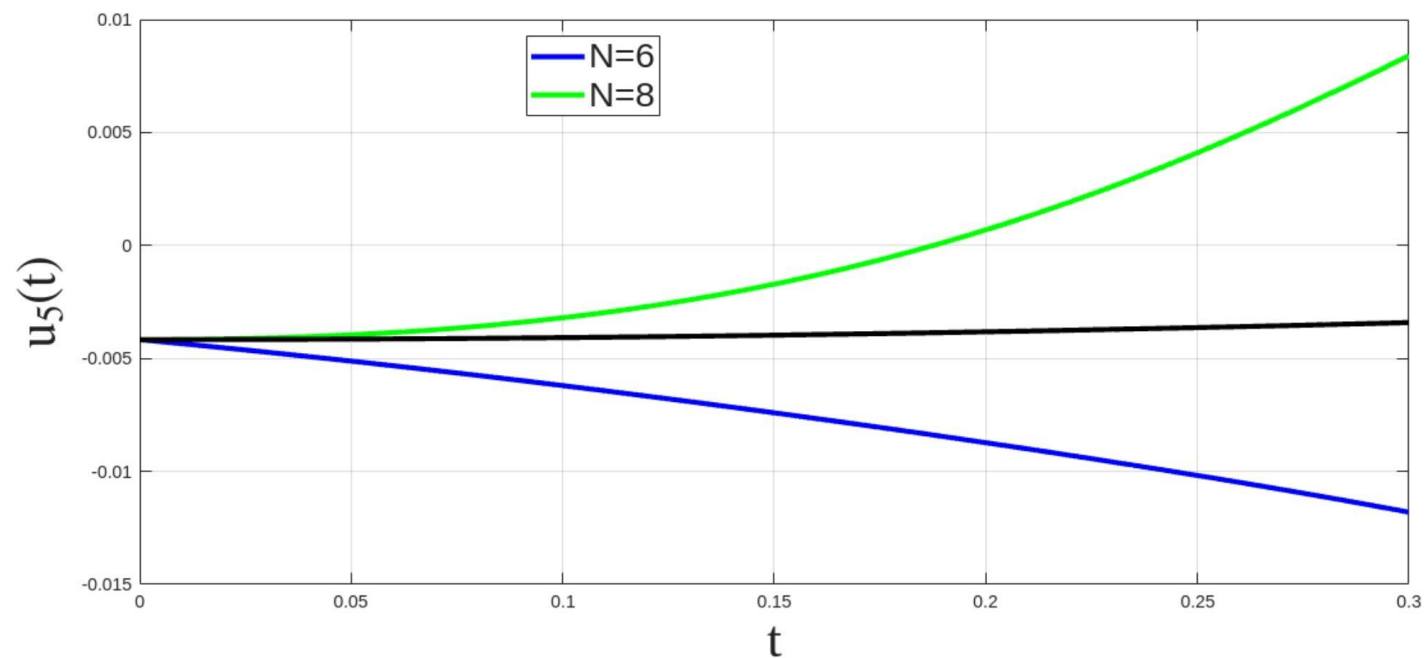
Сравнение поведения u_3 для систем из 6 и 8 уравнений



Сравнение поведения u_4 для систем из 6 и 8 уравнений

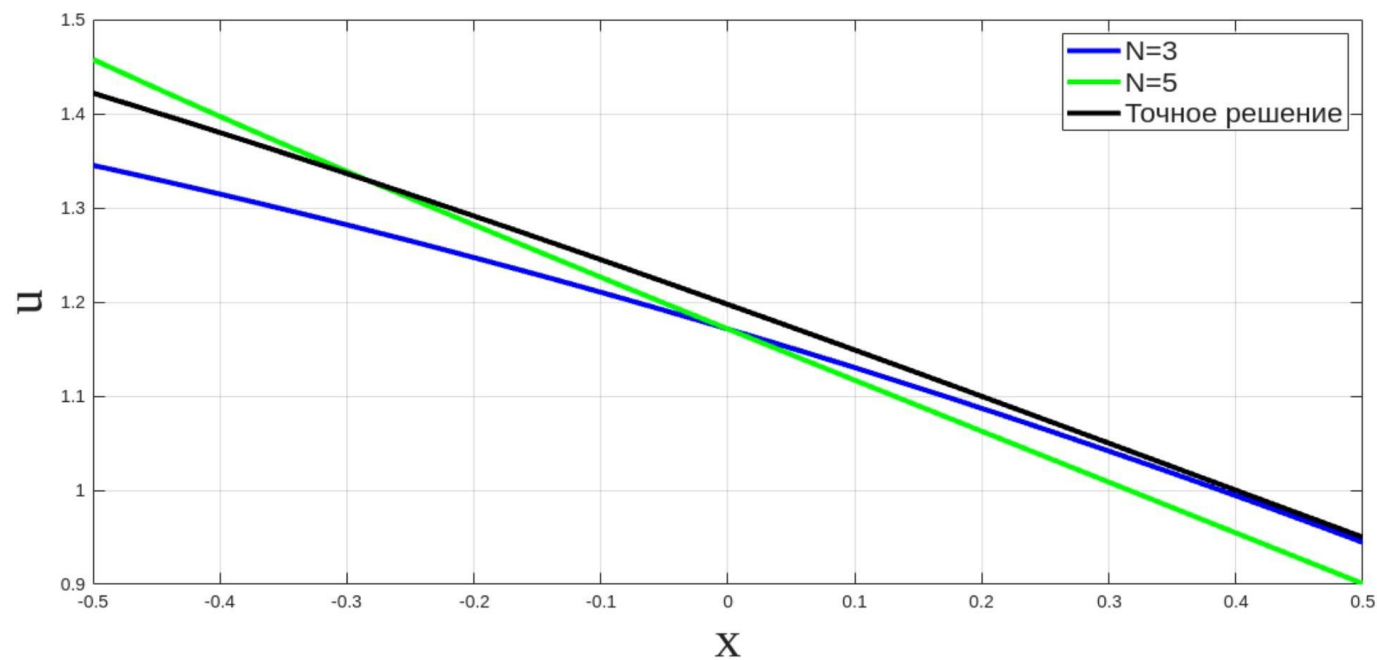


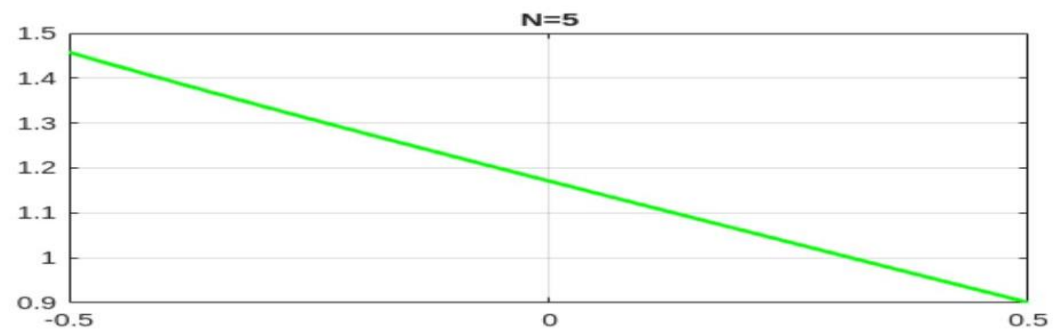
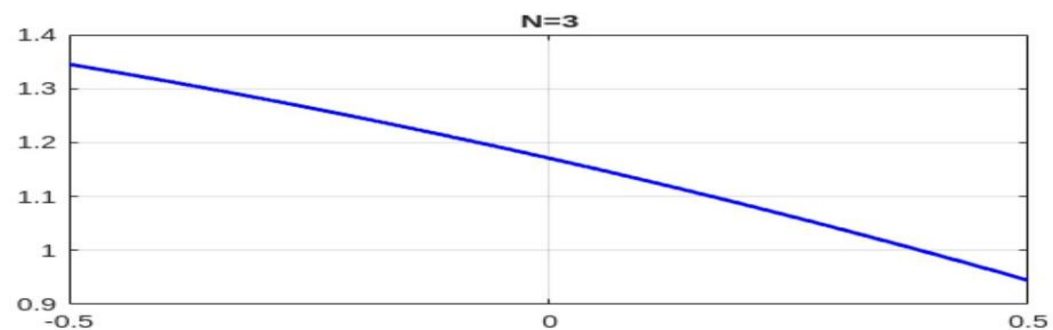
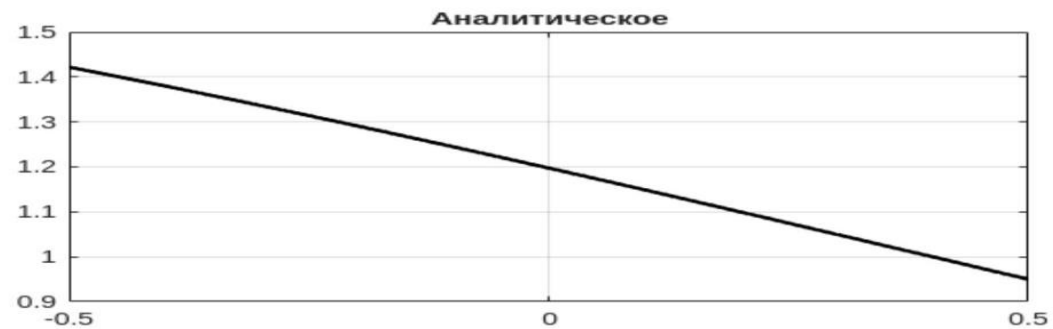
Сравнение поведения u_5 для систем из 6 и 8 уравнений



Метрика качества для исследования поведения систем высоких порядков

Сравнение полиномов степени $N=3$ и $N=5$ с точным решением





Максимальная ошибка для N=3: 0.076707

Максимальная ошибка для N=5: 0.049368

Улучшение в 1.55 раз

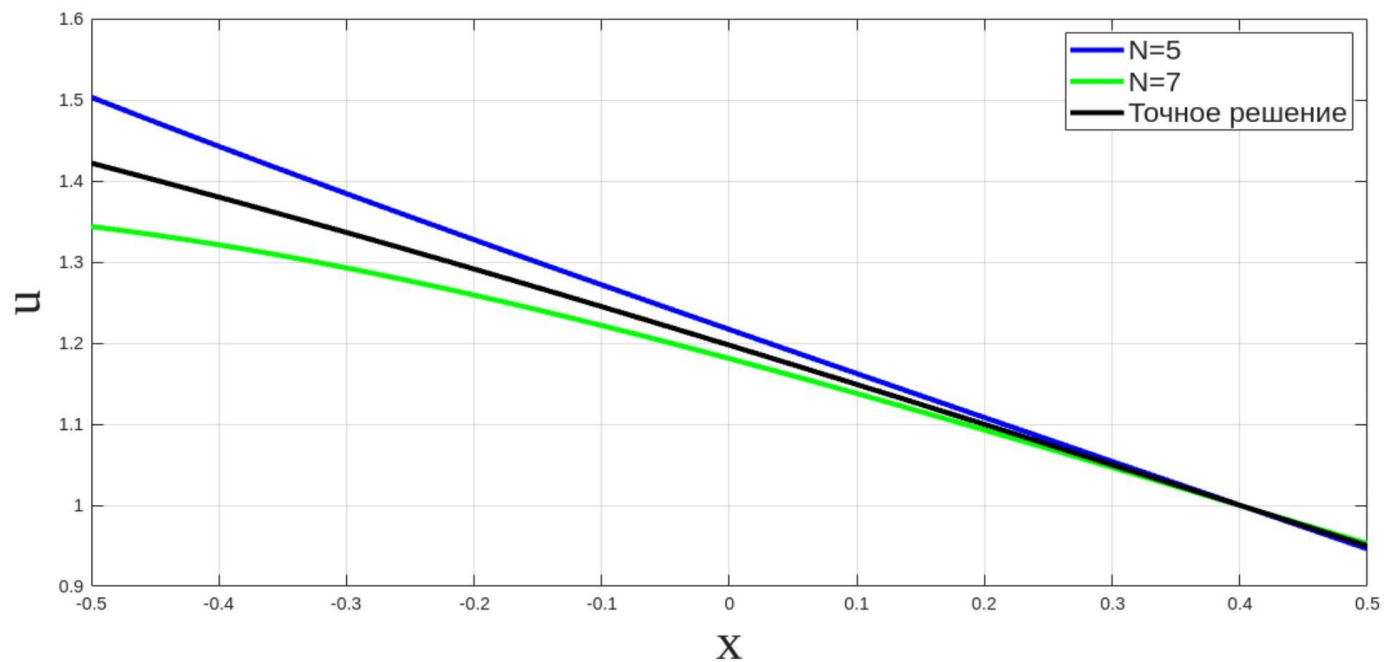
=== ПРОВЕРКА МАСШТАБОВ ===

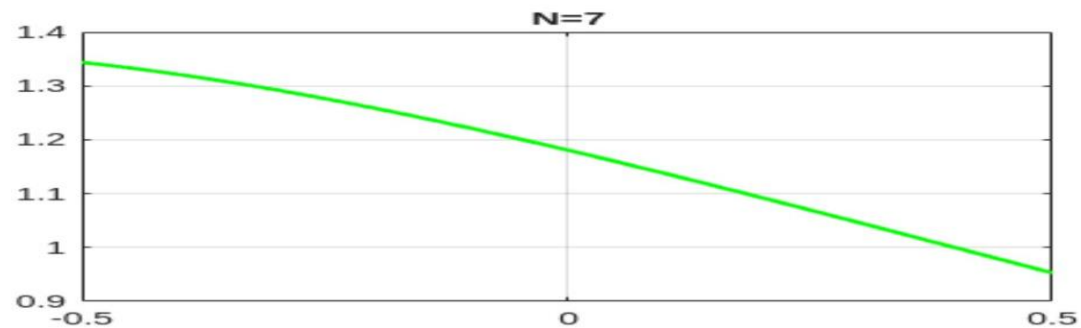
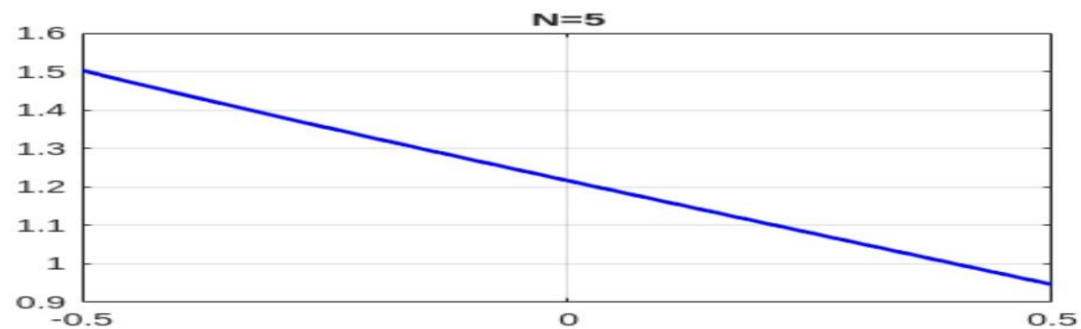
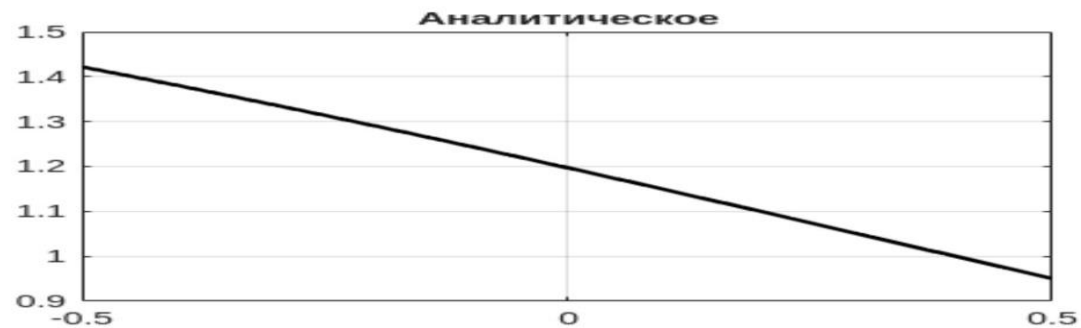
Аналитическое решение: min=0.950042, max=1.421899

N=3: min=0.944532, max=1.345192

N=5: min=0.900673, max=1.457685

Сравнение полиномов степени $N=5$ и $N=7$ с точным решением





Максимальная ошибка для N=5: 0.081308

Максимальная ошибка для N=7: 0.078277

Улучшение в 1.04 раз

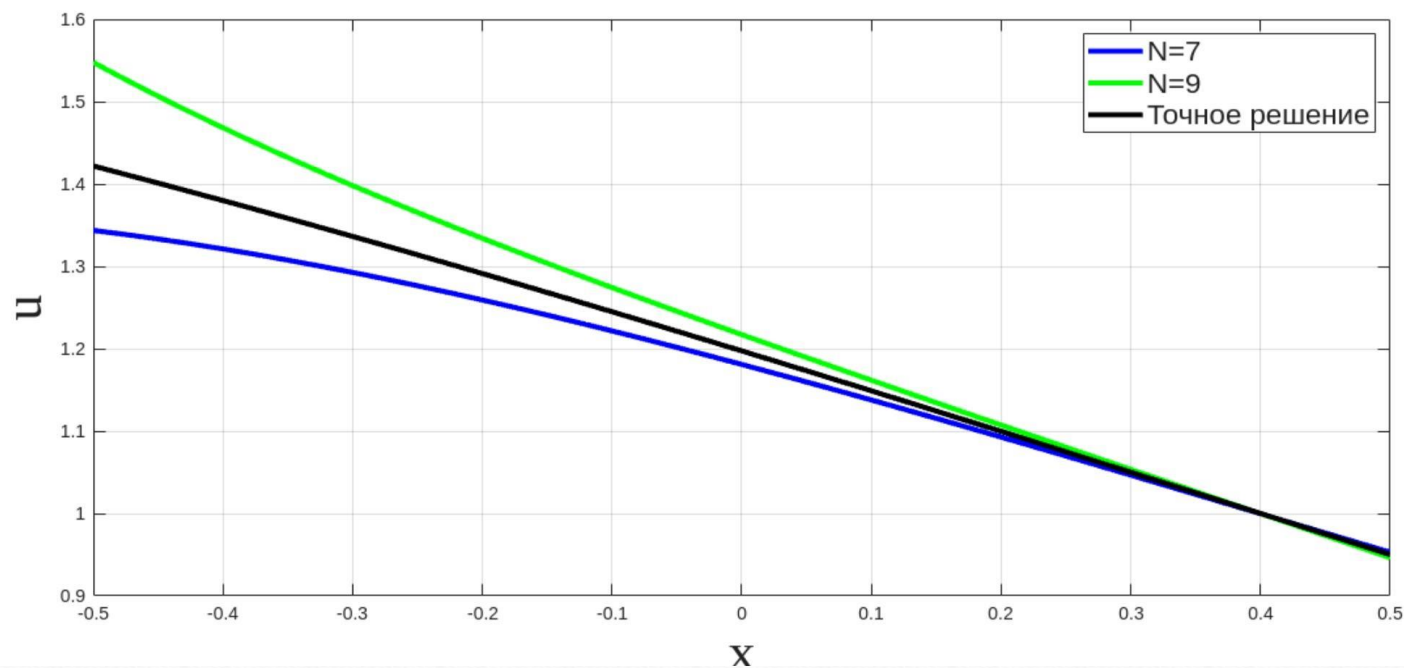
=== ПРОВЕРКА МАСШТАБОВ ===

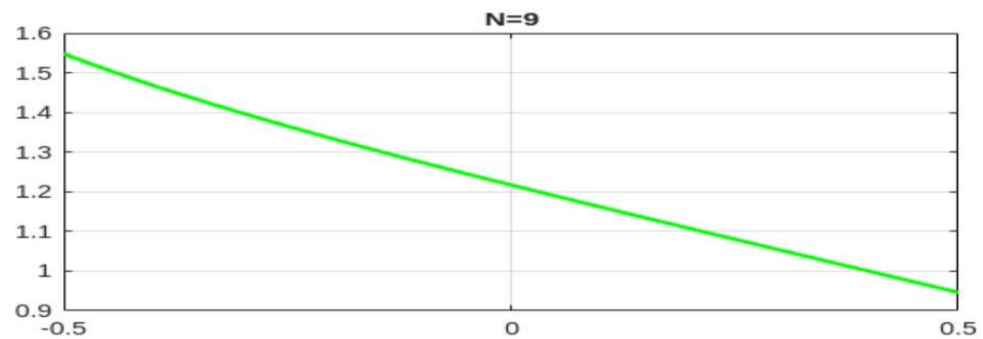
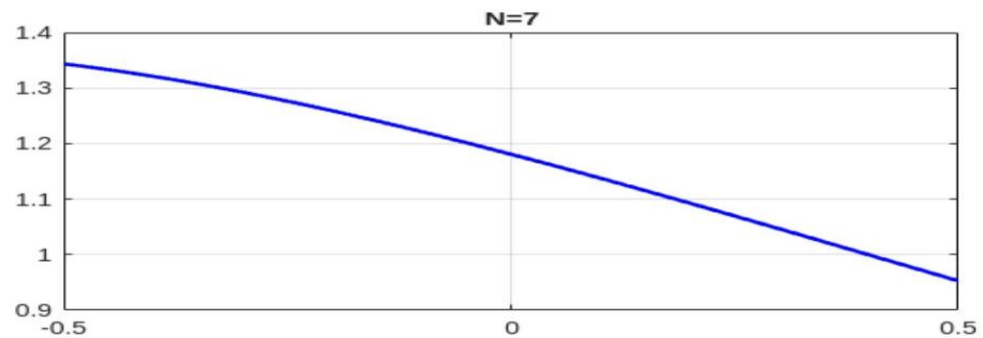
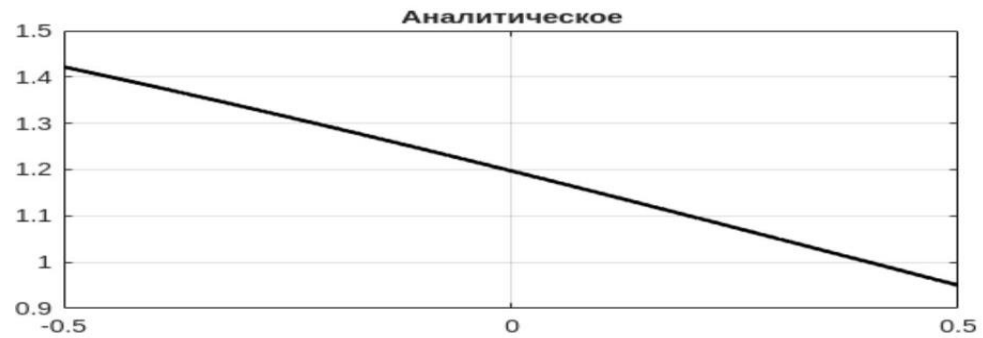
Аналитическое решение: min=0.950042, max=1.421899

N=5: min=0.946196, max=1.503207

N=7: min=0.952881, max=1.343623

Сравнение полиномов степени $N=7$ и $N=9$ с точным решением





Максимальная ошибка для N=7: 0.078277

Максимальная ошибка для N=9: 0.125817

Улучшение в 0.62 раз

=== ПРОВЕРКА МАСШТАБОВ ===

Аналитическое решение: min=0.950042, max=1.421899

N=7: min=0.952881, max=1.343623

N=9: min=0.946156, max=1.547716

Метрика сравнения для разных порядков систем ОДУ

Степень полинома, N	Сравнение метрики $\max p_1 - p_2 $ на отрезке
3 и 5	Улучшение в 1,55 раз
5 и 7	Улучшение в 1,04 раза
7 и 9	Ухудшение в 1,61 раз

ВЫВОДЫ

- Метод обрыва степенного ряда для уравнения Бюргерса работает лучше в зависимости от порядка полинома аппроксимации, по крайней мере до 7 порядка включительно, так как проверено и доказано на рисунках, построенных в MATLAB.
- Метод обрыва степенного ряда для уравнения Бюргерса при переходе к системам от 8 к 10 уравнениям показывает ухудшение качества аппроксимации.
- Это может быть связано как с выбранным точным решением (решение Бейтмана), так и с характером поведения данного метода с конкретным уравнением.

Перспектива дальнейших исследований

- Проверка поведения метода обрыва степенного ряда в математической среде программирования MATLAB для более высоких порядков систем (12, 14 и т.д.).
- Соответствующий вывод о корреляции повышения порядка системы и качества аппроксимации.
- В случае получения неудовлетворительного результата подобрать другое точное решение, отличное от решения Бейтмана, и провести аналогичное исследование уже для другого решения.

Список литературы

- Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии (дата обращения: 10.03.2025).
- Уравнение Бюргерса // Википедия URL:
https://ru.m.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%91%D1%8E%D1%80%D0%B3%D0%B5%D1%80%D1%81%D0%B0 (дата обращения: 06.04.2025).
- Бюргерс, Иоханнес Мартинус // Википедия URL:
https://ru.m.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D1%8E%D1%80%D0%B3%D0%B5%D1%80%D1%81_%D0%98%D0%BE%D1%85%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B5%D1%81_%D0%9C%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%B8%D0%BD%D1%83%D1%81 (дата обращения: 06.04.2025).

Благодарю за внимание!