Исследование точности решения SIS-модели методом обрыва степенного ряда

Подолин Д. А.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Исходная система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + V\frac{\partial S}{\partial x} = -\beta SI + \gamma I \\ \frac{\partial I}{\partial t} + U\frac{\partial I}{\partial x} = \beta SI - \gamma I \end{cases}$$

Безразмерная форма (нормировка):

$$\bar{S} = \frac{\beta S}{\gamma}, \quad \bar{I} = \frac{\beta I}{\gamma}, \quad \bar{t} = \gamma t, \quad \bar{x} = \frac{\gamma x}{V}$$

Нормированная система:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{x}} = -\bar{S}\bar{I} + \bar{I} \\ \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{t}} + \bar{U}\frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{x}} = \bar{S}\bar{I} - \bar{I} \end{cases}, \quad \bar{U} = \frac{U}{V} < 1$$

Введение

- SIS-модель описывает динамику инфекций с повторным заражением:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{x}} = -\bar{S}\bar{I} + \bar{I} \\ \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{t}} + \bar{U}\frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{x}} = \bar{S}\bar{I} - \bar{I} \end{cases}, \quad \bar{U} = \frac{U}{V} < 1$$

- Особенность: миграция с разными скоростями ($U < 1$).
- Проблема: отсутствие точных решений для произвольных начальных данных.

Метод обрыва степенного ряда

Основная идея

Решение ищется в виде:

$$S(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(t)x^k, \quad I(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(t)x^k.$$

Ряд обрывается на члене N, что приводит к конечной системе ОДУ.

Преимущества:

- Универсальность для нелинейных уравнений
- Простота численной реализации

Вывод системы ОДУ

1. Подставляем ряды в уравнения:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dot{S}_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) S_{k+1} x^k = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} S_n I_{k-n} \right) x^k + \sum_{k=0}^{\infty} I_k x^k.$$

2. Приравниваем коэффициенты при x^k:

$$\dot{S}_k = -(k+1) S_{k+1} + I_k - \sum_{n=0}^{k} S_n I_{k-n}.$$

3. Обрыв при $N = 2$:

$$\begin{cases} \dot{S}_0 = -S_1 - S_0 I_0 + I_0, \\ \dot{S}_1 = -2S_2 - S_0 I_1 - S_1 I_0 + I_1. \end{cases}$$

Сравнение с решением Бермана

Точное решение

Для специальных начальных данных:

$$I = (1 - U)\frac{f'(\eta)}{f(\eta) + g(\xi)}$$

$$S = U + (1 - U)\frac{g'(\xi)}{f(q) + g(\xi)}$$

Решение в виде волновых переменных:

$$\xi = x - t$$
$$\nu = x - Ut$$

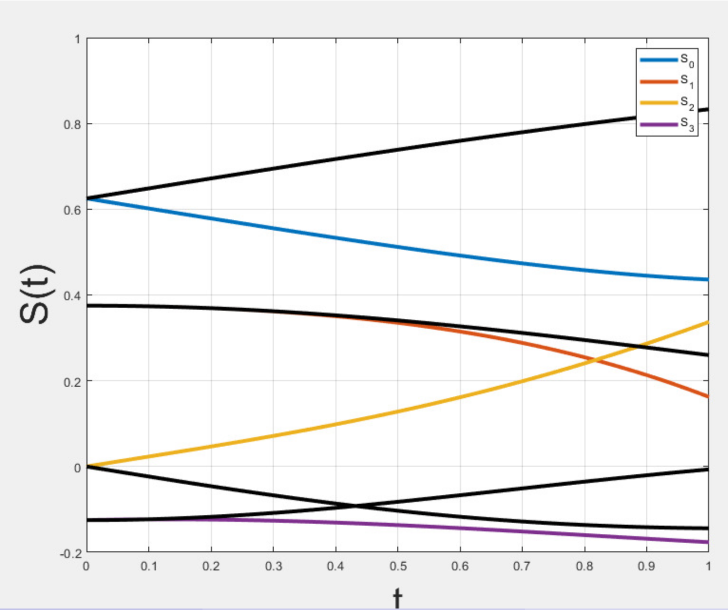
где:

$$f(\eta) = e^{\eta} = e^{x-Ut} \quad (1)$$
$$g(\xi) = e^{-\xi} = e^{-(x-t)} \quad (2)$$

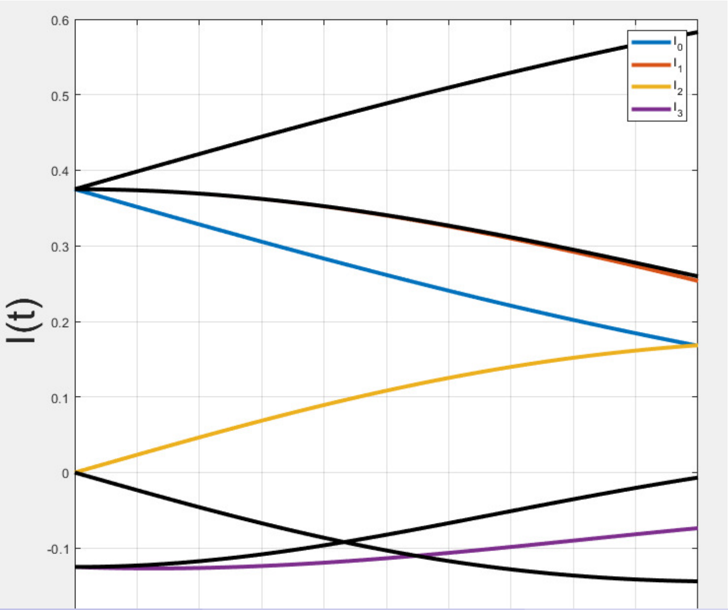
$$I(x,t) = \frac{1-U}{1+e^{-2x+(1+U)t}} \tag{3}$$

$$S(x,t) = U + (1-U)\frac{e^{-2x+(1+U)t}}{1+e^{-2x+(1+U)t}} \tag{4}$$

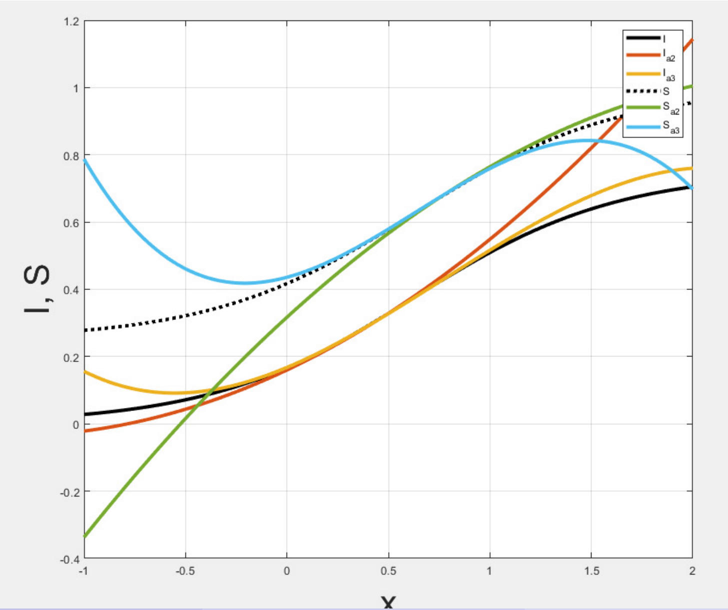
Пространственные распределения



Пространственные распределения



Пространственные распределения



- **Максимальная абсолютная ошибка:**

$$\text{error} = \max(|u_{\text{числ}} - u_{\text{анал}}|)$$

Оценка "худшего случая

- **Среднеквадратичная ошибка (MSE):**

$$\text{MSE} = \text{mean}((u_{\text{числ}} - u_{\text{анал}})^2)$$

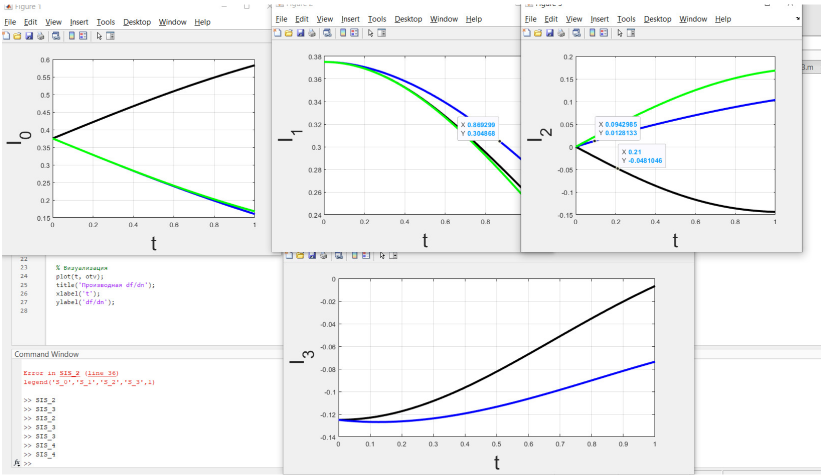
Общая оценка качества аппроксимации

Результаты для пространственных профилей

	N=2	N=3	**Улучшение**
I(x,T)	0.439	0.128	**3.4 раза**
S(x,T)	0.615	0.509	**1.2 раза**
MSE I(x,T)	0.019	0.001	**13.0 раз**
MSE S(x,T)	0.044	0.022	**2.0 раз**

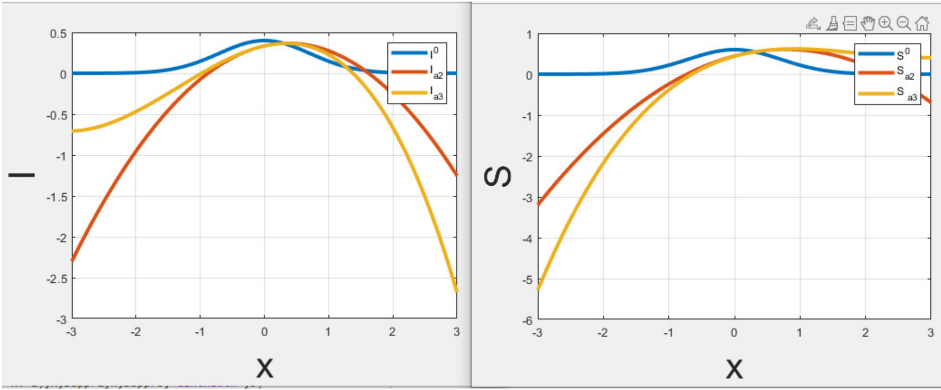
```
=== МЕТРИКИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ ===
I(x,T): N2=0.439204, N3=0.128306, улучшение: 3.42 раз
S(x,T): N2=0.615139, N3=0.509071, улучшение: 1.21 раз
MSE I(x,T): N2=0.018705, N3=0.001435, улучшение: 13.03 ра
MSE S(x,T): N2=0.043561, N3=0.021550, улучшение: 2.02 раз
```

Пространственные распределения



```
=== МЕТРИКИ ТОЧНОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ I(x,t) ===
I0(t): N2=0.422785, N3=0.415110, улучшение: 1.02 раз
I1(t): N2=0.025444, N3=0.006040, улучшение: 4.21 раз
I2(t): N2=0.247443, N3=0.312442, улучшение: 0.79 раз
I3(t): N3=0.066931
Средняя ошибка: N2=0.231891, N3=0.200131, улучшение: 1.16 раз
>>
```

Пространственные распределения



Заключение

- Метод обрыва степенного ряда позволяет получить приближённое решение SIS-модели.
- Погрешность уменьшается с ростом N.
- Метод применим для широкого класса начальных условий.

Заключение

Работа подготовлена в ходе проведения исследования (проект № 25-00-014 «Новый численно аналитический метод решения задач Коши для эволюционных уравнений и систем эволюционных уравнений с квадратичной нелинейностью») в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)»

Спасибо за внимание!