Базовые структуры функционального анализа

Дуруев Алексей, Иванова Анна,
Минеев Денис, Рекшинский Михаил,
Фёдоров Роман, Чугунов Валентин

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
“ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ”
НИЖЕГОРОДСКИЙ ФИЛИАЛ

Научные руководители: Доцент, кандидат физ.-мат. наук, Иван Дмитриевич Ремизов,
Доцент, кандидат физ.-мат. наук, Олег Евгеньевич Галкин
Доцент, кандидат физ.-мат. наук, Светлана Юрьевна Галкина

14 апреля 2021 г.

Список изученных тем

1. Функции - наивное и строгое определение, отношения эквивалентности и факторизация. (Анна Иванова)

2. Линейные пространства, подпространства, операторы и функционалы. (Денис Минеев)

3. Ядро, образ, собственные значения и точечный спектр линейного оператора. (Валентин Чугунов)

4. Структуры на линейном пространстве: метрика, норма, скалярное произведение. (Алексей Дуруев)

5. Норма линейного оператора. Ограниченные и неограниченные линейные операторы и функционалы. (Михаил Рекшинский)

6. Функция с ограниченным изменением. Свойства полного изменения функции. Функции скачков. (Роман Федоров)

Наивное опеределение функции

Определение

Наивное определение функции в широком смысле.

Пусть A, B, C *— непустые множества и* $C \subset A$*. Тогда* ***функция f*** *на множестве* C*, а также частичная функция f на A со значениями в множестве* B *задана, если каждому элементу x* $\in C$ *единственным образом поставлен в соответствие элемент, обозначаемый f(x) и f(x)* $\in B$*.*

Запись «$f : A \longrightarrow B$*» и «*$A \xrightarrow{f} B$*», если функция* f *определена на множестве* A *и имеет значения в множестве* B*.*

Строгое определение функции

Определение

Строгое определение функции (через отношение).

Отношение с единственным правым $f \subset A \times B$ *называется* ***частичной функцией*** *с областью определения* $D(f)$ *и областью значений* $R(f)$*, если и только если* $D(f) \neq A$*.*

Отношение $f \subset A \times B$ *с единственным правым, всюду определенное на* A *называется* ***функцией*** $f : A \to B$ *с областью определения* $D(f) = A$ *и областью значений* $R(f)$*. Используют следующие записи:* $b = f(a)$*,* $(a, b) \in f$ *и* afb*.*

Линейные пространства, подпространства

Определение

Множество V называется **линейным (векторным) пространством** *над полем P, если заданы операция сложения двух элементов множества V (т.е. каждой паре элементов этого множества поставлен в соответсвие третий элемент этого же множества, называемый их суммой) и операция умножения элеманта множества V на элемент поля P и выполняются необходимые условия.*

Определение

Пусть дано линейное пространство V, его подмножество W называется **подпространством***, если оно замкнуто относительно операций, определенных в пространстве V.*

Операторы

Определение

Оператором *называется правило, по которому каждому элементу* x *некоторого непустого множества* X *ставить в соответствие единственный элемент y некоторого непустого множества* Y. *Говорят, что оператор действует из* X *в* Y.

Пример

M_n *линейное пространство многочленов степени не выше n:*
$M_n = \{P_n(x) \mid P_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n\}$.
Оператор D, *который ставит каждому многочлену* $P_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ *из* M_n *ставит в соответствие многочлен* $Q_{n-1}(x) = a_1 + 2a_2x + ... + na_nx^{n-1}$ *из* M_{n-1}, *называется* ***оператором дифференцирования многочленов***

Функционалы

Определение

Оператор, заданный на произвольном множестве и имеющий числовую область значений, обычно множество вещественных или комплексных чисел.

Пример

Максимум или минимум функции на отрезке (ставит в соотсветсвие отрезку максимальное или минимальное значение на этом отрезке)

Собственые значения и собственные вектора линейного оператора

Определение

Пусть V - векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ и $A : V \supset D(A) \longrightarrow V$ - линейный оператор, тогда число λ называется ***собственным значением(числом)*** *линейного оператора, а вектор x называется* ***собственным вектором****, если выполняется $A(x) = \lambda x$.*

Точечный спектр

Определение

Точечным спектром *линейного оператора называется набор всех собственных значений* $(A, D(A))$ *и обозначается как* $\delta_p(A)$.

Замечание

Точечный спектр можно определить таким же образом для линейных операторов в векторных пространствах над полем $\mathbb{R}$ *или над другими полями.*

Ядро и образ линейного оператора

Определение

Пусть $A : V \supset D(A) \longrightarrow V$ *— линейный оператор, тогда* ***ядром*** *называется такое множетсво векторов* x*, что результатом действия линейного оператора* A *на эти вектора является 0. И обозначается как*

$$ker(A) = \{x \quad | \quad x \in D(A), A(x) = 0\}.$$

Определение

Образом *линейного оператора называется такое множество векторов* $y \in V$*, что они являются результатом действия линейного оператора* A*. Обозначение:* $Im(A) = \{y \quad | \quad y \in V, A(x) = y\}$

Метрическое пространство и метрика

Определение

Метрическим пространством *называется пара (X, p), состоящая из некоторого множества (пространства) элементов X и расстояния, то есть однозначной, неотрицательной, действительной функциии p(x,y), определённой* $\forall x, y \in X$ *и подчинённой следующим аксиомам:*

1) $p(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2) $p(x, y) = p(y, x)$ *(аксиома симметрии),*

3 $p(x, z) \le p(x, y) + p(y, z)$ *(аксиома треугольника).*

Обозначение: $R = (X, p)$.

Пример

Множество действительных чисел с расстоянием $p(x, y) = |x - y|$ *образует метрическое пространство* $\mathbb{R}^1$.

Нормированные пространства

Определение

*Пусть L — линейное пространство. Однородно-выпуклый функционал q, определённый на L, называется **нормой**, если он удовлетворяет следующим условиям:*

1) $q(x) \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2) $q(x+y) \leq q(x) + q(y) \quad \forall x, y \in L$,

3) $q(\alpha \cdot x) = |\alpha| \cdot q(x) \quad \forall \alpha$.

Определение

Линейное пространство L, в котором задана некоторая норма, называется ***нормированным пространством****. Норму элемента $x \in L$ будем обозначать символом $\|x\|$.*

Пример

Прямая линия $\mathbb{R}^1$ становится нормированным пространством, если $\forall x \in \mathbb{R}^1$ положить $\|x\| = |x|$.

Евклидовы пространства

Определение

Один из хорошо известных способов введения нормы в линейном пространстве — это задание в нём скалярного произведения.

Скалярным произведением *в действительном линейном пространстве* R *называется действительная функция* (x, y) *определённая* $\forall x, y \in R$ *и удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $(x, y) = (y, x)$*,*

2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$*,*

3) $(\lambda \cdot x, y) = \lambda \cdot (x, y)$*,*

4) $(x, x) \geq 0$*, причём* $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$*.*

Линейное пространство с фиксированным в нём скалярным произведением называется ***евклидовым пространством****.*

Примеры евклидовых пространств

Пример

n-мерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$, элементами которого служат системы действительных чисел $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, с обычными операциями сложения, умножения на число и скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i, y_i),$$

представляет собой хорошо известный пример евклидова пространства.

Норма линейного оператора

Определение

Пусть $(V_1, \|\cdot\|_1)$ *и* $(V_2, \|\cdot\|_2)$ *— нормированные векторные пространства над одним и тем же полем* $\mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C}$. *Пусть* $A : V_1 \supset D(A) \to V_2$ *— линейный оператор. Тогда по определению* ***норма оператора*** A *задается следующим равенством:*
$$\|A\| = \sup_{0 \neq x \in D(A)} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}.$$

Замечание

Нормой функционала f *будем называть число* $\|f\|$ *со свойствами:*

1) $\|f\| = \sup\limits_{0 \neq x \in D(A)} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$;

2) $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$, *где* x *принадлежит нормированному пространству* E.

Ограниченный линейный опрератор

Определение

Пусть $(V_1, \|\cdot\|_1)$ *и* $(V_2, \|\cdot\|_2)$ *— нормированные векторные пространства над одним и тем же полем* $\mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C}$*.* ***Линейный оператор*** A*, действующий из* $(V_1, \|\cdot\|_1)$ *в* $(V_2, \|\cdot\|_2)$*, называется* ***ограниченным****, если он определен на всем* $(V_1, \|\cdot\|_1)$ *и каждое ограниченное множество переводит снова в ограниченное.*

Замечание

В силу линейности A *это определение можно сформулировать так: оператор* A *ограничен, если существует такая постоянная* C*, что для всякого* $f \in (V_1, \|\cdot\|_1)$

$$\|Af\| \leq C\|x\|.$$

Функция с ограниченным изменением

Определение

Функция f, заданная на отрезке $[a, b]$, называется ***функцией с ограниченным изменением****, если существует такая постоянная C, что, каково бы ни было разбиение отрезка $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ выполнено равенство*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C. \tag{1}$$

Замечание

Всякая монотонная функция имеет ограниченное изменение, так как для неё сумма, стоящая в (1) слева, не зависит от выбора разбиения и всегда равна $|f(b) - f(a)|$.

Полное изменение функции

Определение

Пусть функция f — функция с ограниченным изменением. Точная верхняя грань сумм (1) по всевозможным конечным разбиениям отрезка $[a,b]$ называется ***полным изменением (или полной вариацией)*** *функции f на отрезке $[a,b]$ и обозначается*

$$V_a^b[f].$$

Таким образом,

$$V_a^b[f] = \sup \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

Замечание

Функция f, заданная на всей прямой, называется функцией с ограниченным изменением, если величины $V_a^b[f]$ ограничены в совокупности. При этом

$$\lim_{a\to-\infty, b\to\infty} V_a^b[f]$$

назывется полным изменением функции f на прямой $-\infty < f < \infty$ и обозначается

$$V_{-\infty}^{\infty}[f]$$

.

Свойства полного изменения функции

Определение

Функции с полным изменением обладают следующими свойствами :

1) Если α — постоянное число, то $V_a^b[\alpha f] = |\alpha| V_a^b[f]$.

2) Если f и g — функции с ограниченным изменением, $f+g$ тоже имеет ограниченное изменение и $V_a^b[f+g] \leq V_a^b[f] + V_a^b[g]$.

По свойствам 1 и 2 линейная комбинация функций с ограниченным изменением есть функция с ограниченным изменением. Функции с ограниченным изменением образуют линейное пространство.

3) Если $a < b < c$, то $V_a^b[f] + V_b^c[f] = V_a^c[f]$.

4) Функция $\vartheta(x) = V_a^x[f]$ монотонно неубывающая.

5) Если f непрерывна в некоторой точке x^* (или на всем отрезке), то непрерывна и ϑ.

Функции скачков

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ — конечное или счетное множество точек на $[a, b]$. Поставим в соответствие каждой из этих точек x_n два числа g_n и h_n так, что

$$\sum_n (|g_n| + |h_n|) < \infty.$$

Предположим, кроме того, что если $x_n = a$, то $g_n = 0$, а если $x_n = b$, то $h_n = 0$. Положим

$$\Psi(x) = \sum_{x_n \leq x} g_n + \sum_{x_n < x} h_n.$$

Мы будем называть **функцией скачков** любые функции данного вида. Полное изменение функции $\Psi(x)$ равно

$$\sum_n (|g_n| + |h_n|).$$

Точками разрыва функции служат те x_n, для оторых хотя бы одно из чисел g_n, h_n отлично от нуля; при этом

$$\Psi(x_n) - \Psi(x_n - 0) = g_n, \Psi(x_n + 0) - \Psi(x_n) = h_n.$$

Отсюда возникает следующее утверждение.

Утверждение

Всякая функция f с ограниченным изменением, определенная на $[a, b]$, может быть представлена и притом единственным образом в виде

$$f = \Psi + \varphi,$$

где φ непрерывна, а функция Ψ скачков.

Спасибо за внимание!

Список литературы

- И.Д. Ремизов. Некоторые обозначения и факты теории множеств. // Научно-методический журнал «Математика в высшем образовании», 2011, № 9, С. 6-13.
- А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функции и функционального анализа.// ФИЗМАТЛИТ, 2004, С. 54-62, 130-139, 150-156, 233-240, 351-356.
- В.И. Богачев, О.Г. Смолянов. Действительный и функциональный анализ: университетский курс.// Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2009.