5 класс

Задание 1

Известно, что в ребусе ШКОЛА = 25 разные буквы заменяются разными цифрами, причём цифры 2 и 5 уже использованы в правой части равенства. Поставьте один знак минус (−) между некоторыми буквами слева так, чтобы получилось верное числовое равенство. Приведите пример такого равенства.

ОТВЕТ: например, 109-84=25, 103-78=25, 104-79=25

Задание 2

В студенческом клубе участники готовятся к интеллектуальному турниру. Каждый студент изучил по три темы, при этом каждую тему освоили четыре разных студента. Любые две темы одновременно изучил ровно один студент. Сколько всего тем будет на турнире и сколько студентов в клубе?

РЕШЕНИЕ:

Пусть:

- t — количество тем,
- s — количество студентов.

1. Подсчитаем общее число изучений «студент–тема» двумя способами:
   - Каждый студент изучил 3 темы: всего изучений $3s$.
   - Каждую тему освоили 4 студента: всего изучений $4t$.

Приравниваем: $3s = 4t \Rightarrow s = \frac{4}{3}t$.

2. Условие про пары тем:

Любые две темы одновременно изучил ровно один студент.

Число пар тем: $\frac{t(t-1)}{2}$.

Каждый студент изучил 3 темы → у него число пар тем, которые он изучил: 3.

Все студенты вместе дают $3s$ пар «тематических пар».

Но каждая пара тем встречается ровно у одного студента, поэтому: $3s = \frac{t(t-1)}{2}$.

3. Подставляем $s = \frac{4}{3}t$: $3 \cdot \frac{4}{3}t = \frac{t(t-1)}{2} \Rightarrow t = 9$.

Тогда $s = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12$.

Данную задачу можно решить при помощи графа

Ответ: 9 тем и 12 студентов

Задание 3

Сашу и Пашу пригласили из Нижнего Новгорода в Москву на мероприятие. Саша поехал на рейсовом автобусе со скоростью 60 км/ч и опоздал на 1 час, а Паша поехал на собственном автомобиле со скоростью 75 км/ч и прибыл на 24 минуты раньше. Найдите расстояние между Москвой и Нижним Новгородом и время, которое нужно потратить, чтобы прибыть на мероприятие вовремя.

Пояснения:

Нужно найти:

1. **Расстояние (S)** между городами.
2. **Идеальное время в пути (t)**, которое нужно потратить, чтобы приехать ровно к началу мероприятия (ни раньше, ни позже).

РЕШЕНИЕ:

S — расстояние между Москвой и Нижним Новгородом (км),

t — необходимое время для прибытия вовремя (ч).

1. Для Саши:

Скорость 60 км/ч, опоздал на 1 час ⇒ время в пути $t + 1$.

$$S = 60(t + 1)$$

2. Для Паши:
Скорость 75 км/ч, прибыл на 24 минуты раньше ⇒ время в пути $t - \frac{24}{60} = t - 0{,}4$.

$$S = 75(t - 0{,}4)$$

Приравниваем: $60(t+1) = 75(t - 0{,}4) \Rightarrow t = 6$ часов
Находим S: $S = 60(6+1) = 60 \cdot 7 = 420$ км
Ответ: Расстояние: 420 км, нужное время в пути: 6 часов.

Задание 4

Робот-доставщик помогает курьерам доставить продукты из магазина покупателям. Имеются следующие заказы: 50 заказов по 600 г, 75 заказов по 1000 г, 70 заказов по 1500 г. Частично доставлять заказы нельзя (каждый заказ должен быть доставлен целиком одним роботом). Могут ли 42 робота выполнить все заказы, если каждый робот может перевозить не более 5000 г?

РЕШЕНИЕ: Масса всех заказов равна 50 · 600 + 75 · 1000 + 70 · 1500 = 210 000 г, то есть столько должны увезти все 42 роботов. Значит, если возможно увезти все продукты на 42 роботах-доставщиках, то каждый должен быть загружен полностью. Попробуем собрать заказы в кучки по 5000 г. Из чисел 600, 1000, 1500 можно составить 5000 так:

- Вариант А: $1500 + 1500 + 1000 + 1000 = 5000$
- Вариант Б: $1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000 = 5000$
- Вариант В: $600 + 600 + 600 + 600 + 600 + 1000 + 1000 = 5000$ (пять по 600 и два по 1000)

Проверим, хватит ли заказов для 42 роботов:

- Заказов по 600 г — 50 штук.
  В варианте В их нужно по 5 штук на робота.
  $50 : 5 = 10$ роботов заберут все заказы по 600 г.
- Заказов по 1500 г — 70 штук.
  В варианте А их нужно по 2 на робота.
  $70 : 2 = 35$ роботов заберут все заказы по 1500 г.
- Заказов по 1000 г — 75 штук.
  В варианте А на каждого из 35 роботов нужно 2 заказа по 1000 г → $35 \times 2 = 70$ штук.
  Но тогда для 10 роботов варианта В нужно ещё по 2 заказу 1000 г → $10 \times 2 = 20$ штук.
  Всего $70 + 20 = 90$ заказов по 1000 г, а у нас только 75

Получается, что даже если попробовать по-другому комбинировать кучки, то распределить заказы без нарушения условий невозможно.

Задание 5

В течение февраля (28 дней) двое друзей — Аня и Борис — играли в настольные игры, соблюдая особый распорядок:

- По средам и четвергам, если дата была чётной, они проводили ровно 7 партий.
- В понедельник и вторник, если число месяца было нечётным, они играли 3 партии.
- Каждую пятницу количество сыгранных партий совпадало с числом на календаре.
- В остальные дни играть не разрешалось.

Какое наибольшее суммарное количество партий они могли провести за весь месяц?

Пояснение: В этой задаче **«число месяца»** означает **календарное число** (день месяца) — целое число от 1 до 28 для февраля. **«…если дата была чётной»** = если календарное число чётное (2, 4, 6, …, 28). **«…если число месяца было нечётным»** = если календарное число нечётное (1, 3, 5, …, 27).

РЕШЕНИЕ:

1. Февраль — 28 дней, 4 полные недели
   Это значит, что каждый день недели повторяется ровно 4 раза: 4 понедельника, 4 вторника и так далее.
2. Если понедельник попадает на чётное число, то через неделю он будет на нечётном, и наоборот.
   Поэтому каждый день недели встречается 2 раза с чётным числом и 2 раза с нечётным.
3. Считаем партии по правилам для понедельника–четверга
   - В среду и четверг играли только если число чётное → 2 таких дня × 7 партий = 14 партий за каждый из этих дней недели.
     За месяц: среда (2 дня × 7) + четверг (2 дня × 7) = 14 + 14 = 28 партий.
   - В понедельник и вторник играли только если число нечётное → 2 таких дня × 3 партии = 6 партий за каждый из этих дней недели.
     За месяц: понедельник (2 дня × 3) + вторник (2 дня × 3) = 6 + 6 = 12 партий.
   - Итого за понедельник–четверг: 28 + 12 = 40 партий.
4. В пятницу играли столько партий, какое число на календаре.
   Пятницы в феврале:
   - 1-я пятница — число x
   - 2-я пятница — $x+7$
   - 3-я пятница — $x+14$
   - 4-я пятница — $x+21$

Сумма партий в пятницы:

$$x+(x+7)+(x+14)+(x+21)=4x+42$$

Чтобы сумма была наибольшей, нужно выбрать наибольшее возможное x.
Так как 4-я пятница $x+21\le 28$ (последний день февраля),
то $x\le 7$.
Максимум при $x=7$:

$$4\times 7+42=28+42=70 \text{ партий.}$$

5. Понедельник–четверг: 40 партий
   Пятницы: 70 партий
   Всего: $40+70=110$ партий.

Ответ: 110 партий — наибольшее возможное количество.

6 класс

Задание 1

Маше дали карточки с цифрами 5, 8, 6, 7, 3, 9 (по одной цифре на каждой карточке). Из них она составила три числа: однозначное, двузначное и трёхзначное (каждая карточка использована ровно один раз). Сумма этих трёх чисел делится на 10, но не делится на 20. Приведите пример такой суммы.

РЕШЕНИЕ:

Для того чтобы сумма трёх чисел делилась на 10, необходимо, чтобы её запись оканчивалась цифрой 0. Чтобы сумма при этом не делилась на 20, цифра в разряде десятков должна быть нечётной**.** Чтобы получить в конце суммы 0, нужно подобрать последние цифры трёх чисел так, чтобы их сумма давала число, оканчивающееся на 0. Из заданных цифр 5, 8, 6, 7, 3, 9 возможны следующие наборы последних цифр: 5, 7, 8 и 5, 6, 9.

Случай 1: комбинация 5+ *7+ **8. Оставшиеся цифры — 3, 6, 9.
Чтобы цифра десятков суммы была нечётной, в разряды десятков двузначного и трёхзначного чисел

нужно поместить одну чётную и одну нечётную цифру (например, 6 и 3).
Примеры: 5 + 67 + 938 = 1010 и 5 + 97 + 368 = 470. Заметим, что последовательность последних и предпоследних цифр в числах никак не влияет на результат.

Случай 2: комбинация 5+ *6+ **9. Оставшиеся цифры — 3, 7, 8.
Для нечётной цифры в разряде десятков суммы нужно разместить в разряде десятков двузначного и трёхзначного чисел одну чётную (8) и одну нечётную (3 или 7) цифру.
Примеры: 5 + 86 + 379 = 470 и 5 + 36 + 789 = 830

Случай 3: 3+68+579=650

Ответ: 470, 830, 650 1010.

Задание 2

В заколдованном лесу обитают четыре духа — Север, Зефир, Луна и Искра. Каждый из них является либо Хранителем Правды (всегда говорит истину), либо Мастером Иллюзий (всегда лжёт). Однажды между ними произошёл такой диалог:
Север, глядя на Зефира: «Ты — Мастер Иллюзий».
Искра, обращаясь к Северу: «Нет, это ты — Мастер Иллюзий!»
Луна, глядя на Искру: «Оба они — Мастера Иллюзий. И ты, Искра, тоже одна из них».
Кто из духов Хранитель Правды, а кто — Мастер Иллюзий?

РЕШЕНИЕ:

1. Предположим, что Луна — Хранитель Правды.
   Тогда её слова «Оба они — Мастера Иллюзий» (о Севере и Искре) и «Искра тоже одна из них» истинны.
   Следовательно, Север, Искра — Мастера Иллюзий.
   Но если Север — Мастер Иллюзий, то его утверждение «Зефир — Мастер Иллюзий» должно быть ложью. Однако если Искра — Мастер Иллюзий, то её слова «Север — Мастер Иллюзий» оказываются правдой — противоречие, так как Мастер Иллюзий не может говорить правду.
   Значит, предположение неверно, и Луна — Мастер Иллюзий.
2. Так как Луна — Мастер Иллюзий, её высказывания ложны:
   - Утверждение «Оба они — Мастера Иллюзий» (о Севере и Искре) ложно → хотя бы один из них — Хранитель Правды.
   - Утверждение «Искра тоже одна из них» ложно → Искра — Хранитель Правды.
3. Определяем остальных:
   Из п. 2: Искра — Хранитель Правды.
   Тогда её реплика «Север — Мастер Иллюзий» истинна → Север — Мастер Иллюзий.
   Реплика Севера (Мастер Иллюзий): «Зефир — Мастер Иллюзий» — ложь → Зефир — Хранитель Правды.

ОТВЕТ:
Хранители Правды: Искра, Зефир.
Мастера Иллюзий: Север, Луна.

Задание 3

Юле и Насте посчастливилось жить в одном доме и ходить в одну школу. Но только Юля успевает дойти до школы за 12 минут, а Насте нужно 20 минут. Через сколько минут Юля сможет догнать Настю, если выйдет из дома на 5 минут позже?

РЕШЕНИЕ:

Пусть расстояние от дома до школы — S.
Скорость Юли: $v_1 = \frac{S}{12}$
Скорость Насти: $v_2 = \frac{S}{20}$
Настя вышла на 5 минут раньше.
За это время она прошла: $\frac{S}{20} \cdot 5 = \frac{S}{4}$
Скорость сближения: $v_1 - v_2 = \frac{S}{12} - \frac{S}{20} = \frac{5S-3S}{60} = \frac{2S}{60} = \frac{S}{30}$
Время, за которое Юля догонит Настю:

$$t = \frac{\frac{S}{4}}{\frac{S}{30}} = \frac{S}{4} \cdot \frac{30}{S} = 7{,}5 \text{ минут}$$

Ответ: через 7,5 минут после выхода Юли.

Задание 4

В преддверии праздника компания приятелей обменялась поздравительными стикерами в групповом чате. По договорённости каждый отправленный стикер видели все участники чата, кроме самого отправителя. Все отправили равное количество стикеров. В сумме у всех участников набралось 540 доставленных стикеров (каждое получение стикера учитывалось отдельно). Сколько человек могло состоять в этом чате?

Пояснение:
Когда кто-то отправляет стикер, его видят **все, кроме отправителя** (то есть $n-1$ человек).
Будем считать, что это волшебный мессенджер и такое возможно ☺
«Доставленный стикер» — это факт получения стикера конкретным участником.
Например, если Маша отправила 1 стикер в чат из 5 человек, это считается как $1 \times (5-1) = 4$ доставленных стикера (четверо получили).

РЕШЕНИЕ:

Пусть в чате n человек.

1. Каждый отправленный стикер получают $n-1$ человек.
2. Каждый отправил k стикеров.
3. Общее количество отправленных стикеров: $n \cdot k$.
4. Общее количество получений (всех стикеров всеми участниками):

$$n \cdot k \cdot (n-1) = 540$$

Решаем уравнение:

$n \cdot k \cdot (n-1) = 540 \Rightarrow k = \frac{540}{n(n-1)} \Rightarrow k = \frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5}{n(n-1)}$

k должно быть целым положительным числом. Тогда получим, что n может быть равно: 2, 3, 4, 5, 6 или 10 человек

Задание 5

Полина и Артём поспорили на 10 шоколадок. Артём утверждает, что выражение

$$(x+6)(x+10)(x+14)$$

при любом целом x делится на 3. Полина с этим не согласна — она считает, что это верно только для $x > 0$, а при отрицательных x возможны исключения.

Кроме того, Полина заметила, что если заменить числа 6, 10, 14 на три последовательных члена арифметической прогрессии с разностью d, то делимость на 3 будет сохраняться не для всех d.

1. Прав ли Артём про делимость на 3 для исходного выражения при любом целом x?

2. Для каких разностей d выражение $(x+a)(x+a+d)(x+a+2d)$ будет делиться на 3 при любом целом x, если a — целое?

РЕШЕНИЕ:

1) Пусть $x = 3k$. В этом случае получаем:
$$(3k+6)(3k+10)(3k+14) = 3(k+2)(3k+10)(3k+14) =$$
Это выражение делится на 3.
Пусть $x = 3k+1$. В этом случае получаем
$$(x+6)(x+10)(x+14) = (3k+1+6)(3k+1+10)(3k+1+14) =$$
$$= (3k+7)(3k+11)(3k+15) = 3(3k+7)(3k+11)(k+5)$$
Это выражение делится на 3.
Пусть $x = 3k+2$. В этом случае получаем
$$(x+6)(x+10)(x+14) = (3k+2+6)(3k+2+10)(3k+2+14) =$$
$$= (3k+8)(3k+12)(3k+16) = 3(3k+8)(k+4)(3k+16)$$
Это выражение делится на 3.
Значит при любом целом x произведение $(x+6)(x+10)(x+14)$ делится на 3. Значит Артем прав

2) вместо $x+a$ можно написать t. Тогда t — любое целое число (потому что x любое, a фиксировано). Выражение превращается в: $t \cdot (t+d) \cdot (t+2d)$
Нам нужно, чтобы при любом целом t это произведение делилось на 3.

Если d **не делится на 3**, то три числа $t, t+d, t+2d$ имеют три разных остатка от деления на 3 (в каком-то порядке), поэтому среди них есть число с остатком 0, то есть делящееся на 3.

Если d **делится на 3**, то все три числа имеют одинаковый остаток, и можно выбрать t, не делящийся на 3, тогда ни одно из чисел не делится на 3.

7 класс

Задание 1

Соня придумала такие два числа, что если увеличить каждое из них на 1, то их произведение увеличится на 13. На сколько увеличится произведение этих чисел если каждый из них увеличить на 2?

РЕШЕНИЕ:

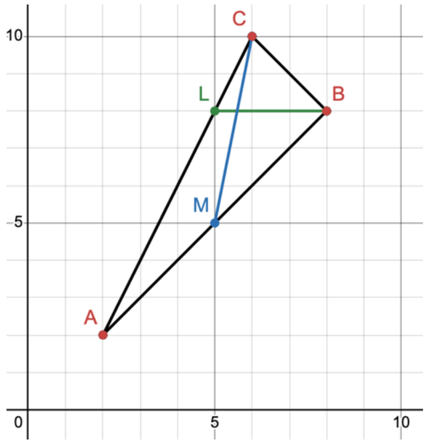
Пусть загаданы числа x, y. При увеличении каждого из множителей на 1 их произведение увеличивается на 13: $(x+1)(y+1) = xy+13 \Rightarrow xy+x+y+1 = xy+13 \Rightarrow x+y = 12$
Найдём на сколько увеличится произведение этих множителей при увеличении каждого из них на 2:
$$(x+2)(y+2) = xy+2(x+y)+4 \Rightarrow xy+28$$
Таким образом, при увеличении каждого из множителей на 2, их произведение увеличивается на 28.
Ответ: 28.

Задание 2

В королевстве Геометрия стояли три замка: Алфавия (A), Бетания (B) и Гаммабург (C). Между ними были проложены прямые дороги, образующие треугольник. Для обороны провели путь из Гаммабурга к середине дороги между Алфавией и Бетанией — это был штаб стражи (M). Также из Бетании проложили путь к точке (L) на дороге в Гаммабург так, чтобы он делил угол при Бетании пополам (это была тайная тропа к святому источнику). Однажды картограф, перерисовывая карту, случайно стёр все линии и точки, кроме расположения замка Алфавия $A(2;2)$, штаба стражи $M(5;5)$ и тайной точки $L(5;8)$ (в километрах от столицы). Восстановите, где стоял замок Гаммабург (C).

Пояснение: Условие говорит: «…координаты даны в километрах от столицы». Это означает, что **столица находится в начале координат** $(0;0)$, а все точки заданы в **прямоугольной (декартовой) системе координат**, где числа в скобках — это координаты $(x;y)$ в километрах относительно столицы.

РЕШЕНИЕ: C $(6;10)$



Задание 3
Петя написал программу для калькулятора. Он хотел, чтобы при нажатии на кнопку к числу на экране прибавлялось 21. Но из-за ошибки калькулятор стал работать по-другому:

- Он берёт число на экране
- Перемножает все его цифры
- Прибавляет 21 к полученному результату
- Показывает новое число
- Повторяет это 2025 раз

Петя ввёл число 52 и нажал на кнопку. Какое число он увидел в конце?

РЕШЕНИЕ:
Разберём по шагам:
Начальное число: 52

1. 52 → 5×2 = 10 → 10 + 21 = 31
2. 31 → 3×1 = 3 → 3 + 21 = 24
3. 24 → 2×4 = 8 → 8 + 21 = 29
4. 29 → 2×9 = 18 → 18 + 21 = 39
5. 39 → 3×9 = 27 → 27 + 21 = 48
6. 48 → 4×8 = 32 → 32 + 21 = 53
7. 53 → 5×3 = 15 → 15 + 21 = 36
8. 36 → 3×6 = 18 → 18 + 21 = 39
9. 39 → мы уже видели это число на шаге 4

Обнаруживаем цикл:
39 → 48 → 53 → 36 → 39 → ...
Цикл состоит из 4 чисел: 39, 48, 53, 36
Считаем:

- После 4 операций мы получили 39 (начало цикла)
- Осталось операций: 2025 - 4 = 2021
- 2021 ÷ 4 = 505 целых циклов и остаток 1

Остаток 1 означает, что мы продвигаемся на 1 шаг вперёд по циклу от числа 39:
39 (0) → 48 (1)
Ответ: 48

Задание 4

Гена и Влад поспорили на билеты в кино. Гена утверждает, что выражение:

$$1012! \cdot 1013! \cdot 2025! \cdot 2026!$$

является квадратом натурального числа. Более того, он заявляет, что если разделить это выражение на наибольший возможный полный квадрат, то оставшаяся часть будет простым числом. Влад с этим не согласен. Кто из них прав и почему? Найдите наибольший полный квадрат, на который делится данное выражение, и определите, является ли частное от деления простым числом.

По определению $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

РЕШЕНИЕ:

Заметим, что $1012! \cdot 1013! = 1012! \cdot 1012! \cdot 1013 = (1012!)^2 \cdot 1013$, аналогично получаем

$2025! \cdot 2026! = (2025!)^2 \cdot 2026$, таким образом

$$\begin{aligned} 1012! \cdot 1013! \cdot 2025! \cdot 2026! &= (1012!)^2 \cdot 1013 \cdot (2025!)^2 \cdot 2026 \\ &= (1012!)^2 \cdot 1013 \cdot (2025!)^2 \cdot 1013 \cdot 2 = (1012!)^2 \cdot 1013^2 \cdot (2025!)^2 \cdot 2 \\ &= (1012! \cdot 2025! \cdot 1013)^2 \cdot 2 \end{aligned}$$

Последнее выражение не является квадратом, так как имеет вид $2a^2$. Предположим, что мы имеем равенство $2a^2 = t^2$. Тогда t – четно, пусть $t = 2s$. Подставляя, находим $2a^2 = (2s)^2 = 4s^2$, т.е. наше равенство можно разделить пополам: $a^2 = 2s^2$. Новое равенство аналогично исходному; его точно так же можно разделить пополам и т.д.

Наибольший полный квадрат, на который делится выражение: $(1012! \cdot 2025! \cdot 1013)^2$

При делении на наибольший полный квадрат остаётся множитель 2, который является простым числом.

Ответ: Гена прав частично. Выражение действительно делится на полный квадрат $(1012! \cdot 2025! \cdot 1013)^2$, и частное от деления (число 2) является простым числом. Однако само исходное выражение не является полным квадратом.

Задание 5

Марина загадала натуральное число N. Оказалось, что если выписать все его делители и для каждого из них вычислить сумму цифр, то среди полученных сумм присутствуют все числа от 1 до 9 включительно. Какое наименьшее число N могла загадать Марина?

РЕШЕНИЕ:

Пример для ясности

Пусть $N = 12$.

Делители: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Суммы цифр:

- 1 → 1
- 2 → 2
- 3 → 3
- 4 → 4
- 6 → 6
- 12 → 1+2=3

Получили {1, 2, 3, 4, 6}.

Нет 5, 7, 8, 9.

Значит, 12 **не подходит**.

Проверим число 288. Его делители включают, среди прочих: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48, 72, 96, 144, 288. Нетрудно убедиться, что суммы цифр этих делителей покрывают все целые числа от 1 до 9. Следовательно, 288 удовлетворяет требованию задачи.

Покажем, что меньшего подходящего числа не существует.

Так как среди сумм цифр делителей есть 9, само число N должно делиться на 9.

Пусть d — делитель N с суммой цифр 8. Заметим, что d не кратно 3 (иначе его сумма цифр делилась бы на 3, а 8 на 3 не делится). Поэтому d и 9 взаимно просты, и N должно делиться на $9d$. $d \in \{8, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80\}$.
Если $d \geq 32$, то $9d \geq 288$, то есть $N \geq 288$.
Осталось проверить возможные меньшие d с суммой цифр 8:

- $d = 26$: $9d = 234$. У числа 234 нет делителя с суммой цифр 5, а любое кратное ему число уже больше 288.
- $d = 17$: $9d = 153$. У 153 нет делителя с суммой цифр 2, а кратные ему числа больше 288.
- $d = 8$: $9d = 72$. Числа, кратные 72 и меньшие 288 — это 144 и 216. Ни у одного из них нет делителя с суммой цифр 5.

Таким образом, число 288 — наименьшее.