Канторовы множества с многомерными проекциями

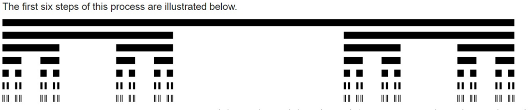
Ольга Фролкина
МГУ им. М.В.Ломоносова

Семинар научно-учебной группы «Эволюционные полугруппы и их приложения»
НИУ ВШЭ в Нижнем Новгороде

Определение

Стандартное канторово множество “средних третей” — это подмножество отрезка $[0,1]$, состоящее из всех точек вида $\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{3^2}+\frac{x_3}{3^3}+\ldots$, где $x_i \in \{0;2\}$ для каждого i.
Канторово множество — это пространство, гомеоморфное стандартному канторову множеству.

Хорошо известно описание стандартного канторова множества как пересечения последовательности вложенных компактов; начинаем с отрезка $[0,1]$, удаляем среднюю треть, затем удаляем средние трети каждого из оставшихся отрезков, и т.д. - см. рисунок:



The first six steps of this process are illustrated below.

Wikipedia: Cantor set

Топологическая характеризация канторовых множеств такова:

Теорема (Л.Э.Я. Брауэр, 1910)

Канторовы множества суть непустые метризуемые нульмерные совершенные компакты.

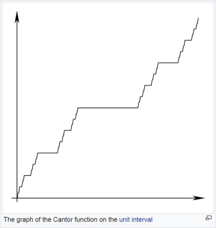
Г.Кантор в 1884 г. заметил, что

формула

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \ldots \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \ldots\right)$$

задает непрерывную сюръекцию $f : \mathcal{C} \to [0,1]$.

На рисунке — график функции $[0,1] \to [0,1]$, так называемой канторовой лестницы; упомянутая сюръекция f является ограничением канторовой лестницы на стандартное канторово множество $\mathcal{C}$.



The graph of the Cantor function on the unit interval

Wikipedia: Cantor function

L. Zoretti, 1906, упоминает в качестве известного тот факт, что

график $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^2$ — это канторово множество, проекция которого на ось Oy совпадает с отрезком $[0,1]$, и пытается расширить эту конструкцию.

С.А.Мелихов и Е.В.Щепин заметили, что

проекции графика $\Gamma(f)$ вдоль целого конуса направлений являются отрезками.

J. Cobb, 1994 — поставил вопрос:

Дана тройка чисел (n, m, k), где $n > m > k > 0$.
Существует ли такое канторово множество в $\mathbb{R}^n$, проекция которого на любую m-плоскость имеет размерность k ? (Кратко: (n, m, k)-множество.)

Речь здесь идет о топологической размерности; напомним

Определение размерности для метрических компактов

Полагаем $\dim X = -1 \iff X = \emptyset$.

Для $d \geqslant 0$: неравенство $\dim X \leqslant d$ равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное открытое покрытие пространства X множествами диаметра меньше ε, имеющее кратность $\leqslant d + 1$.

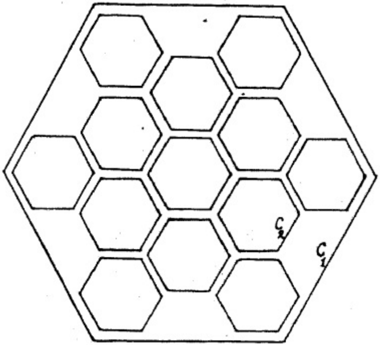
Если выполнено $\dim X \leqslant d$, но не выполнено $\dim X \leqslant d - 1$, значит, имеем $\dim X = d$.

(n, m, k)-множества известны для случаев

$(2, 1, 1)$	L. Antoine	1924
	S. Mazurkiewicz, S. Saks	1926
	E. Otto, A. Flores, G. Nöbeling (по отдельности)	1933
(n, m, m)	K. Borsuk	1947
$(3, 2, 1)$	J. Cobb	1994
	T.B. Rushing	1992
	O. Фролкина	2021
$(n, m, m-1)$	O. Фролкина	2010
$(n, n-1, k)$	S. Barov, J.J. Dijkstra, M. van der Meer	2012
$(\infty, m, m-1)$	S. Barov, J.J. Dijkstra, M. van der Meer	2012
$(n, n-1, n-2)$	O. Фролкина	2020

Построив (n, m, m)-множество, в качестве следствия К.Борсук получил положительный ответ на вопрос R.Fox: существует ли такой узел в $\mathbb{R}^3$, все плоские проекции которого содержат круги. (Провел простую замкнутую кривую через $(3, 2, 2)$-множество в $\mathbb{R}^3$. Узел можно получить даже тривиальный.)

На рисунке — первые 2 шага построения $(2, 1, 1)$-множества Антуана (далее эта же картинка с помощью преобразований подобия вставляется в каждый из 13 мелких шестиугольников, и т.д., берется пересечение полученной последовательности компактов). Используя эту конструкцию, Антуан построил в плоскости две простые дуги, не имеющие никакой общей поддуги, но пересечение которых при проекции на любую прямую содержит отрезок.



L. Antoine, Fund. Math. 1924

Наши результаты:

✓Применяя теорию ручных и диких компактов, получаем новые примеры $(n, n-1, n-1)$- и $(n, n-1, n-2)$-канторовых множеств. Оказывается, такие примеры могут быть построены сколь угодно малой изотопией из любого заданного канторова множества.

✓Для случая $(3, 2, 1)$ получаем еще более простой пример — самоподобное множество (это свойство избавляет нас от необходимости применять изотопию).

✓Канторовы множества, имеющие хотя бы одну многомерную проекцию, исключительны в смысле категории Бэра.

Определение (Простая цепь)

Простая цепь в полнотории $T \subset \mathbb{R}^3$ — это конечный набор $T_1, \ldots, T_k$, $k \geqslant 3$, попарно непересекающихся полноториев, удовлетворяющий условиям:
1) $T_1 \cup \ldots \cup T_k \subset T$;
2) центры $T_1, \ldots, T_k$ являются последовательными вершинами правильного выпуклого k-угольника, вписанного в центральную окружность T;
3) T_i и T_j зацеплены iff $|i - j| \equiv 1 \mod k$.

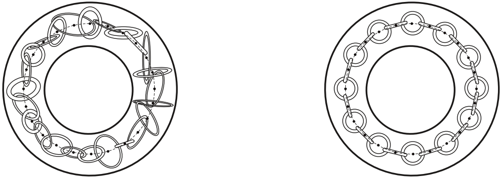


Рис.: Простые цепи с $2m = 24$ звеньями (цепи, расположенные, как на правом рисунке, назовем регулярными)

Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$ — полноторие, $S_1, \ldots, S_k : \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ — такие преобразования подобия, что $T_1 := S_1(T), \ldots, T_k := S_k(T)$ — простая цепь в T. Для каждого $\lambda \in \mathbb{N}$ положим

$$M_\lambda = \bigcup_{(i_1,\ldots,i_\lambda)\in\{1,\ldots,k\}^\lambda} S_{i_1} \circ S_{i_2} \circ \ldots \circ S_{i_\lambda}(T).$$

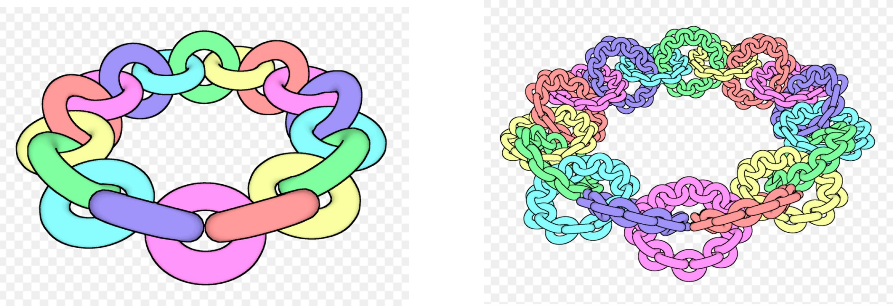
Тогда $T \supset M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots$. Пересечение $\mathcal{A}(T; S_1, \ldots, S_k) := \bigcap\limits_{\lambda=1}^{\infty} M_\lambda$ является канторовым множеством; назовем его **самоподобным ожерельем Антуана, порожденным набором** $(T; S_1, \ldots, S_k)$.

Для каждого $i = 1, \ldots, k$ имеем $\mathcal{A}(T; S_1, \ldots, S_k) \cap T_i = S_i(\mathcal{A}(T; S_1, \ldots, S_k))$, т.е. этот кусочек геометрически подобен $\mathcal{A}(T; S_1, \ldots, S_k)$.

Самоподобное ожерелье Антуана назовем **регулярным**, если простая цепь $T_1, \ldots, T_k$ в T регулярна. (В частности, k четно, и все коэффициенты подобия преобразований S_i одинаковы.)

Самоподобные ожерелья Антуана с разными k вложены неэквивалентно (Р.Шер, 1968). Для регулярного самоподобного ожерелья Антуана имеем $k \geqslant 20$ (М.Зелько, 2005).

На рисунке показаны первые шаги построения самоподобного ожерелья. Этот рисунок не точен (размеры торов не подходят для продолжения с помощью подобий; их количество равно 18).



Wikipedia: Antoine’s Necklace

Наконец, предъявим наш пример; пункты 2 и 3 теоремы доказывают существование объекта из пункта 1 теоремы:

Теорема (О. Фролкина, 2020)

1. *Пусть* $\mathcal{A}(T; S_1, \ldots, S_k) \subset \mathbb{R}^3$ *— самоподобное ожерелье Антуана, и* s_i *— коэффициент подобия преобразования* S_i *при* $i = 1, \ldots, k$. *Если* $s_1^2 + \ldots + s_k^2 < 1$, *то проекция* $\mathcal{A}(T; S_1, \ldots, S_k)$ *на* Π *является связным одномерным множеством для каждой плоскости* $\Pi \subset \mathbb{R}^3$.
   В частности, регулярное самоподобное ожерелье Антуана $\mathcal{A}(T; S_1, \ldots, S_{2m})$ *при* $2ms^2 < 1$ *является* $(3, 2, 1)$*-множеством.*
2. *Для полнотория* $B \subset \mathbb{R}^3$ *след. условия эквивалентны:*
   (1) $R_B > 3r_B$;
   (2) для любого достаточно большого целого числа m *существуют такие полноторие* $\mathbf{T}$ *и регулярная простая цепь* $T_1, \ldots, T_{2m}$ *в* $\mathbf{T}$, *что каждое* T_i *и* $\mathbf{T}$ *подобно* B.
3. *Для регулярного самоподобного ожерелья Антуана* $\mathcal{A}(T; S_1, \ldots, S_{2m})$, *если выполнено любое из следующих трех условий:*

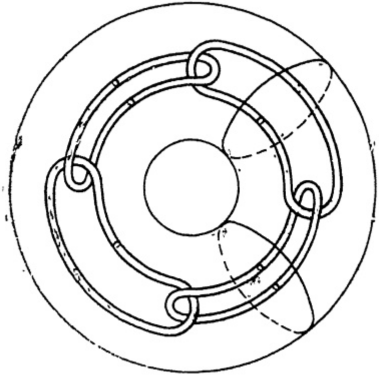
$$s < \frac{1}{2\pi}; \quad \frac{r_T}{R_T} < \frac{1}{2\pi - 1}; \quad 2m \geqslant 40, \qquad \text{то имеем} \quad 2ms^2 < 1.$$

Здесь r_T — радиус меридиана, R_T — радиус центральной окружности тора T.

По-видимому, открыт

Вопрос

Для самоподобного регулярного ожерелья Антуана $\mathcal{A}(T; S_1, \ldots, S_{2m})$ *при* $20 \leqslant 2m \leqslant 38$, *могут ли (некоторые) проекции оказаться двумерными?*
(В левой части первой цветной картинки видно, что тени нескольких торов, сливаясь, заполняют круг.)



Теорема (О. Фролкина, 2019)

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ *— канторово множество,* $n \geqslant 2$*. Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая* ε*-изотопия* $\{h_t\} : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$*, что* $h_1(K)$ *является* $(n, n-1, n-1)$*-множеством [значит, и автоматически* (n, m, m)*-множеством для любого* $m = 1, \ldots, n-2$*].*

Напомним появившееся в формулировке

Определение

Изотопией пространства $\mathbb{R}^n$ (также часто говорят об объемлющей изотопии) называется такой сохраняющий уровни гомеоморфизм $H : \mathbb{R}^n \times I \cong \mathbb{R}^n \times I$, что $h_0 = \mathrm{id}$; здесь $h_t : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ определено формулой $H(x, t) = (h_t(x), t)$.
Под ε*-изотопией* пространства $\mathbb{R}^n$ понимается такая изотопия $\{h_t\} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, что $d(h_t(x), x) \leqslant \varepsilon$ для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \in I$.

Теорема (О. Фролкина, 2019)

Для любого $n \geqslant 2$*, канторова множества* $K \subset \mathbb{R}^n$*, и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая* ε*-изотопия* $\{h_t\} : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$*, что* $h_1(K)$ *является* $(n, n-1, n-2)$*-множеством.*

Определение (Р. Бэр, 1899)

Пусть X — непустое топологическое пространство. Скажем, что подмножество $A \subset X$

- имеет *первую категорию в* X, если $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, где каждое M_i нигде не плотно в X;
- иначе A имеет *вторую категорию в* X.
- Подмножество $A \subset X$ *остаточное в* X, если его дополнение $X - A$ имеет первую категорию в X.

Чтобы это определение имело смысл, ограничимся рассмотрением *бэровских* пространств. Пространство X называется бэровским, если всякое непустое открытое его подмножество имеет вторую категорию в X; эквивалентно, всякое остаточное подмножество плотно в X.

Теорема (Р. Бэр для $\mathbb{R}$, 1899; Ф. Хаусдорф, 1914)

Пространство, метризуемое полной метрикой, является бэровским.

Часто теорема Бэра помогает доказать теоремы существования объектов со специальными свойствами — для этого достаточно показать, что множество объектов, этим свойством не обладающих, имеет первую категорию.

Пример

Пусть $X = \mathbb{R}$. Множество рациональных чисел (будучи объединением счетного количества одноточечных множеств) имеет первую категорию в X; а множество иррациональных чисел остаточно в X.

Пусть X — непустое бэровское пространство, $P \subset X$. Скажем, что **типичный элемент** $x \in X$ **принадлежит** P, если P остаточно в X; эта фраза осмысленна, т.к. в таком пространстве невозможно, что одновременно "типичный элемент X принадлежит P" и "типичный элемент X принадлежит $X - P$".

В бэровском пространстве X имеем:
$P \subset X$ остаточно $\quad \Leftrightarrow \quad$ P содержит плотное G_δ-подмножество X.
[G_δ-подмножество — это подмножество, представимое как пересечение счетного набора открытых множеств.]

Пример

Типичное вещественное число иррационально.

Этот пример "тривиален" — ведь множество рациональных числе счетно. Следующий пример гораздо интереснее: многочлены всюду плотны в пространстве функций $C(I, \mathbb{R})$, мощность множества многочленов такая же, как у всего $C(I, \mathbb{R})$, но они образуют "тощее" множество. Подробности — на следующем слайде. Здесь и далее $I = [0, 1]$.

Знаменитый пример применения теоремы Бэра — доказательство существования непрерывной нигде не дифференцируемой функции. Более того:

Пример (S. Banach (1931))

Рассмотрим пространство непрерывных функций $C(I, \mathbb{R})$ с метрикой $\rho(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)) \mid x \in I\}$; оно является полным. Его типичный элемент — нигде не дифференцируемая функция.

Вспомним слова А.Пуанкаре (написанные гораздо раньше появления теоремы Банаха — ?!):

«Логика приводит часто к уродствам. На протяжении полувека мы видели, как возникло множество причудливых функций; эти новые функции как будто старались возможно менее походить на те благородные функции, которые чему-нибудь да служат. Таковы, например, функции непрерывные, но без производных, и т.д. Более того, с точки зрения логической эти именно причудливые функции и являются наиболее общими; те же функции, которые мы находим без долгих поисков, образуют как бы частный случай. Для них остается лишь маленький уголок» [Пуанкаре, Наука и метод, 1908].

Ниже — еще несколько примеров применения теоремы Бэра.

Пример (Вложения; W. Hurewicz (1933))

В пространстве непрерывных отображений $C(X, I^{2n+1})$ введем метрику

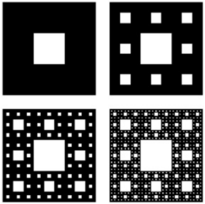
$$\rho(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

Получится полное пространство. Если X — компакт и $\dim X \leqslant n$, то типичный элемент пространства $C(X, I^{2n+1})$ является вложением.

Частный случай (существование хотя бы одного вложения) этой теоремы широко известен.

Пример (предположил B.Knaster, доказал S.Mazurkiewicz (1935))

Для типичного элемента $f \in C(I, \mathbb{R}^2)$ образ $f(I)$ гомеоморфен универсальной кривой Серпинского.



Пример (Узлы; J.Milnor (1964), H. Bothe (1966))

$Emb(S^1, \mathbb{R}^3)$ — бэровское; его типичный элемент — вложение, дикое в каждой точке.

Иными словами, типичный узел в $\mathbb{R}^3$ является диким в каждой своей точке.

Пример (Типичный компакт является канторовым множеством)

Пусть $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ — множество всех непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$. Для элементов $X, Y \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ определим расстояние Хаусдорфа

$$\delta(X,Y) = \inf\{\alpha > 0 \mid X \subset B(Y,\alpha) \text{ и } Y \subset B(X,\alpha)\}.$$

Тогда $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n), \delta)$ — полное метрическое пространство. Те элементы пространства $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, которые гомеоморфны канторову множеству, образуют в $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ плотное G_δ-подмножество.

Известно, что G_δ-подмножество полного метрического пространства само метризуемо полной метрикой. Обозначим $\mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ — подпространство пространства $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из всех тех $X \subset \mathbb{R}^N$, которые гомеоморфны канторову множеству. Итак, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ само является бэровским, значит, в нем имеет смысл понятие типичности.

Оказывается, все проекции типичного элемента $\mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ являются канторовыми. Это значит, что (n, m, k)-множества, которые мы обсуждали выше, достаточно редки.

Теорема (О. Фролкина, 2019)

Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех канторовых подмножеств $X \subset \mathbb{R}^N$, обладающих свойством: для всякого ненулевого линейного подпространства $L \subset \mathbb{R}^N$ проекция X на L является канторовым множеством. Для любого $N \geqslant 2$ множество $\mathcal{P}$ является остаточным в $\mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$.

Теорема (О.Фролкина, 2020)

Пусть $n \geqslant 2$. Канторовы множества в $\mathbb{R}^n$, имеющие общее положение относительно всех проекций, образуют плотное G_δ-подмножество в $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Канторовы множества в ℓ_2, имеющие общее положение относительно всех проекций с конечномерными ядрами, образуют плотное G_δ-подмножество в $\mathcal{C}(\ell_2)$.

Следствие

Для любого $n \geqslant 2$ типичное непрерывное отображение $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ является вложением, а его образ $f(\mathcal{C})$ имеет общее положение относительно всех проекций.

Это дает ответ на вопрос Дж. Кобба (1994).

Определение

Пусть H — собственное линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$ (или в ℓ_2).
Пусть $p_H : \mathbb{R}^n \to H^\perp$ (соотв. $p_H : \ell_2 \to H^\perp$) — ортогональная проекция на $H^\perp$.

Для непустого подмножества M в $\mathbb{R}^n$ (или в ℓ_2) обозначим слои ограничения $p_H|_M$ через $F(A) = (p_H|_M)^{-1}(p_H(A))$, где $A \in M$.

Назовем слой $F(A)$ *невырожденным*, если $|F(A)| > 1$.

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ (или $M \subset \ell_2$) имеет *общее положение относительно p_H или H* если, обозначая $k = \dim H$, имеем:
✓ $p_H|_M$ имеет лишь конечное число невырожденных слоев;
✓ всякий невырожденный слой $F(A)$ состоит из $\leqslant k+1$ точек, которые являются вершинами симплекса размерности $|F(A)| - 1$;
✓ $\sum\limits_{A \in M} (|F(A)| - 1) \leqslant k$.
Говорим, что M имеет *общее положение относительно всех проекций*, если M имеет общее положение относительно *всякого* H.

Вопрос Кобба: “Cantor sets that raise dimension under all projections and those in general position with respect to all projections are both dense in the Cantor sets in $\mathbb{R}^m$ — which (if either) is more common, in the sense of category or dimension or anything?”

◇