Программа учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика»

Утверждена
Академическим руководителем

_____ *Н.В. Асеева*

_____ *20_____*

Автор	Малыженкова В.И.
Число кредитов	8
Контактная работа (час.)	36
Самостоятельная работа (час.)	268
Курс	2 курс
Формат изучения дисциплины	без использования онлайн курса

I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Целью освоения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» является изучение студентами методов теории вероятностей и математической статистики.

В результате освоения дисциплины студент должен:

знать:

- основные модели и методы теории вероятностей и математической статистики;

уметь:

- применять эти методы для решения прикладных задач;

владеть:

- навыками решения прикладных задач.

Изучение дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» базируется на следующих дисциплинах:

- математический анализ.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

1 Эконометрика.

II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Вероятность случайного события.

1.1. Элементарная теория вероятностей.

Задача де Мере. Пространство элементарных исходов. События и операции над ними. Алгебра событий. Аксиоматическое определение вероятности. Способы задания вероятности. Простейшие следствия из аксиом. Условная вероятность и её свойства. Формула пол-

ной вероятности и формулы Байеса. Независимые события и их свойства. Независимость в совокупности.

1.2. Схема Бернулли.

Дискретное и абсолютно-непрерывное вероятностные пространства. Дискретная случайная величина и её распределение. Гипергеометрическое распределение. Биномиальное распределение. Предельные теоремы в схеме Бернулли (теорема Пуассона и теоремы Муавра-Лапласа).

2. Случайная величина.

2.1. Распределение.

Общее определение случайной величины. Распределение и функция распределения. Свойства функции распределения. Разложение функции распределения и типы случайных величин. Дискретные и непрерывные случайные величины. Плотность распределения непрерывной случайной величины и её свойства. Распределение времени безотказной работы сложной системы без учёта эффекта усталости.

2.2. Типовые случайные величины.

Дискретные случайные величины: гипергеометрическая, биномиальная, геометрическая, отрицательно-биномиальная, пуассоновская.

Непрерывные случайные величины: равномерная, нормальная, экспоненциальная, Вейбулла, гамма-распределение.

3. Случайный вектор.

3.1. Многомерное распределение.

Функция совместного распределения нескольких случайных величин и её свойства. Дискретный случайный вектор: полиномиальное распределение, многомерное распределение Пуассона. Непрерывный случайный вектор: равномерное распределение, многомерное нормальное распределение. Маргинальное распределение.

3.2. Типы связи случайных величин.

Условное распределение. Формулы полной вероятности и Байеса для случайных величин. Независимость случайных величин. Функции случайных величин. Монотонные функции, распределение суммы и частного независимых случайных величин.

4. Числовые характеристики.

4.1. Числовые характеристики случайной величины.

Моменты распределения случайной величины. Математическое ожидание и его свойства. Дисперсия и её свойства. Коэффициенты ассиметрии и эксцесса. Мода, медиана, квантили.

4.2. Числовые характеристики случайного вектора.

Смешанные моменты. Ковариация и её свойства. Коэффициент корреляции и его свойства. Независимость нормально распределённых случайных величин. Условное математическое и его свойства. Понятие о корреляционной связи.

5. Предельные теоремы.

5.1. Характеристическая функция.

Производящая функция моментов. Моменты нормального распределения. Характеристическая функция и её свойства. Замкнутость нормального распределения относительно линейного преобразования.

5.2. Центральная предельная теорема.

Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Теорема Муавра- Лапласа. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределённых случайных величин. Условие Линдеберга. Роль нормального распределения.

6. Случайные процессы.

6.1. Основные понятия.

Понятие о случайном процессе. Конечномерное распределение. Числовые характеристики случайного процесса. Процессы с непрерывным и дискретным временем. Стационарность в широком и узком смысле. Эргодичность.

6.2. Типовые случайные процессы.

Пуассоновский процесс. Винеровский процесс. Гауссовский процесс. Марковские процессы. Матрица переходных вероятностей. Уравнения Колмогорова-Чепмена.

7. Введение в математическую статистику.

7.1. Основные понятия.

Статистическая структура и вероятностное пространство. Выборка. Функция правдоподобия. Повторная выборка. Статистика. Тип задач: оценивание параметров, проверка гипотез. Примеры задач теории статистических решений.

7.2. Выборочный метод.

Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко. Гистограмма. Выборочные моменты. Частота и вероятность. Оценка числа наблюдений на основе теоремы Муавра-Лапласа.

8. Оценивание параметров.

8.1. Точечные оценки.

Методы построения точечных оценок: метод моментов, оценки максимального правдоподобия, байесовские оценки. Свойства оценок: состоятельность, несмещённость, эффективность. Неравенство Рао-Крамера. Примеры.

8.2. Интервальные оценки.

Доверительный интервал и доверительная вероятность. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Ассимптотическая эффективность и нормальность точечных оценок и доверительные интервалы.

9. Критерии согласия

9.1. Типовые критерии согласия.

Простые и сложные гипотезы согласия. Критерии Колмогорова и Смирнова. Критерий хи-квадрат. Хи-квадрат распределение. Распределение статистик согласия. Критерии нормальности и характеризационные свойства. Критерий Шапиро-Уилка.

9.2. Вероятностное интегральное преобразование.

Роль равномерного распределения. Общий метод генерирования случайных величин с заданным распределением. Генерирование нормально распределённых случайных величин. Класс тестов Е.С.Пирсона.

10. Теория Неймана-Пирсона.

10.1. Тесты Неймана-Пирсона.

Простые и сложные гипотезы и альтернативы. Ошибки первого и второго рода. Лемма Неймана-Пирсона. Уровень значимости и функция мощности. Семейство с монотонным отношением правдоподобия.

10.2. Оптимальные тесты проверки гипотез.

Равномерно наиболее мощные в классе несмещённых тесты. Инвариантность. Минимальный полный класс байесовских решающих правил.

11. Введение в многомерный статистический анализ.

11.1. Выборочные характеристики

Выборочные корреляционная и ковариационная матрицы. Несмещённая оценка ковариации и коэффициента корреляции. Метод наименьших квадратов. Выборочный аналог уравнения линейной регрессии. Понятие о нелинейной регрессии.

11.2. Проверка гипотез о параметрах многомерного распределения.

Равномерно наиболее мощный тест независимости двух нормальных величин и его обобщение. Проверка гипотезы независимости множества нормальных величин. Тест максимального правдоподобия. Доверительные интервалы.

III. ОЦЕНИВАНИЕ

Для получения оценки **Опромежут.** используются следующие весовые множители:

0,5 – для оценки **Онакопленная1,** за работу студента в аудитории,
0,5 – для оценки **Оэкзамен1,** за экзамен, который является промежуточным контролем.

Для получения оценки **Оитоговая** используются следующие весовые множители:

0,5 – для оценки **Онакопленная2,** за работу студента в течение 3 и 4 модулей,
0,5 – для оценки **Оэкзамен2,** за экзамен, который является итоговым контролем.
Оитоговая = 0.5* Онакопленная2 + 0.5 * Оэкзамен2
Для получения оценки **Онакопленная2** используются следующие весовые множители:

0,4 – для оценки **Оработ2** за работу студентов во время практических занятий
0,3 – для оценки **Оконтр2,** за контрольную работу,
0,3 – для оценки **Одом.зад.,** за домашнее задание
Сумма коэффициентов должна равняться 1,0. Не хватает еще 0,3. Распределите.

Способ округления оценок – арифметический. В диплом выставляется итоговая оценка по дисциплине.

IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Оценочные средства для текущего контроля студента
Примерные задания для домашнего задания:

Задача 1. Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава выбирается 5 человек на конференцию. Найти вероятности следующих событий: A={будут избраны одни третьекурсники}; B={все первокурсники попадут на конференцию}; C={не будет избрано ни одного первокурсника}.

Задача 2. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходо придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода один час, а второго – два часа.

Задача 3. Разыскивая специальную книгу, студент решил обойти 3 библиотеки. Для каждой библиотеки равновероятно, есть в ее фондах такая книга или нет, и, если есть, то свободна она или занята другим читателем. Что более вероятно: студент получит книгу или нет?

Задача 4. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

Задача 5. Автоматизированный контроль знаний. Студенту задается 5 вопросов. На любой из них он может дать как правильный, так и неправильный ответ. Проверяет машина. Каким следует задать число правильных ответов, чтобы вероятность того, что студент, совершенно не знающий материал и отвечающий наугад, получил зачет, была не более 0.2?

Оценочные средства для промежуточной аттестации

Примерный перечень вопросов к экзамену по всему курсу или к каждому промежуточному и итоговому контролю для самопроверки студентов.

1. Частота и вероятность. Закон больших чисел. Теоремы Муавра-Лапласа.
2. Свойства частоты как оценки вероятности.
3. Почему для оценки вероятности обычно достаточно 100 наблюдений.
4. Основные признаки задач математической статистики. Задачи оценивания и проверки гипотез.
5. Точечное оценивание параметров. Свойства оценок.
6. Метод моментов.
7. Оценки максимального правдоподобия.
8. Состоятельность статистических оценок. Достаточное условие состоятельности.
9. Доверительные интервалы.
10. Критерии согласия. Общий принцип построения критериев согласия.
11. Наиболее распространённые критерии согласия.
12. Методы генерирования случайных величин.
13. Формула полной вероятности.
14. Неравенство Чебышева и следствия.

Примеры заданий промежуточного /итогового контроля

Задача 1. Три приятеля в одно и то же время независимо друг от друга пошли в бар. В городе есть 5 баров. Какова вероятность того, что ровно 2 приятеля встретятся в одном баре.

Задача 2. Два человека условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет другого 20 минут, но не позднее 13 часов, после чего уходит. Определить вероятность встречи.

Задача 3. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью, не меньшей а) 0,5; б) 0,9 , хотя бы один раз выпало 6 очков.

Задача 5. В поселке 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит в город, выбирая дни поездок по случайным мотивам независимо от остальных. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней (поезд ходит один раз в сутки)?

Задача 6. Две нормальные случайные величины X и У независимы. Найти плотность Z=X+Y.

Задача 7. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины прибором, не имеющим систематических ошибок: 369, 378, 315, 420, 385, 401, 372, 383 м. Определить оценку дисперсии ошибок измерений, если:

1) длина измеряемой базы известна: $\bar{x} = 375$;
2) длина измеряемой базы неизвестна.

Построить эмпирическую функцию распределения выборки.

Задача 8. Осуществлены две серии по n_1 и n_2 независимых испытаний, причем в первой серии событие А произошло m_1 раз, а во второй серии - m_2. Найти оценку максимального правдоподобия для неизвестной вероятности p события А в каждом испытании (считая эту вероятность одной и той же постоянной в обеих сериях).

Задача 9. Известно, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона ($P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$), равно λ. Таким образом, по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из распределения Пуассона для оценивания параметра λ можно предложить две оценки: $\hat{\lambda} = 1/n \sum_{i=1}^{n} x_i$ и $\overset{*}{\lambda} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$. Сравнить свойства этих оценок.

V. РЕСУРСЫ

5.1 Основная литература

1. Ивченко, Г.И. Введение в математическую статистику: учебник / Г. И.Ивченко, Ю.И.Медведев. - Изд. стер. - М.: Изд-во ЛКИ, 2015. - 599 с.
2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для бакалавров / В.Е.Гмурман. - 12-е изд. - М.: Юрайт, 2014. - 478 с. - (Бакалавр. Базовый курс). Гриф МО РФ

5.2 Дополнительная литература

1. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики: учебное пособие для бакалавров / В.Е.Гмурман. - 11-е изд.; перераб. и доп. - М.: Юрайт, 2013. - 404 с. - (Бакалавр. Базовый курс). Гриф МО РФ

2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для бакалавров / В.Е.Гмурман. - 12-е изд. - М.: Юрайт, 2014. - 478 с. - (Бакалавр. Базовый курс). Гриф МО РФ

3. Айвазян, С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики: учебник / С.А.Айвазян, В.С.Мхитарян. - М.: ЮНИТИ, 1998.

4. Колемаев, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика учебник / В.А.Колемаев, В.Н.Калинина. - М.: ИНФРА-М, 2001. Гриф МО РФ

3. Чистяков, В.П. Курс теории вероятностей: учебник. – М.: Дрофа, 2007. Гриф МО РФ

4. Шведов, А.С. Теория вероятностей и математическая статистика - 2 (промежуточный уровень): учебное пособие / А.С.Шведов; Гос. ун-т - Высшая школа экономики. - М.: ТЕИС, 2007.

5. Шведов, А.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / А.С.Шведов. - 2-е изд.; перераб. и доп. - М.: ГУ ВШЭ, 2005.

6. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие для бакалавров / В.Е.Гмурман; ЭБС Юрайт. - 12-е изд. - М.: Юрайт, 2013. - Режим доступа: http://www.biblio-online.ru/thematic/?14&id=urait.content.C80FD1C7-D8F8-41E5-AC10-9E423040BC52&type=c_pub. - Загл. с экрана. Гриф МО РФ

7. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики [Электронный ресурс]: учебное пособие для бакалавров / В.Е.Гмурман; ЭБС Юрайт. - 11-е изд.; перераб. и доп. - М.: Юрайт, 2013. - Режим доступа: http://www.biblio-online.ru/thematic/?12&id=urait.content.C89403D6-C53A-43F1-A537-13694D838F35&type=c_pub. - Загл. с экрана.

8. Ивашев–Мусатов, О.С. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс:] : учебник и практикум для академического бакалавриата/О.С.Ивашев-Мусатов; ЭБС Юрайт - - М.,2014. - Режим доступа: http://www.biblio-online.ru/home/%25D0%25A2%25D0%25B5%25D0%25BE%25D1%2580%25D0%25B8%25D1%258F+%25D0%25B2%25D0%25B5%25D1%2580%25D0%25BE%25D1%258F%25D1%2582%25D0%25BD%25D0%25BE%25D1%2581%25D1%2582%25D0%25B5%25D0%25B9+%25D0%25B8+%25D0%25BC%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25B5%25D0%25BC%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25B8%25D1%2587%25D0%25B5%25D1%2581%25D0%25BA%25D0%25B0%25D1%258F+%25D1%2581%25D1%2582%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25B8%25D1%2581%25D1%2582%25D0%25B8%25D0%25BA%25D0%25B0?10&type=f_search&text=false. - Загл. с экрана. Гриф УМО ВО

9. Калинина, В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебник / В.Н.Калинина; ЭБС Юрайт. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 20013. – 472 с. – (Бакалавр. Академический курс). - ISBN 978-5-9916-2700-9. - Режим доступа: http://www.biblio-online.ru/thematic/?5&id=urait.content.7721C8B4-5A62-4F8A-A262-A0AC5A39164F&type=c_pub. - Загл. с экрана. Гриф УМО

10. Монсик, В.Б. Вероятность и статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.Б.Монсик, А.А.Скрынников; ЭБС Знаниум. - 2-е изд. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. - 381 с.: ил. – ISBN 978-5-9963-2292-3. - Режим доступа: http://znanium.com/bookread.php?book=502130. - Загл. с экрана.

11. Попов, А.М. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебник и практикум для прикладного бакалавриата/ А.М.Попов, В.Н.Сотников; ЭБС Юрайт -2-е изд., исправ. и доп.- М.: Юрайт, 2014. - Режим доступа: http://www.biblio-online.ru/home/%25D0%25A2%25D0%25B5%25D0%25BE%25D1%2580%25D0%25B8%25D1%258F+%25D0%25B2%25D0%25B5%25D1%2580%25D0%25BE%25D1%258F%25D1%2582%25D0%25BD%25D0%25BE%25D1%2581%25D1%2582%25D0%25B5%25D0%25B9+%25D0%25B8+%25D0%25BC%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25B5%25D0%25BC%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%

25B8%25D1%2587%25D0%25B5%25D1%2581%25D0%25BA%25D0%25B0%25D1%258F+%25D1%2581%25D1%2582%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25B8%25D1%2581%25D1%2582%25D0%25B8%25D0%25BA%25D0%25B0?10&type=f_search&text=false. - Загл с экрана. Гриф УМО ВО

12. Сидняев, Н.И. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебник для бакалавров / Н.И.Сидняев; ЭБС Юрайт – М.: Юрайт, 2014. - Режим доступа: http://www.biblio-online.ru/home/%25D0%25A2%25D0%25B5%25D0%25BE%25D1%2580%25D0%25B8%25D1%258F+%25D0%25B2%25D0%25B5%25D1%2580%25D0%25BE%25D1%258F%25D1%2582%25D0%25BD%25D0%25BE%25D1%2581%25D1%2582%25D0%25B5%25D0%25B9+%25D0%25B8+%25D0%25BC%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25B5%25D0%25BC%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25B8%25D1%2587%25D0%25B5%25D1%2581%25D0%25BA%25D0%25B0%25D1%258F+%25D1%2581%25D1%2582%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25B8%25D1%2581%25D1%2582%25D0%25B8%25D0%25BA%25D0%25B0?10&type=f_search&text=false. - Загл с экрана. Гриф МО

5.3 Программное обеспечение

№ п/п	Наименование	Условия доступа
1.	Microsoft Office 2013 Prof +	*Государственный контракт*

5.4

5.5 Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№ п/п	Наименование	Условия доступа
	Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы	
2.	Электронно-библиотечная система Юрайт	URL: https://biblio-online.ru/

5.6 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Стандартное техническое оснащение аудиторного фонда филиала.