Доказательство грубости растягивающих отображений

Иванова Анна

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
“ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ”

НИЖЕГОРОДСКИЙ ФИЛИАЛ

Научный руководитель: Доцент, кандидат физ.-мат. наук, Иван Дмитриевич Ремизов

24 ноября 2021 г.

Определения

Определение

Пусть X *— полное метрическое пространство с функцией расстояния* $d(\cdot,\cdot)$. *Обозначим* $B_\delta(x)$ *замкнутый шар радиуса* δ *с центром в* $x \in X$. *Мы называем непрерывное отображение* $f : X \to X$ *растягивающим, если* $\exists\ \varepsilon > 0$ *и* $q < 1$ *такие что два следующих условия выполняются:*

1. $\forall x$ *образ* $f(B_\delta(x))$ *содержит шар* $B_{\delta/q}(f(x))$*;*

2. $d(x,y) \le q d(f(x), f(y))$ $\forall x$ *и* y *таких что* $d(x,y) \le 2\varepsilon$*.*

Определение

Отображения $f\colon X \to X$ *и* $g\colon Y \to Y$ *топологических пространств* X *и* Y *называются топологически сопряженными, если найдется такой гомеоморфизм* $h : X \to Y$*, что* $g \circ h = h \circ f$*.*

Теорема о топологической сопряжённости растягивающих отображений в полном метрическом пространстве

Теорема

Пусть f и g растягивающие отображения (с одинаковыми константами ε и q) и пусть $\sup\limits_{x \in X} d(f(x), g(x)) = \nu < \varepsilon \frac{1-q}{q}$. Тогда f и g топологически сопряжённые.

Доказательство Д.В. Тураева

Расмотрим произвольную точку $x \in X$, и пусть $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ – траектория точки x при отображении g, то есть $x_{n+1} = g(x_n), x_0 = x$. Обозначим $B_n = B_\varepsilon(x_n)$. Проверим, что отображение f имеет корректно определённое обратное $\hat{f}_n$ на B_{n+1} такое что $\hat{f}_n(B_{n+1}) \subset B_n$. Действительно, из первого пункта определения растягивающего отображения имеет место включение $f(B_n) \supset B_{\varepsilon/q}(f(x_n))$. Если $d(g(x_n), f(x_n)) \le \nu < \varepsilon\frac{1-q}{q}$, из этого следует что $B_{n+1} = B_\varepsilon(g(x_n)) \subset B_{\nu+\varepsilon}(f(x_n)) \subset B_{\varepsilon/q}(f(x_n))$, следовательно $B_{n+1} \subset f(B_n)$.

Это значит, что для любого $y \in B_{n+1}$ существует хотя бы один $\hat{y} \in B_n$ такой что $f(\hat{y}) = y$. Такой $\hat{y}$ определяется единственным образом: если существуют $\hat{y}_1 \in B_n$ и $\hat{y}_2 \in B_n$ такие что $f(\hat{y}_1) = f(\hat{y}_2) = y$, имеем $d(\hat{y}_1, \hat{y}_2) \leq 2\varepsilon$, следовательно, так как отображение f – растягивающее, справедлива оценка $d(\hat{y}_1, \hat{y}_2) \leq q d(y, y) = 0$, означающая что $\hat{y_1} = \hat{y_2}$. Таким образом, искомое обратное к f отображение $\hat{f}_n \colon B_{n+1} \to B_n$ задаётся равенством $\hat{f}_n(y) = \hat{y}$.

Из того, что отображение f растягивающее, следует, что обратное отображение $\hat{f}_n$ сжимающее на B_{n+1}:

$$d(\hat{f}_n(y)), \hat{f}_n(z)) \leq qd(y, z). \tag{1}$$

Рассмотрим пространство последовательностей $(y_n)_{n\geq 0}$ точек $y_n \in B_n$. Введём на этом пространстве расстояние следующим образом: $D\Big((y_n)_{n\geq 0}, (z_n)_{n\geq 0}\Big) = \sup\limits_{n\geq 0} d(y_n, z_n)$. Это полное метрическое пространство. Зададим отображение

$$\Psi\colon (y_n) \mapsto (\hat{f}_n(y_{n+1})). \tag{2}$$

Докажем, что отображение Ψ сжимающее. В самом деле пусть (y_n) и (z_n) – такие последовательности точек множества X, что $y_n \in X \ni z_n$. Тогда

$$D(\Psi(y.), \Psi(z.)) \overset{(2)}{=} \sup_n d(\hat{f}_n(y_{n+1}), \hat{f}_n(z_{n+1})) \overset{(1)}{\leq} d \sup_n d(y_{n+1}, z_{n+1}).$$

Исходя из этого , оно имеет единственную(уникальную) фиксированную точку $(y_n)_{n\geq 0}$. По построению, это траектория отображения f, т.е. $f(y_n) = y^*_{n+1}$ $\forall n \geq 0$. Таким образом, для любого данного $x \in X$, мы показали существование и единственность точки $y \in X$ такой, что траектория $(y_n)_{n\geq 0}$ точки $y = y_0$ при отображении f, удовлетворяющей $d(y_n, x_n) \leq \varepsilon$ $\forall n \geq 0$, (напомним что $(x_n)_{n\geq 0}$ это траектория $x = x_0$ при отображении g).

Обозначим отображение $x \mapsto y_0$ как h. Исходя из симметричности проблемы, отображение h это биекция: для любого данного $y \in X$ существует единственное $x = h^{-1}(y) \in X$ такое что траектория $(x_n)_{n\geq 0}$ точки $x = x_0$, определяемая g удовлетворяет

$$d(y_n, x_n) \leq \varepsilon \; \forall n \geq 0,$$

где $(y_n)_{n\geq 0}$ это траектория $y = y_0$ определяемая f.

Исходя из единственности,

$$h \circ g = f \circ h$$

т.е. h сопряженное между f и g. Остается показать, что h (отсюда, симметрично, h^{-1}) непрерывное. Во-первых, заметим что

$$d(y_n, x_n) < \varepsilon$$

$\forall n \geq 0$. Действительно, мы доказали, что $d(y_{n+1} = f(y_n), x_{n+1} = g(x_n)) \leq \varepsilon$. Это означает, что $d(f(y_n), f(x_n)) \leq \varepsilon + \nu$, а следовательно $d(y_n, x_n) \leq q(\varepsilon + \nu) < \varepsilon$, как и утверждалось.

Теперь, возьмем любое достаточно большое N. Если x' взято достаточно близко к x, тогда если отображение g непрерывное (вместе со всеми своими итерациями), мы имеем что $x'_n = g^n(x')$ достаточно близко к $x_n = g^n(x)$ $\forall n = 1, ..., N$, поэтому

$$d(y_n = g^n(h(x)), y'_n = g^n(h(x')) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x'_n) + d(y'_n, x'_n) \leq 2\varepsilon \ \forall n$$

Из условия g — растягивающее, это подразумевает

$$d(h(x), h(x')) \leq 2\varepsilon q^N,$$

т.е. мы можем уменьшить $d(h(x), h(x'))$ настолько насколько хотим при $N \to +\infty$ и $x' \to x$.

Спасибо за внимание!

Список литературы

А. Б. Каток, Б.Хассельблат. Введение в современную теорию динамических систем Элементы теории функции и функционального анализа.// ФАКТОРИАЛ, 1999, С. 71-72.