

Семинар научно-учебной группы «Нижегородские
эволюционисты»

Нижний Новгород, Россия, 6 ноября 2025 года

**МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКИ: СИСТЕМА КАРЛЕМАНА**

Бугров В. О.

Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"

Кинетическое уравнение Больцмана (Л. Больцман, 1872)
 $f = f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ — функция распределения одноатомного газа.
 Эффективное сечение рассеяния при столкновениях
 $\vec{p}, \vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}', \vec{p}'_1$:

$$d\sigma = \frac{w(\vec{p}', \vec{p}'_1; \vec{p}, \vec{p}_1)}{|\vec{v} - \vec{v}_1|} dp' dp'_1 \quad (1)$$

Кинетическое уравнение Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \nabla f = Stf \quad (2)$$

Интеграл столкновений:

$$Stf = \int w' (f' f'_1 - f f_1) dp_1 dp' dp'_1 \quad (3)$$

$$w' = w(\vec{p}, \vec{p}_1; \vec{p}', \vec{p}'_1), \quad f' = f(\vec{r}, \vec{p}', t), \quad f_1 = f(\vec{r}, \vec{p}_1, t), \\ f'_1 = f(\vec{r}, \vec{p}'_1, t).$$

Решать кинетическое уравнение (2) с интегралом столкновений (3) очень сложно. Выход из положения — рассмотрение дискретных систем кинетических уравнений.

Годунов С.К., Султангазин У.М. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи математических наук. 1971. Т. 26, вып. 3. С. 3-51.

Простейшая дискретная модель кинетического уравнения Больцмана — система Карлемана:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{w^2 - u^2}{\varepsilon}, & u(x, 0) &= u^0(x), & x &\in \mathbb{R} \\ \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{w^2 - u^2}{\varepsilon}, & u(x, 0) &= u^0(x), & t &> 0.\end{aligned}\quad (4)$$

ε — число Кнудсена.

Карлеман Т. Математические задачи теории газов. М.: Изд-во иностранной литературы, 1960.

Предположения, лежащие в основе системы Карлемана:

система описывает одноатомный разреженный газ,
состоящий из двух групп частиц;

данные группы частиц двигаются вдоль прямой в
противоположных направлениях с единичной скоростью;
взаимодействие частиц происходит внутри одной группы,
т.е. сами с собой, меняя направление движения.

Энтропия одноатомного газа:

$$S[f] = \int f \ln \frac{e}{f} dV dp. \quad (5)$$

Для энтропии справедлива H –теорема Больцмана:

$$\frac{dS}{dt} \geq 0. \quad (6)$$

Для системы Карлемана существует аналог H –теоремы Больцмана:

$$\frac{\partial(u \ln u + w \ln w)}{\partial t} + \frac{\partial(u \ln u - w \ln w)}{\partial x} = -\frac{u^2 - w^2}{\varepsilon} \ln \frac{u}{w} \leq 0 \quad (7)$$

Устранение числа Кнудсена из системы Карлемана

В физически интересных задачах число Кнудсена ε лежит в диапазоне $10^{-3} < \varepsilon < 10^{-1}$. Для проведения численных расчётов его надо из системы (4) устранить.

Заменим в системе (4) неизвестные функции следующим образом:

$$\frac{u}{\varepsilon} \rightarrow u, \quad \frac{w}{\varepsilon} \rightarrow u, \quad (8)$$

тогда система Карлемана (4) сведётся к системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= w^2 - u^2, & u(x, 0) &= u^0(x), & x &\in \mathbb{R} \\ \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} &= u^2 - w^2, & u(x, 0) &= u^0(x), & t &> 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть начальные условия к системе (9) принадлежат к классу вещественноаналитических функций:

$$\begin{aligned} u^0(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k^0 x^k, \\ w^0(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k^0 x^k, \end{aligned} \tag{10}$$

тогда неизвестные функции $u(x, t)$ и $w(x, t)$ также естественно искать в этом же классе:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) x^k, \\ w(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k(t) x^k, \end{aligned} \tag{11}$$

Подстановка рядов (11) в систему (9) приводит к счётномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{u}_k &= -(k+1) u_{k+1} + \sum_{n=0}^k (w_n w_{k-n} - u_n u_{k-n}), \\ \dot{w}_k &= (k+1) w_{k+1} - \sum_{n=0}^k (w_n w_{k-n} - u_n u_{k-n}),\end{aligned}\quad (12)$$

где точка означает дифференцирование по времени.

Система (12) должна быть снабжена начальными условиями:

$$u_k(0) = u_k^0, \quad w_k(0) = w_k^0, \quad (13)$$

которые получаются из сравнения рядов (10) и (11).

Покомпонентная запись счётномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (12):

$$\begin{aligned}\dot{u}_0 &= -u_1 + w_0^2 - u_0^2, \\ \dot{w}_0 &= w_1 - w_0^2 + u_0^2, \\ \dot{u}_1 &= -2u_2 + 2w_0w_1 - 2u_0u_1, \\ \dot{w}_1 &= 2w_2 - 2w_0w_1 + 2u_0u_1, \\ \dot{u}_2 &= -3u_3 + 2w_0w_2 + w_1^2 - 2u_0u_2 - u_1^2, \\ \dot{w}_2 &= 3w_3 - 2w_0w_2 - w_1^2 + 2u_0u_2 + u_1^2, \\ &\dots\end{aligned}\tag{14}$$

Покомпонентная запись счётномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (12):

$$\begin{aligned}\dot{u}_0 &= -u_1 + w_0^2 - u_0^2, \\ \dot{w}_0 &= w_1 - w_0^2 + u_0^2, \\ \dot{u}_1 &= -2u_2 + 2w_0w_1 - 2u_0u_1, \\ \dot{w}_1 &= 2w_2 - 2w_0w_1 + 2u_0u_1, \\ \dot{u}_2 &= -3u_3 + 2w_0w_2 + w_1^2 - 2u_0u_2 - u_1^2, \\ \dot{w}_2 &= 3w_3 - 2w_0w_2 - w_1^2 + 2u_0u_2 + u_1^2, \\ &\dots\end{aligned}\tag{15}$$

Метод обрыва степенного ряда

Укороченная система при $N = 2$:

$$\begin{aligned}\dot{u}_0 &= -u_1 + w_0^2 - u_0^2, \\ \dot{w}_0 &= w_1 - w_0^2 + u_0^2, \\ \dot{u}_1 &= -2u_2 + 2w_0w_1 - 2u_0u_1, \\ \dot{w}_1 &= 2w_2 - 2w_0w_1 + 2u_0u_1, \\ \dot{u}_2 &= 2w_0w_2 + w_1^2 - 2u_0u_2 - u_1^2, \\ \dot{w}_2 &= -2w_0w_2 - w_1^2 + 2u_0u_2 + u_1^2.\end{aligned}\tag{16}$$

Для проверки точности метода обрыва степенного ряда в данном случае необходимо точное решение системы Карлемана

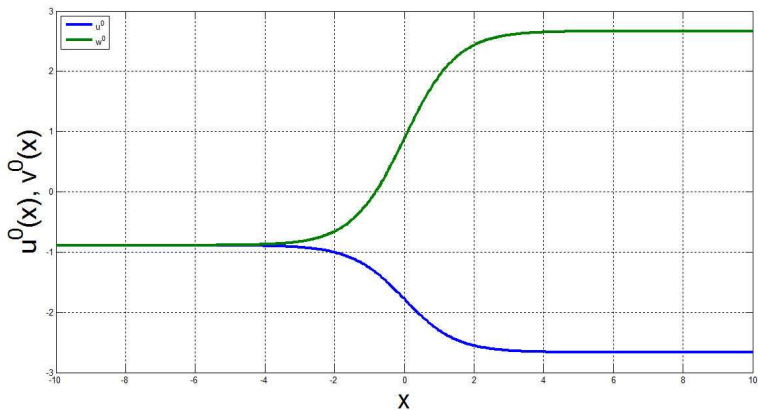
Решение Духновского:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= -\frac{4}{3} \left(\frac{1}{3} \frac{3 \exp \varphi(x, t) - 1}{\exp \varphi(x, t) + 1} + 1 \right) \\w(x, t) &= \frac{8}{9} \frac{3 \exp \varphi(x, t) - 1}{\exp \varphi(x, t) + 1} \\ \varphi(x, t) &= \frac{4}{3} x + 4 t - 4 A\end{aligned}\tag{17}$$

A — произвольная вещественная постоянная.

Духновский С.А. Решения системы Карлемана через разложение Пенлеве // Владикавказский математический журнал. 2020. Т. 22, вып. 4. С. 58-67.

Графики функций $u(x, 0)$ и $w(x, 0)$ при $A = 0$



Эти профили нефизичны, потому что их значения заходят в отрицательную область.

Тем не менее, по решению (17) системы Карлемана можно получить все точные решения счётномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (12) по формулам (формулы Тейлора):

$$u_k(t) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k} \Big|_{x=0}, \quad (18)$$

$$w_k(t) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k w(x, t)}{\partial x^k} \Big|_{x=0}. \quad (19)$$

$$u_0(t) = -\frac{8}{9} \frac{e^{4A} + 3e^{4t}}{e^{4A} + e^{4t}},$$

$$u_1(t) = -\frac{64}{27} \frac{e^{4A+4t}}{(e^{4A} + e^{4t})^2}, \quad (20)$$

$$u_2(t) = \frac{128}{81} \frac{e^{4A+4t} (e^{4t} - e^{4A})}{(e^{4A} + e^{4t})^3}$$

$$w_0(t) = \frac{8}{3} \frac{3e^{4t} - e^{4A}}{e^{4A} + e^{4t}},$$

$$w_1(t) = \frac{128}{9} \frac{e^{4A+4t}}{(e^{4A} + e^{4t})^2}, \quad (21)$$

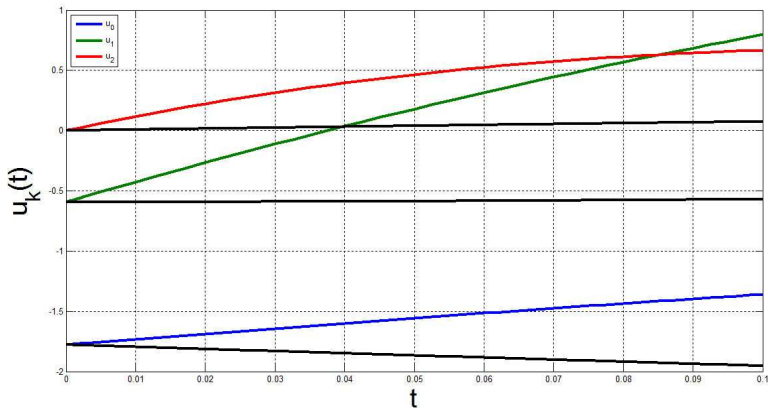
$$w_2(t) = -\frac{256}{27} \frac{e^{4A+4t} (e^{4t} - e^{4A})}{(e^{4A} + e^{4t})^3}.$$

Начальные условия для укороченной системы (16):

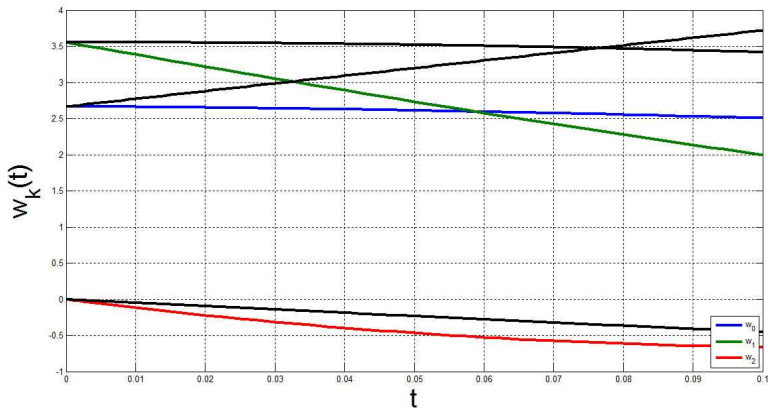
$$\begin{aligned}u_0^0 &= -\frac{8}{9} \frac{e^{4A} + 3}{e^{4A} + 1}, \\u_1^0 &= -\frac{64}{27} \frac{e^{4A}}{(e^{4A} + 1)^2}, \\u_2^0 &= \frac{128}{81} \frac{e^{4A} (1 - e^{4A})}{(e^{4A} + 1)^3},\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}w_0^0 &= \frac{8}{3} \frac{3 - e^{4A}}{e^{4A} + 1}, \\w_1^0 &= \frac{128}{9} \frac{e^{4A}}{(e^{4A} + 1)^2}, \\w_2^0 &= -\frac{256}{27} \frac{e^{4A} (1 - e^{4A})}{(e^{4A} + 1)^3}.\end{aligned}\tag{23}$$

Графики численного решения с помощью системы Matlab
укороченной системы (16) с начальными условиями (22) и (23)
при $A = 0$



Графики численного решения с помощью системы Matlab
укороченной системы (16) с начальными условиями (22) и (23)
при $A = 0$



Из графиков видно, что согласие, вообще говоря, неудовлетворительное.

Удовлетворительное согласие имеется только для функции $w_2(t)$.

Получены следующие результаты:

методом обрыва степенного ряда получено численное решение системы Карлемана для $N = 2$ (квадратичная аппроксимация);

выяснено, что точность полученного решения неудовлетворительна, и надо повышать порядок аппроксимации N .

**БЛАГОДАРЮ
ЗА
ВНИМАНИЕ!**