

Программа учебной дисциплины «Алгебра и геометрия»

Утверждена

Академическим руководителем

_____ Н.В. Асеева

_____ 20_____

Автор	Малыженкова В.И.
Число кредитов	8
Контактная работа (час.)	24
Самостоятельная работа (час.)	204
Курс	1 курс
Формат изучения дисциплины	без использования онлайн курса

I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Целями освоения дисциплины «Алгебра и геометрия» являются овладение основами линейной алгебры, приобретение навыков использования ее универсального понятийного аппарата и широкого арсенала технических приемов при построении математических моделей различных экономических закономерностей и процессов, описании динамики социально– экономических систем и прогнозировании развития экономики. Достижение этих целей обеспечивает выпускнику получение высшего профессионально профилированного (на уровне бакалавра) образования и обладание перечисленными ниже общими и предметно- специализированными компетенциями. Они способствуют его социальной мобильности, устойчивости на рынке труда и успешной работе в избранной сфере деятельности.

В результате освоения дисциплины студент должен:

знать:

- терминологию, принятую в изучаемой дисциплине, ее основные понятия и определения;
- формулировки доказанных в курсе теорем, уметь применять их к конкретным задачам линейной алгебры;
- элементарные методы выполнения основных операций над числовыми матрицами, как то: алгебраические операции сложения и умножения, транспонирование, операция отыскания обратной матрицы и ранга матрицы. Знать основные свойства указанных операций и уметь описывать их при помощи индексных обозначений;

уметь:

- находить ранг и базы заданных систем числовых столбцов (строк) при помощи элементарных преобразований, размерности их линейных оболочек, устанавливать их линейную зависимость или независимость;
- решать методом исключения неизвестных (метод Гаусса-Жордана) системы линейных уравнений, в том числе однородные. Строить фундаментальные системы решений однородных линейных систем, находить частные решения общих систем и вскрывать структуру их общего решения, отыскивать однородную линейную систему по ее фундаментальной системе решений;
- формулировать задачу об отыскании его спектра и собственных векторов. Записывать и решать для нахождения собственных чисел характеристическое уравнение данного преобразования, находить его собственные векторы путем решения соответствующей системы линейных уравнений;

владеть:

- фундаментальным понятием линейной зависимости (независимости) системы числовых столбцов (строк) с последующим обобщением на системы векторов произвольного линейного пространства;

- техникой вычисления определителей (в частности буквенных и определителей, порядок которых не является фиксированным);

- понятием линейного (векторного) пространства и его линейного подпространства с примерами и пояснениями. Манипулировать с базисами линейных пространств: дополнять заданную систему векторов до базиса, переходить от одного базиса к другому (знать структуру и свойства матрицы перехода), отыскивать координатные реализации (разложения) заданных векторов в указанном базисе пространства. Описывать подпространства заданных линейных пространств на языке решений однородных линейных систем (вычисление подпространств). Выполнять операции над подпространствами (сложение, пересечение), владеть понятием прямой суммы подпространств и теоремой Грассмана;

- понятием линейного отображения линейного пространства и его важной частной формы – преобразования линейного пространства. Уметь находить множество значений линейного оператора и его ядро, а также ранг и дефект. Знать связь между ними и размерностью линейного пространства. Научиться матричной записи линейных преобразований, знать структуру матрицы линейного преобразования линейного пространства;

- представлением о подпространствах линейных пространств, инвариантных относительно некоторого линейного преобразования.

Изучение дисциплины «Алгебра и геометрия» базируется на следующих дисциплинах:

- математика в объеме средней школы.

Для освоения учебной дисциплины студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- знать основные аспекты школьного курса алгебры и геометрии.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- 1 Дифференциальные уравнения;
- 2 Методы оптимизации;
- 3 Теория игр и исследование операций;
- 4 Теория вероятностей и математическая статистика.

II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Векторная алгебра

Понятие вектора. Равные вектора. Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов. Базис на плоскости и в пространстве. Декартова прямоугольная система координат. Направляющие косинусы вектора. Скалярное произведение двух векторов. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов.

Тема 2. Матрицы и определители.

Определение числовых матриц и различные формы их истолкования. Столбцы, строки, главная и побочная диагонали (для квадратных матриц). Сложение матриц и умножение на число, свойства линейных операций. Транспонирование матрицы. Свойства операции транспонирования. Индексные обозначения элементов матриц и операций над ними. Матрицы-столбцы и матрицы-строки. Умножение матриц, правило “строка на столбец”. Символ суммирования $\sum$ и его свойства. Свойства умножения матриц, взаимные свойства умножения и сложения. Обратная матрица. Элементарные преобразования строк (столбцов) в терминах умножения матриц. Вычисление обратной матрицы методом элементарных преобразований строк присоединенной матрицы. След квадратной матрицы. Ранг матрицы и элементарные преобразования. Миноры произ-

вольного порядка. Базисный минор. Теорема о базисном миноре.

Определение детерминанта (определителя) квадратной матрицы. Миноры его элементов и их алгебраические дополнения. Разложение определителя по произвольной строке (столбцу). Свойства определителей. Вычисление определителей путем накопления нулей в строке (столбце). Детерминант как индикатор линейной зависимости системы своих столбцов (строк). Функциональная точка зрения на определитель.

Тема 3. Системы линейных уравнений.

Развернутая и матричная формы записи системы линейных уравнений. Равносильные преобразования системы и соответствующие им элементарные преобразования строк расширенной матрицы. Условие совместности линейной системы (теорема Кронеккера-Капелли). Нахождение решений методом Гаусса-Жордана. Приведенная система. Множество решений однородной системы. Фундаментальная матрица и фундаментальная система решений приведенной системы. Структура общего решения произвольной системы линейных уравнений, матричная форма его записи. Метод Крамера решения невырожденных квадратных линейных систем.

Тема 4. Элементы аналитической геометрии.

Общие уравнения плоскости в пространстве и прямой на плоскости. Параметрические и канонические уравнения прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом на плоскости. Общие уравнения прямой в пространстве. Угол между плоскостями и между прямыми. Расстояние от точки до прямой и от точки до плоскости. Канонические уравнения кривых второго порядка (эллипс, гипербола, парабола).

Тема 5. Линейные пространства и линейные операторы.

Определение линейного (векторного) пространства. Простейшие следствия и аксиом линейного пространства. Линейная зависимость векторов пространства. Базис и замена базиса. Линейные подпространства – определение и примеры. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств. Вычисление подпространств. Определение линейного оператора. Матрица линейного оператора в фиксированном базисе. Определение линейного отображения линейных пространств. Преобразование линейного пространства. Координатная запись линейных преобразований. Изменение матрицы линейного преобразования при замене базиса. Сумма и произведение линейных отображений. Изоморфизм линейных пространств. Инвариантные подпространства. Задача о собственных векторах линейного преобразования. Собственные числа, спектр линейного оператора. Характеристическое уравнение и его инвариантность относительно замены базиса. Свойства собственных векторов и собственных значений. Диагональный вид матрицы преобразования. Линейные операторы простой структуры. Критерий диагонализруемости матрицы линейного оператора.

Тема 6. Квадратичные формы.

Линейные числовые функции (функционалы, формы) на линейных пространствах. Билинейные и квадратичные формы. Ранг и индекс квадратичной формы. Квадратичные формы и скалярное произведение. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра (формулировка).

III. ОЦЕНИВАНИЕ

Преподаватель оценивает работу студентов на семинарских занятиях и самостоятельную работу, выставя баллы за активность в аудитории, контрольные работы и домашние расчетные задания.

Результирующая оценка $O_{\text{ауд}}$ по 10-ти балльной шкале за работу в аудитории определяется перед промежуточным или итоговым контролем.

Результирующая оценка за итоговый контроль в форме экзамена выставляется по следую-

щей формуле:

$$O_{\text{итоговая}} = 0.6 \cdot O_{\text{экзамен}} + 0.4 \cdot (0.2 \cdot O_{\text{ауд}} + 0.4 \cdot O_{\text{кр1}} + 0.4 \cdot O_{\text{кр2}})$$

где индексы у символа “О” (оценка) соответствуют оценкам на экзамене, аудиторной оценке и оценкам за 1 и 2 контрольную работу.

Процедура первой пересдачи полностью соответствует процедуре сдачи экзамена, т.е. пересдаче подлежит только оценка, полученная на экзамене, а ранее накопленная оценка не меняется. При проведении второй пересдачи комиссия может не учитывать результаты текущего контроля и выставить результирующую оценку по результатам экзамена

IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Оценочные средства для промежуточной аттестации

Определения:

- числовой матрицы, ее элементов, строк и столбцов; матрицы как точки в многомерных арифметических пространствах; функциональная точка зрения на матрицы;
- равенство матриц, произведение матрицы на число, сумма матриц, произведение матриц;
- транспонирование матрицы;
- след квадратной матрицы;
- элементарные преобразования (э.п.) матриц и их интерпретация на языке умножения матриц (выучить наизусть);
- обратная матрица, вырожденные и невырожденные квадратные матрицы;
- алгоритм вычисления обратной матрицы (метод присоединенной единичной матрицы);
- матрицы-столбцы и матрицы-строки как векторы соответствующих арифметических пространств;
- линейная комбинация (л.к.) векторов, тривиальная и нетривиальная л.к. (выучить наизусть);
- линейно зависимые (л.з.) и независимые (л.н.) системы векторов (выучить наизусть);
- базис л.о. системы векторов (выучить наизусть);
- матричная запись системы линейных уравнений; столбец неизвестных, столбец свободных членов, матрица и расширенная матрица системы, совместные и несовместные системы;
- равносильные преобразования уравнений системы как э.п. строк расширенной матрицы системы;
- метод Гаусса решения систем линейных уравнений (механизм последовательного исключения неизвестных);
- определитель (детерминант) квадратной матрицы (выучить наизусть);
- метод Крамера решения систем линейных уравнений (формулы Крамера-выучить наизусть);
- формула для элементов обратной матрицы, выраженных через дополнительные миноры элементов исходной матрицы (выучить наизусть).

Теоремы :

- свойства операции сложения матриц (с доказательством);
- свойства операции умножения матриц (с доказательством);
- свойства операции транспонирования матриц (с доказательством);
- свойства л.н. и л.з. систем векторов (с доказательством);
- теорема Кронекера-Капелли (с доказательством);
- свойства определителей (без доказательства);
- теорема Крамера (с доказательством);

Пример экзаменационного билета по “Алгебре и геометрии” (практическая часть)

- Доказать теорему Кронекера-Капелли;
- Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ служат сторонами треугольника. Через данные векторы выразить медианы

треугольника;

- Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- Решить систему уравнений и записать общее решение через фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3 = 0 \end{cases}$$

- Найти общее решение системы линейных уравнений или установить ее несовместность

$$\begin{cases} x + y - 5z + 3u = -1 \\ x - 5y - 5z - 3u = -3 \\ x + 7y - 5z + 9u = 1 \end{cases}$$

- Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $L: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = z+1$ и параллельную

вектору $\vec{a} \{3, 1, -1\}$

V. РЕСУРСЫ

5.1 Основная литература

1. Ильин, В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А.Ильин, Э. Г.Поздняк. - 6-е изд.; стер. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики; Вып. 4) (Классический университетский учебник).
Гриф МО РФ
2. Шершнева, В.Г. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии [Электронный ресурс]: учебное пособие/ В.Г.Шершнева; ЭБС Znanium. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 168 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-005479-7. - Режим доступа: <http://znanium.com/bookread.php?book=455245>. - Загл. с экрана.

5.2 Дополнительная литература

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник / Д.В.Беклемишев. - 9-е изд.; испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 376 с.
Гриф МО РФ
2. Ильин, В.А. Линейная алгебра : учебник / В.А.Ильин, Э. Г. Позняк. - 6-е изд. ; стер. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 280 с. - (Классический университетский учебник) (Курс высшей математики и математической физики; Вып. 4). Гриф МО РФ Осн
3. Красс, М.С. Математика для экономистов: учебное пособие / М.С.Красс, Б.В.Чупрынов. - СПб.: Питер, 2010. - 464 с. - (Учебное пособие). Гриф МО РФ Осн
4. Бутузов, В.Ф. Линейная алгебра в вопросах и задачах: учебное пособие / В.Ф.Бутузов, Н.Ч.Крутицкая, А.А.Шишкин; под ред. В.Ф.Бутузова. - 2-е изд.; испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 248 с.
5. Общий курс высшей математики для экономистов: учебник / под ред. В.И.Ермакова. - М.: ИНФРА-М, 2002. - 656 с. - (Высшее образование). Гриф МО РФ
6. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие / под ред. В.И.Ермакова; Рос. эконом. акад. им. Г.В.Плеханова. - 2-е изд.; испр. - М.: ИНФРА-М, 2008.- 575 с. Гриф МО РФ
7. Беклемишева Л.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л.А.Беклемишева, А.Ю.Петрович, И.А.Чубаров. - 2-е изд.; перераб. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
8. Магнус, Я.Р. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике / Я.Р.Магнус, Х.Нейдеккер; пер. с англ. - перераб. изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 496 с.
9. Борताковский, А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.С.Бортаковский, А.В.Пантелеев; ЭБС Znanium. - 3-е изд., стер. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 592 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - Режим доступа: <http://znanium.com/bookread.php?book=494895>. - Загл. с экрана. Гриф УМО
10. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Электронный ресурс]: учебное пособие / под ред. Ю.М.Смирнова; ЭБС Znanium. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Логос, 2005. - 369 с. - ISBN 5-94010-375-8. - Режим доступа: <http://znanium.com/bookread.php?book=469055>. - Загл. с экрана.
Гриф МО РФ

5.3 Программное обеспечение

№ п/п	Наименование	Условия доступа
1.	MATLAB	Из внутренней сети университета (договор)
2.	Microsoft Office 2013 Prof +	Государственный контракт

5.4 Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№ п/п	Наименование	Условия доступа
	<i>Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы</i>	
	Электронно-библиотечная система Юрайт	URL: https://biblio-online.ru/

5.5 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

- ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);
- мультимедийный проектор с дистанционным управлением.