

Программа учебной дисциплины «Стохастический анализ в экономике»

Рекомендована секцией «Система
дополнительного образования»

Утверждена УМС
27 февраля 2015 г.

Автор	Силаев А.М.
Число кредитов	8
Контактная работа (час.)	40
Самостоятельная работа (час.)	264
Курс	2
Формат изучения дисциплины	без использования онлайн курса

I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Курс должен помочь студентам получить знания в области стохастического анализа, овладеть методами моделирования в экономике и финансах.

В результате изучения дисциплины студент должен:

- **Знать** основы теории случайных процессов, необходимые для решения экономических задач;
- **Уметь** применять методы анализа и моделирования случайных процессов для решения экономических задач;
- **Иметь навыки** (приобрести опыт)
 - применения современного математического инструментария для решения экономических задач;
 - построения, анализа и применения математических моделей случайных процессов для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений.

Настоящая дисциплина является дисциплиной по выбору базового и рабочего учебных планов, обеспечивающих подготовку бакалавра по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика», реализуется на 2 курсе.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- «Математический анализ»;
- «Линейная алгебра».

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- владение культурой критического мышления, способностью к обобщению, анализу, логическому мышлению, восприятию информации;
- умение выделить наиболее важную информацию и квалифицированно использовать ее.

Основные положения дисциплины могут быть использованы в дальнейшем при изучении таких дисциплин, как Эконометрика, Ценообразование финансовых активов и других.

II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Введение в стохастическое исчисление

Случайная величина, распределение и математическое ожидание. Условное математическое ожидание и его свойства. Преобразования случайных величин.

Вероятностное описание случайного процесса. Определение случайного процесса. Понятие статистического ансамбля. Многомерные плотности вероятности. Основные свойства многомерных плотностей вероятности. Условные плотности вероятности, их свойства и связь с многомерными безусловными плотностями вероятности. Плотность вероятности квазидетерминированных случайных процессов.

Тема 2. Свойства случайных процессов

Статистические характеристики случайных процессов. Характеристическая функция случайного процесса, определение и свойства. Моментные и кумулянтные функции, их взаимосвязь. Корреляционная и ковариационная функции случайного процесса. Коэффициент корреляции. Производящая функция случайной последовательности.

Гауссовские случайные процессы. Многомерная характеристическая функция и плотность вероятностей гауссовского процесса. Ковариационная матрица отсчетов гауссовского случайного процесса. Основные свойства гауссовских случайных процессов.

Совокупность случайных процессов. Общее описание совокупности двух случайных процессов. Статистическая независимость случайных процессов. Взаимные корреляционные и ковариационные функции. Стационарность, гауссовость совокупности двух случайных процессов.

Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость случайного процесса. Сходимость в смысле среднего квадратичного. Непрерывность в среднем квадратичном, по вероятности и с вероятностью единица. Дифференцируемость случайного процесса. Производная СП в среднем квадратичном, необходимое и достаточное условие ее существования. Интегрируемость случайного процесса. Интеграл от случайного процесса в среднем квадратичном, необходимое и достаточное условие его существования.

Стационарность и эргодичность. Строгая и слабая стационарность. Понятие стационарности в узком и широком смысле. Усреднение по статистическому ансамблю и по времени. Эргодичность случайных процессов. Необходимые и достаточные условия эргодичности по отношению к среднему значению, корреляционной функции, одномерной плотности вероятности.

Тема 3. Спектрально – корреляционный анализ случайных процессов

Свойства корреляционных функций нестационарных и стационарных случайных процессов. Среднее значение и корреляционная функция производной и интегрального преобразования от случайного процесса.

Спектральное представление случайного процесса. Спектральная плотность энергии, функция корреляции первого рода и их свойства. Спектральная плотность мощности. Соотношение между спектральной плотностью мощности и корреляционной функцией для стационарных случайных процессов. Спектральная плотность мощности нестационарных случайных процессов. Функция корреляции второго рода. Ширина спектра случайного процесса, ее связь со временем корреляции. Случайные процессы типа «белый шум».

Тема 4. Модели марковских случайных процессов

Марковский случайный процесс. Понятие вероятности переходов. Однородный и стационарный марковские процессы. Уравнение Колмогорова-Чепмена. Взаимоотношения между условной плотностью вероятности и вероятностью переходов. Классификация марковских процессов: непрерывно-значные марковские процессы, дискретные марковские процессы, марковские последовательности, цепи Маркова.

Дискретная марковская цепь. Переходные вероятности. Уравнение Колмогорова–Чепмена. Однородность марковской цепи. Применение производящих функций для исследования МЦ. Нахождение вероятностей переходов с помощью производящих функций). Классификация состояний марковской цепи. Классификация состояний цепи Маркова по арифметическим свойствам вероятностей перехода. Блочная структура матрицы переходных вероятностей в случае разложимой марковской цепи, в случае неразложимой периодической марковской цепи.

Асимптотическое поведение марковской цепи. Классификация состояний по асимптотическим свойствам переходных вероятностей. Эргодичность марковской цепи, предельное распределение. Условия эргодичности марковской цепи. Оценивание скорости сходимости к предельному распределению. О средних временах переходов между состояниями. Стационарные цепи Маркова. Оптимальные стратегии в марковских цепях. Правило принятия решений.

Случайные блуждания. Задача о разорении. Ожидаемая продолжительность игры.

Тема 5. Стохастические дифференциальные уравнения

Особенности приращения марковского процесса. Распределение суммы и разности случайных процессов. Плотность вероятности приращения. Плотность вероятности локального приращения. Статистическая независимость локальных приращений марковского процесса.

Непрерывные марковские процессы. Пример: процесс диффузии как предел дискретного случайного блуждания. Обобщенное уравнение Маркова. Обратное уравнение Колмогорова. Уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка.

Кинетические коэффициенты марковского процесса в первом приближении. Значение высших кинетических коэффициентов. Примеры кинетических коэффициентов ряда марковских процессов.

Общий вид дифференциального уравнения для марковского процесса. Пример дифференциальных уравнений марковских процессов. Стохастические интегралы. Мартингалы. Лемма Ито.

Броуновское движение, определение и свойства: совместное распределение приращений, свойства мартингальности и марковости. Распределение максимума броуновского движения. Геометрическое броуновское движение. Броуновский мост.

Двусвязные и многосвязные марковские процессы. Многомерный марковский процесс. Марковские совокупности процессов. Дифференциальные уравнения двумерного и многомерного марковского процесса. Многомерное уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова. Многомерная формула Ито.

Точечные случайные процессы. Пуассоновский случайный процесс. Процессы гибели и размножения. Ветвящиеся процессы.

III. ОЦЕНИВАНИЕ

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале. Требования к отчетности соотносятся с компетенциями.

При оценивании контрольных работ учитывается наличие правильных решений и полнота выполнения заданий, качество оформления работы.

При оценивании домашних заданий учитывается наличие правильных решений заданий и полнота их выполнения, качество оформления работы, способность провести самостоятельное исследование, сделать выводы на основе сведений, полученных из источников и научной литературы, и из собственной работы.

При оценивании экзаменационных работ учитывается наличие правильных решений, полнота выполнения заданий, качество оформления работы.

Экзаменационные оценки выставляются по 10-ти балльной шкале

Преподаватель оценивает работу студентов на семинарских занятиях путем проверки домашних заданий, решения задач, обсуждения открытых вопросов на семинарах. Оценки за работу на семинарских занятиях преподаватель выставляет в рабочую ведомость. Результирующая оценка по 10-ти балльной шкале за работу на семинарских и практических занятиях определяется перед итоговым контролем - $O_{\text{аудиторная}}$.

Накопленная оценка равна $O_{\text{аудиторная}}$.

Результирующая оценка за дисциплину выставляется по следующей формуле, где $O_{\text{экзамен}}$ – оценка за работу непосредственно на экзамене:

$$O_{\text{результ}} = 0,6 \cdot O_{\text{экзамен}} + 0,4 \cdot O_{\text{накопл}}$$

Все оценки округляются арифметическим способом. Результирующая оценка выставляется в диплом.

IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Примерные вопросы для контрольной работы

1. Запишите определение ковариационной функции случайного процесса.
2. Упорядочите следующие характеристики в порядке возрастания полноты описания случайного процесса: шестимерная характеристическая функция, дисперсия, среднее значение, четырехмерная плотность вероятности, корреляционная функция.
3. Запишите формулу, связывающую плотности вероятности случайного процесса до и после нелинейного безынерционного преобразования.
4. Выведите выражение для плотности вероятности отношения двух случайных величин (x, y) через совместную п.в. $W_{xy}(x, y)$.
5. Приведите достаточное условие того, чтобы случайный процесс являлся эргодическим по отношению к среднему значению.

Примерные вопросы для домашнего задания

1. Почему эргодический процесс обязан быть стационарным?
2. Дан стационарный случайный процесс $x(t)$. Для вектора $(x(t_1), x(t_2))$ записать определение ковариационной матрицы и выразить её определитель через дисперсию с.п. $x(t)$ и нормированную ковариационную функцию $R_{xy}(\tau)$.

Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Определение случайного процесса.
2. Основные свойства многомерных плотностей вероятности.
3. Условные плотности вероятности, их свойства и связь с многомерными безусловными плотностями вероятности.
4. Плотность вероятности квазидетерминированных случайных процессов.
5. Характеристическая функция случайного процесса, определение и свойства.
6. Моментные и кумулянтные функции, их взаимосвязь.
7. Корреляционная и ковариационная функции случайного процесса. Коэффициент корреляции.
8. Производящая функция случайной последовательности.
9. Многомерная характеристическая функция и плотность вероятностей гауссовского процесса.
10. Ковариационная матрица отсчетов гауссовского случайного процесса.
11. Основные свойства гауссовских случайных процессов.
12. Марковский случайный процесс.
13. Непрерывность случайного процесса.
14. Дифференцируемость случайного процесса.

15. Производная случайного процесса в среднем квадратичном, необходимое и достаточное условие ее существования.
16. Стационарный случайный процесс. Строгая и слабая стационарность. Понятие стационарности в узком и широком смысле.
17. Эргодичность случайных процессов. Необходимые и достаточные условия эргодичности по отношению к среднему значению, корреляционной функции.
18. Общее описание совокупности двух случайных процессов. Статистическая независимость случайных процессов. Взаимные корреляционные и ковариационные функции. Стационарность, эргодичность, гауссовость совокупности двух случайных процессов.
19. Свойства корреляционных функций нестационарных и стационарных случайных процессов. Среднее значение и корреляционная функция производной случайного процесса.
20. Спектральное представление случайных процессов. Спектральная функция и спектральная плотность.
21. Спектральная плотность мощности. Соотношение между спектральной плотностью мощности и корреляционной функцией для стационарных случайных процессов. Ширина спектра случайного процесса, ее связь со временем корреляции.
22. Марковский случайный процесс. Дискретная марковская цепь.
23. Применение производящих функций для исследования марковской цепи.
24. Стационарные цепи Маркова
25. Случайные блуждания. Задача о разорении. Ожидаемая продолжительность игры.
26. Броуновское движение, определение и свойства.
27. Пуассоновский случайный процесс, его характеристики.
28. Процессы гибели и размножения. Стационарное распределение.
29. Ветвящиеся процессы. Вероятность вырождения. Время до вырождения.

V. РЕСУРСЫ

5.1 Основная литература

Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. Пособие для бакалавров – 12-е изд. – М.: Издательство Юрайт, 2014. – 478 с.

5.2 Дополнительная литература

1. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. – М.: Мир, 1984.
3. Ширяев А.Н. Вероятность. 3-е изд. М.: Изд-во МЦНМО, 2004. Кн. 1, 2.
4. Dupacova J., Hurt J., Stefan J. Stochastic Modeling in Economics and Finance. Kluwer Academic Publishers, 2002.
5. Klebaner F.C. Introduction to stochastic calculus with applications. Imperial College Press, 2006.
6. Stirzaker D. Stochastic Processes and Models. Oxford University Press, 2005.
7. White, D. J. Markov decision processes. John Wiley & Sons, 1993.

5.3 Программное обеспечение

Не предусмотрено

5.4 Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

Не предусмотрено

5.5 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для более эффективного и наглядного проведения занятий на некоторых лекциях и семинарах используется техническое видеооборудование – проектор, ноутбук, экран.