Задачи описания пространства, сопряженного к гильбертову пространству с воспроизводящим ядром. Некоторые приложения в комплексном анализе.

Напалков Валерий Валентинович

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН

Уфа, 2021

Гильбертово пространство над полем комплексных чисел.

Линейное векторное пространство H над полем комплексных чисел называется гильбертовым пространством (над полем комплексных чисел), если определено скалярное произведение, т.е. функция, действующая из $H \times H \to \mathbb{C}$, такая, что

1. $(x, y)_H = \overline{(y, x)}_H, \quad \forall x, y \in H;$
2. $(x, y + z)_H = (x, y)_H + (x, z)_H, \quad \forall x, y, z \in H;$
3. $(\lambda \cdot x, y)_H = \lambda \cdot (x, y)_H, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x, y \in H;$
4. $(x, x)_H \geq 0, \forall x \in H, \quad (x, x)_H = 0 \iff x = 0.$
5. Пространство H является полным относительно нормы $\|x\| = \sqrt{(x, x)_H}$.

Если последнее условие не выполняется, то пространство H называется предгильбертовым.

Гильбертово пространство над полем комплексных чисел. Примеры.

- Пространство последовательностей комплексных чисел l_2, для которых ряд из квадратов модулей элементов сходится. Пусть x, y – две такие последовательности:

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}, \quad \|x\|^2_{l_2} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2;$$

$$y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}, \quad \|y\|^2_{l_2} = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2.$$

$(x, y)_{l_2} \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \overline{y_k}.$

Гильбертово пространство над полем комплексных чисел. Примеры.

- Весовое пространство последовательностей комплексных чисел l_2^w; пусть $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ – некоторая последовательность положительных чисел; x, y – две последовательности:

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}, \quad \|x\|_{l_2}^{w} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \cdot w_k};$$

$$y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}, \quad \|y\|_{l_2}^{w} = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \cdot w_k.$$

$(x, y)_{l_2^w} \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \overline{y_k} \cdot w_k.$

Гильбертово пространство над полем комплексных чисел. Примеры.

- Пространство измеримых функций $L_2(0,1)$, суммируемых с квадратом модуля на интервале $(0,1)$; элементами пространства $L_2(0,1)$ являются классы эквивалентных функций. Две функции попадают в один класс эквивалентности, если они равны почти всюду на интервале $(0,1)$.

$$\|f\|^2_{L_2(0,1)} = \int_0^1 |f(x)|^2\, dx.$$

Соответственно,

$$(f,g)_{L_2(0,1)} = \int_0^1 f(x) \cdot \overline{g(x)}\, dx.$$

Общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Теорема Рисса.

Отображение $S\colon H \to \mathbb{C}$, удовлетворяющее условиям

1. $S(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot S(x) + \beta \cdot S(y), \forall x, y \in H, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, линейность;
2. $|S(x)| \leq C\|x\|_H$, $\forall x \in H$, ограниченность (непрерывность),

называется линейным непрерывным функционалом над H.
Нормой функционала S называется число:

$$\|S\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|S(x)|}{\|x\|_H}$$

Теорема A (Рисса-Фишера)

Для любого линейного непрерывного функционала S над H найдется единственный элемент $u \in H$, такой, что $S(x) = (x, u)_H, \forall x \in H$. При этом, $\|S\| = \|u\|_H$.

Далее мы приводим сведения из книги

Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, Москва: Мир, 1979. С. 588.

Определение 1

Линейный непрерывный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H называется положительным, если величина $(x, Ax)_H$ положительна для любого $x \in H$, $x \neq 0$.

Определение 2

Числа

$$C_1 = \inf_{\substack{x \in H \\ x \neq 0}} \frac{(x, Ax)}{\|x\|^2}, \qquad C_2 = \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0}} \frac{(x, Ax)}{\|x\|^2}$$

называются нижней и верхней гранью самосопряженного оператора A.

Эквивалентные нормы в гильбертовом пространстве

Очевидно, что выполнены неравенства

$$C_1\|x\|^2 \leq (x, Ax) \leq C_2\|x\|^2, \forall x \in H.$$

Лемма 1

Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) и предположим, что в H определено еще одно скалярное произведение $(x, y)_1$ Следующие условия эквивалентны:

1. *Нормы определяемые скалярными произведениями (x, y), $(x, y)_1$ эквивалентны, т.е. найдутся постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что для любого элемента $x \in H$ выполнены неравенства:*
$$C_1\|x\| \leq \|x\|_1 \leq C_2\|x\|.$$
2. *Существует линейный непрерывный самосопряженный оператор A, являющийся автоморфизмом банахова пространства H с нормой $\|\cdot\|$ такой, что*
$$\|x\|_1^2 = (x, Ax), \quad \forall x \in H. \tag{1}$$

Пусть H – гильбертово пространство. Пусть имеется некоторая полная в пространстве H система функций $\{e(\cdot,t)\}_{t\in\Omega}$. Каждому $f\in H$ поставим в соответствие функцию

$$\widetilde{f}(t) \stackrel{def}{=} (e(\cdot,t),f)_H, \quad t\in\Omega. \tag{2}$$

Совокупность $\{\widetilde{f}: f\in H\}$ образует гильбертово пространство $\widetilde{H}$ с воспроизводящим ядром, со скалярным произведением:

$$(\widetilde{f},\widetilde{g})_{\widetilde{H}} \stackrel{def}{=} (g,f)_H.$$

Требуется описать пространство $\widetilde{H}$, т.е. желательно выяснить из каких элементов состоит пространство $\widetilde{H}$ и найти хорошо известную топологию, которая эквивалентна исходной наведенной топологии $\widetilde{H}$.

Задача об описании сопряженного пространства

Например, необходимо выяснить, можно ли найти меру ν на Ω такую, что в пространстве $\widetilde{H}$ ввести норму вида

$$\|\widetilde{f}\|_\nu \overset{def}{=} \sqrt{\int_\Omega |f(t)|^2\, d\nu(t)}, \tag{3}$$

которая будет эквивалентна исходной норме $\|\cdot\|_{\widetilde{H}}$?
Проблему описания сопряженного пространства в случае $H = L_2(-1,1)$, $e(\xi,t) = \exp(it\xi)$, $\xi \in (-1,1)$, $t \in \mathbb{C}$ решает известная теорема Пэли – Винера.

Теорема B (Пэли – Винер)

Целая функция $g(z)$, $z \in \mathbb{C}$ представляется в виде

$$g(z) = (e^{zx}, f(x))_{L_2(-1,1)} = \int_{-1}^{1} e^{izx}\overline{f(x)}\,dx, \qquad (4)$$

где $f(x)$ – некоторая функция из пространства $L_2(-1,1)$, тогда и только тогда, когда

1. *$g(z)$ есть целая функция экспоненциального типа;*
2. *$g(z)$ на вещественной оси принадлежит классу $L_2(\mathbb{R})$, т.е.*

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\,dx < \infty.$$

Теорема Пэли – Винера дает ответ на вопрос: можно ли описать пространство, сопряженное к пространству $L_2(-1, 1)$ в терминах преобразования Фурье? А именно, в теореме Пэли – Винера найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых целая функция имеет вид (4).

Теорема Пэли –Винера также находит применение в задачах интерполяции целых функций. Например, с ее помощью доказывается следующая известная теорема Котельникова–Шеннона, которая используется в теории передачи информации.

Пусть $\vartheta > 0$ положительное число.

Теорема C (В.А.Котельников)

Любая целая функция $g(z)$, удовлетворяющая условиям

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\, dx < \infty,$$

и

$$|g(z)| \le Ce^{\vartheta \cdot |Imz|}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где $C > 0$ – постоянная, представляется в виде:

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g\left(k \cdot \tfrac{\pi}{\vartheta}\right) \frac{sin\pi(\vartheta \cdot x - \pi k))}{\vartheta \cdot x - \pi k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Актуальность темы.

Для решения различных задач комплексного анализа часто используется метод перехода в сопряженное пространство, где двойственная задача решается легче. Таковы, например, задачи интерполяции аналитических функций, вопросы уравнений свёртки. Чтобы использовать такой метод необходимо найти “удачное” описание сопряженного пространства.

Важным классом гильбертовых пространств являются гильбертовы пространства с воспроизводящим ядром, состоящее из функций $f: M \to \mathbb{C}$, заданных на некотором множестве точек M.

Определение 3

Пространство H называется гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром, если для любого $z_0 \in M$ функционал $\delta_{z_0} : f \to f(z_0)$ является линейным и непрерывным функционалом над H.

По теореме Рисса– Фишера всякий линейный непрерывный функционал над H порождается некоторым элементом из H. Поэтому найдется функция $K_H(z, z_0) \in H$ такая, что выполнено равенство $f(z_0) = (f(z), K_H(z, z_0))_H$. Так определяется функция $K_H(z, \xi)$, $z, \xi \in M$ которая называется воспроизводящим ядром пространства H.

Примеры RKHS.

- Пространство последовательностей комплексных чисел l_2 можно рассматривать как пространство комплекснозначных функций, заданных на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Если k_0 – фиксированное натуральное число и x – произвольная последовательность из l_2 ($\|x\|_{l_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$), то справедливо неравенство

$$|x_{k_0}| \le \|x\|_{l_2}.$$

  Поэтому пространство l_2 – гильбертово пространство с воспроизводящим ядром. Легко видеть, что воспроизводящее ядро пространства l_2 имеет вид: $K_{l_2}(k,j) = \delta_k^j$, $k,j \in \mathbb{N}$, δ_k^j – символ Кронекера.
-

- Весовое пространство последовательностей комплексных чисел l_2^w можно рассматривать как пространство комплекснозначных функций, заданных на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Если k_0 – фиксированное натуральное число и x – произвольная последовательность из l_2^w $(\|x\|_{l_2^w}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 w_k)$, то выполнено неравенство

$$|x_{k_0}| \leq \frac{1}{w_k} \|x\|_{l_2^w}.$$

  Поэтому пространство l_2^w – гильбертово пространство с воспроизводящим ядром. Легко видеть, что воспроизводящее ядро пространства l_2^w имеет вид: $K_{l_2^w}(k,j) = \frac{1}{w_k}\delta_k^j,\ k,j \in \mathbb{N},\ \delta_k^j$ – символ Кронекера.

-

Примеры RKHS.

- Пространство Бергмана, состоящее из голоморфных в односвязной жордановой области G и суммируемых с квадратом модуля по площади является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром. Пусть G – односвязная область в $\mathbb{C}$ с жордановой границей. Через $B_2(G)$ обозначим пространство голоморфных в G функций, для которых

$$\|f\|^2_{B_2(G)} = \int_G |f(z)|^2\, dv(z) < \infty,$$

где $dv(z)$ – элемент площади. Если $f \in B_2(G)$, $z_0 \in G$ – произвольная фиксированная точка, D_{z_0} – круг с центром в точке z_0, и $D_{z_0} \Subset G$, то

$$\int_G |f(z)|^2\, dv(z) \geq \int_{D_{z_0}} |f(z)|^2\, dv(z) \geq v(D) \cdot |f(z_0)|^2.$$

Примеры RKHS.

- Отсюла следует, что если $\mathcal{K}$ – произвольный компакт в G, то справедлива оценка

$$\max_{z \in \mathcal{K}} |f(z)| \leq C_{\mathcal{K}} \cdot \|f\|_{B_2(G)}.$$

Из сходимости последовательности по норме пространства $B_2(G)$ вытекает сходимость этой последовательности в топологии равномерной сходимости на компактах из области G. Отсюда следует полнота пространства $B_2(G)$, поэтому пространство $B_2(G)$ гильбертово.

Гильбертовы пространства с воспроизводящим ядром.

Приведем основные свойства воспроизводящего ядра гильбертова пространства функций, заданных на множестве точек M.

1. Если для данного гильбертова пространства ядро существует, то оно единственно.
2. $K_H(z,z) \geq 0, \quad z \in M;$
3. $K_H(z,\xi) = \overline{K_H(\xi,z)}, \quad z,\xi \in M;$
4. $|K_H(z,\xi)|^2 \leq K_H(z,z) \cdot K_H(\xi,\xi), \quad z,\xi \in M.$

Теорема D

Пусть M – произвольное множество точек, и $K(z,\xi) : M \times M \to \mathbb{C}$ комплекснозначная функция. Для того, чтобы эта функция была воспроизводящим ядром некоторого гильбертова пространства H, состоящего из комплекснозначных функций, заданных на множестве M, необходимо и достаточно, чтобы для любого конечного набора точек $z_1, z_2, \ldots, z_n \in M$ и для любого конечного набора комплексных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ выполнялось условие:

$$\sum_{l,m=1}^{n} c_l \cdot \overline{c_m} \cdot K(z_l, z_m) \geq 0.$$

При этом, H – это единственное гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, имеющее в качестве ядра функцию $K(z,\xi)$, $z,\xi \in M$.

Условия, при которых возможно пополнение до пространства с воспроизводящим ядром

Теорема Е

Пусть H_0 *– любое подпространство* $\mathbb{C}^M$ *комплекснозначных функций, заданных на некотором множестве* M*; на* H_0 *определено скалярное произведение* $< \cdot, \cdot >_{\mathcal{H}_0}$*, с ассоциированной нормой* $\| \cdot \|_{\mathcal{H}_0}$*. Для того, чтобы существовало гильбертово пространство с воспроизводящим ядром* $\mathcal{H}$*,* $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H} \subset \mathbb{C}^M$*, и топология на* $\mathcal{H}_0$*, которая задается скалярным произведением* $< \cdot, \cdot >_{\mathcal{H}_0}$ *совпадала бы с топологией, которую индуцирует на* $\mathcal{H}_0$ *пространство* $\mathcal{H}$*, необходимо и достаточно выполнение двух условий.*
1. Для любого $t \in M$ *дельта функционал:* $\delta_t : f \to f(t)$ *непрерывен на* $\mathcal{H}_0$*.*
2. Любая фундаментальная в $\mathcal{H}_0$ *последовательность* $\{f_n\}$*, которая сходится поточечно к нулю, т.е* $f_n(t) \to 0, \ \forall t \in M$*, сходится также к нулю по норме* $\| \cdot \|_{\mathcal{H}_0}$*, т.е.* $\|f_n\|_{\mathcal{H}_0} \to 0$*.*

Задача об описании пространства сопряженного к пространству Бергмана.

Рассмотрим пространство Бергмана, состоящее из функций голоморфных в односвязной области $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ с жордановой границей и суммируемых в этой области с квадратом модуля по площади:

$$B_2(G) = \left\{ f \in H(G) : \; \|f\|^2_{B_2(G)} = \int_G |f(z)|^2 \, dv(z) < \infty \right\}.$$

Это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_G f(z)\overline{g(z)} \, dv(z).$$

Основные свойства гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром описаны, например, в работах

N. Aronszajn,Theory of reproducing kernels, 1950, Transactions of the AMS, Vol. 68, no. 3., P. 337–404.

A. Berlinet, C. Thomas–Agnan, Reproducing kernel Hilbert spaces in probability and statistics. New York: Kluwer Academic Publishers, 2001., P. 355.

Задача об описании пространства сопряженного к пространству Бергмана.

Лемма 2

Система функций от переменной z $\{(z-\xi)^{-2}, \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}\}$ *полна в пространстве* $B_2(G)$.

Каждому линейному непрерывному функционалу S на $B_2(G)$ поставим в соответствие функцию

$$\widetilde{S}(\xi) = S\left(\frac{1}{(z-\xi)^2}\right), \quad \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G},$$

которая называется преобразованием Гильберта функционала S.

Задача об описании пространства сопряженного к пространству Бергмана

Согласно теоремы Рисса – Фишера каждый функционал на $B_2(G)$ порождается некоторым элементом из $B_2(G)$

$$\widetilde{f}(\xi) \stackrel{def}{=} \left(\frac{1}{(z-\xi)^2}, f(z)\right)_{B_2(G)}, \quad \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}.$$

$$\widetilde{B}_2(G) = \{\widetilde{f},\, f \in B_2(G)\}.$$

$\widetilde{B}_2(G)$ гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\widetilde{f}, \widetilde{g})_{\widetilde{B}_2(G)} \stackrel{def}{=} (g, f)_{B_2(G)}, \quad \widetilde{f}, \widetilde{g} \in \widetilde{B}_2(G).$$

Задача: из каких функций состоит пространство $\widetilde{B}_2(G)$?

Определение 4

Гильбертовы пространства RKHS H_1 и H_2 называются эквивалентными, если они состоят из одних и тех же функций и нормы $\|\cdot\|_{H_1}$, $\|\cdot\|_{H_2}$ эквивалентны.

История решения задачи об описании пространства $\widetilde{B}_2(G)$.

В статье
В. В. Напалков (мл.), Р.С. Юлмухаметов, О преобразовании Коши функционалов на пространстве Бергмана, Матем. сб. , т. 185, №7, 1994, 77–86 С.
доказано , что если G – односвязная ограниченная область с границей класса C^{1+0}, то пространство $\widetilde{B}_2(G)$ эквивалентно пространству $B_2(\mathbb{C}\backslash\overline{G})$.
С.А. Меренков в работе
S. A. Merenkov, On the Cauchy transform of the Bergman space, Математическая физика, анализ, геометрия., т. 7 , №1, 2000, 119-127 С.
доказал, что если область G – ограниченный квазикруг, то также пространство $\widetilde{B}_2(G)$ эквивалентно пространству $B_2(\mathbb{C}\backslash\overline{G})$.

История решения задачи об описании пространства $\widetilde{B}_2(G)$.

В работе

V. V. Napalkov Jr. and R.S. Yulmukhametov, Criterion of surjectivity of the Cauchy transform operator on a Bergman space, Lyubich, Yu. (ed.) et al., Entire functions in modern analysis. Boris Levin memorial conference. Proceedings of the conference, Israel Math. Conf. Proc., V.15, 2001, 261-267 pp.

установлено, в случае ограниченной односвязной области G, что пространство $\widetilde{B}_2(G)$ эквивалентно пространству $B_2(\mathbb{C}\setminus\overline{G})$ тогда и только тогда, когда область G – квазикруг.

В статье

В. В. Напалков (мл.), Р. С Юлмухаметов, О преобразовании Гильберта в пространстве Бергмана, Матем. заметки, т. 70 ,№1, 2001, 68–78 С.

получен окончательный результат. Снято условие ограниченности области G.

Задача об описании пространства сопряженного к пространству Бергмана.

Определение 5

Односвязная область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ *с жордановой границей называется квазикругом, если найдется постоянная* $C > 0$ *такая, что для любой пары точек* $z_1, z_2 \in \partial G$ *выполнено соотношение*

$$\mathrm{diam}\ l(z_1, z_2) \leq C|z_1 - z_2|,$$

где $l(z_1, z_2)$ *– та из двух дуг множества* $\partial G \setminus \{z_1, z_2\}$*, которая имеет наименьший диаметр (как множество).*

Теорема 1

Пусть G *– односвязная жорданова область в* $\overline{\mathbb{C}}$*. Для того чтобы пространства* $\widetilde{B}_2(G)$ *и* $B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{G})$ *были эквивалентны необходимо и достаточно, чтобы область* G *была квазикругом.*

Ссылки на работу

Цитаты из работы

E. Shippers, W. Staubach, Analysis on quasidisks; A unified approach through transmission and jump problems, September 2020, preprint.

We also give a new proof of Napalkov and Yulmukhametov's result that the Schiffer operator is an isomorphism if and only if Γ is a quasicircle. As mentioned above, Napalkov and Yulmukhametov were the first to recognize and prove that the Schiffer operator $T_{1,2}$ is an isomorphism for quasicircles; as far as we know this was not known to Schiffer even for stronger assumptions on the curve. The characterization (7) is due to Napalkov and Yulmukhametov [43]. It was proven independently by the authors [59], using our characterization (4). Unfortunately none of the aforementioned authors, including us, were aware of the results of Napalkov and Yulmukhametov. Both our proof and that of Wei, Wang and Hu use the result or approach of Shen.

Ссылки на работу

[43] *Napalkov, V. V., Jr.; Yulmukhametov, R. S. On the Hilbert transform in the Bergman space. (Russian) Mat. Zametki 70 (2001), no. 1, 68–78; translation in Math. Notes 70 (2001), no. 1-2, 61–70.*

[59] *Schippers, E.; Staubach, W. Riemann boundary value problem on quasidisks, Faber isomorphism and Grunsky operator. Complex Anal. Oper. Theory 12 (2018), no. 2, 325–354.*

[63] *Y. Shen. Faber polynomials with applications to univalent functions with quasiconformal extensions, Sci. China Ser. A 52 (2009), no. 10, 2121-2131.*

[73] *Wei, H. Y.; Wang, M. L.; Hu, Y. A note on Faber operator. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 30 (2014), no. 3, 499–504.*

Методы решения задачи об описании сопряженного пространства в общем случае.

Для весового пространства Бергмана в круге D, состоящего из аналитических в D функций f, суммируемых с квадратом модуля по радиальной мере $d\varphi\, d\mu(r)$, $\quad \operatorname{supp}\mu = [0,1]$:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2\, d\varphi\, d\mu(r) < \infty,$$

разработан метод решения задачи об описании сопряженного пространства. Пространство $B_2(D,\mu)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f,g)_{B_2(D,\mu)} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\overline{g(re^{i\varphi})}\, d\varphi\, d\mu(r).$$

Методы решения задачи об описании сопряженного пространства в общем случае.

Каждому линейному непрерывному функционалу над $B_2(G,\mu)$, порожденному функцией $f \in B_2(G,\mu)$, поставим в соответствие функцию

$$\widehat{f}(\lambda) \stackrel{def}{=} (e^{\lambda z}, f)_{B_2(D,\mu)}.$$

Совокупность функций $\{\widehat{f}(\lambda)\colon\ f \in B_2(D,\mu)\}$ образует гильбертово пространство $\widehat{B}_2(D,\mu)$ со скалярным произведением

$$(\widehat{f},\widehat{g})_{B_2(D,\mu)} \stackrel{def}{=} (g,f)_{B_2(D,\mu)}, \quad \|\widehat{f}\|_{\widehat{B}_2(D,\mu)} = \sqrt{(f,f)_{B_2(D,\mu)}}$$

и нормой

$$\|\widehat{f}\|_{\widehat{B}_2(D,\mu)} = \|f\|_{B_2(D,\mu)}.$$

Решена задача об описании радиально весового пространства Бергмана $B_2(D,\mu)$ в терминах преобразования Фурье – Лапласа. Получен критерий, когда в пространстве $\widehat{B}_2(D,\mu)$ можно ввести эквивалентную интегральную норму. Построен пример меры μ, для которой в пространстве $\widetilde{B}_2(D,\mu)$ нельзя ввести эквивалентную норму вида

$$\|\widehat{f}\|_\nu \stackrel{def}{=} \sqrt{\int_{\mathbb{C}} |\widetilde{f}(\lambda)|^2 \, d\nu(\lambda)}.$$

Метод решения задачи основан на том, что система функций $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ является ортогональным базисом в пространстве $B_2(D,\mu)$. В общем случае, когда вместо пространства $B_2(D,\mu)$ рассматривается другое пространство, "удачно" найти базис не получится. Необходимо искать другие системы функций, которые можно было бы использовать вместо ортогональных базисов. Сложности можно в значительной степени преодолеть, если вместо ортогональных базисов использовать системы разложения, подобные ортогональным (ортоподобные системы).

Ортоподобные системы были введены Т.П. Лукашенко. Им же изучены основные свойства этих систем.

Определение 6

Пусть H – гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а Ω – пространство со счетно аддитивной мерой μ. Система элементов $\{e_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ называется ортоподобной (подобной ортогональной) системой разложения в H с мерой μ , если любой элемент $y \in H$ представляется в виде:

$$y = \int_\Omega (y, e_\omega)_H e_\omega \, d\mu(\omega),$$

где интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H, причем в последнем случае есть такое исчерпывание $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ пространства Ω (все Ω_k измеримы по мере μ, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ для $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{k=1}^\infty \Omega_K = \Omega$, быть может, зависящее от y и называемое подходящим для y, что функция $(y, e_\omega)_H \cdot e_\omega$ интегрируема по Лебегу на Ω_k и

$$y = \int_\Omega (y, e_\omega)_H e_\omega \, d\mu(\omega) = \lim_{k\to\infty} (L) \int_{\Omega_k} (y, e_\omega)_H e_\omega \, d\mu(\omega).$$

Примеры:

- Любой ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ в произвольном гильбертовом пространстве H является ортоподобной системой разложения; любой элемент $y \in H$ может быть представлен в виде:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} (y, e_k) e_k.$$

  Здесь в качестве Ω можно взять множество $\mathbb{N}$, а в качестве меры μ считающую меру, т.е. мера множества из $\mathbb{N}$ есть количество различных натуральных чисел, попавших в это множество.

Примеры:

- Пусть H гильбертово пространство, H_1 – подпространство H, а P – оператор ортогонального проектирования элементов из H на H_1. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ – ортогональный базис в H. Тогда система элементов $\{P(e_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset H_1$ будет ортоподобной системой разложения в H_1. Заметим, что если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональный базис в H, то система $\{P(e_k)\}_{k=1}^{\infty}$ вообще говоря не будет ортогональным базисом в H_1.

Примеры:

- Пусть $H = L_2(\mathbb{R})$. Функция $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, $\|\psi\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1$, $2\pi \int_{\mathbb{R}\setminus 0} \frac{|\widehat{\psi}(a)|^2}{|a|} da =: C_\psi < 0$. Система вейвлетов Морле $\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$, $\quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ является ортоподобной системой разложения в пространстве $L_2(\mathbb{R})$; любая функция $f \in L_2(\mathbb{R})$ может быть представлена в виде:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}\setminus 0}\int_{\mathbb{R}} (f(\tau), \psi_{a,b}(\tau))_{L_2(\mathbb{R})}\psi_{a,b}(x)\,\frac{dbda}{C_\psi|a|^2}.$$

В качестве пространства Ω здесь берется множество $(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times \mathbb{R}$ с мерой $\frac{dbda}{C_\psi|a|^2}$.

Разложение элементов гильбертова пространства по ортоподобным системам может быть не единственным. В то же время ортоподобные системы разложения обладают многими свойствами ортогональных систем, например, для них выполняется аналог равенства Парсеваля и имеет место экстремальное свойство коэффициентов для ортоподобных систем разложения.

Теорема F (Аналог равенства Парсеваля)

Пусть $\{e_\omega\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ *– неотрицательная ортоподобная система разложения с мерой* μ *в* H.
Тогда для любого элемента $y \in H$

$$\|y\|_H^2 = \int_\Omega |(y, e_\omega)|^2 \, d\mu(\omega)$$

и для любых двух элементов $x, y \in H$ *имеем*

$$(x, y)_H = \int_\Omega (x, e_\omega) \cdot \overline{(y, e_\omega)} \, d\mu(\omega).$$

Ортоподобные системы разложения

Теорема G (Экстремальное свойство коэффициентов разложения)

Пусть $\{e_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ - неотрицательная ортоподобная система разложения в H, а $c(\omega)$ - функция на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (в зависимости от того, над каким полем рассматривается H) и

$$y = \int_\Omega c(\omega) e_\omega \, d\mu(\omega).$$

где интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H.
Тогда

$$\|y\|_H^2 \le \int_\Omega |c(\omega)|^2 \, d\mu(\omega),$$

причем равенство имеет место лишь в случае, если $c(\omega) = (y, e_\omega)_H$ почти всюду на Ω по мере μ.

Нам понадобится следующая теорема на стр. 128 из

Н. Данфорд, Дж. Шварц, Линейные операторы. Общая теория, Москва: ИЛ, 1962. Том 1. С. 896.

Теорема Н

Пусть H – гильбертово пространство и Ω – пространство с мерой μ. Пусть S – линейный непрерывный оператор, отображающий H в другое гильбертово пространство Y. Если функция $f : \Omega \to H$ со значениями в гильбертовом пространстве μ -интегрируема, то функция $Sf : \Omega \to Y$ также μ – интегрируема и

$$\int_\Omega Sf(\omega)\, d\mu(\omega) = S \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega).$$

Для гильбертова пространства с воспроизводящим ядром можно дать другое определение ортоподобной системы разложения, которое эквивалентно исходному определению.

Определение 7

Пусть H – гильбертово пространство с воспроизводящим ядром над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, состоящее из функций заданных на некотором множестве точек M, а Ω – пространство со счетно аддитивной мерой μ. Система функций $\{e_\omega\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ называется ортоподобной (подобной ортогональной) системой разложения в H с мерой μ, если любая функция $y \in H$ представляется в виде:

$$y(z) = \int_\Omega (y, e_\omega)_H e_\omega(z)\, d\mu(\omega), \quad \forall z \in M.$$

где интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега.

Основные свойства

Зная ортоподобную систему разложения в данном гильбертовом пространстве H, можно найти воспроизводящее ядро пространства H:

Лемма 3

Пусть в гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром H, состоящем из функций, заданных на множестве точек M, имеется ортоподобная система разложения $\{e_\omega\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ с мерой μ на Ω. Тогда для воспроизводящего ядра пространства H имеет место формула:

$$K_H(z,\xi) = \int_\Omega e_\omega(z)\cdot\overline{e_\omega(\xi)}\,d\mu(\omega), \quad z,\xi\in M.$$

Основные свойства

Последнее – есть обобщение известного утверждения:

Если $\{e_k(z),\ z \in M\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ – ортонормированный базис в гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром H, то воспроизводящее ядро пространства H имеет вид:

$$K_H(z,\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty} e_k(z) \cdot \overline{e_k(\xi)}, \quad z,\xi \in M.$$

Ортоподобная система разложения полностью определяет гильбертово пространство с воспроизводящим ядром

Лемма 4

Пусть H_1 и H_2 –гильбертовы пространства с воспроизводящим ядром, состоящие из функций от переменной $t \in M$, где M – некоторое множество. Пусть система функций $\{e_\omega(t)\}_{\omega\in\Omega}$ содержится как в пространстве H_1, так и в пространстве H_2, и кроме того является ортоподобной системой разложения с мерой μ и в пространстве H_1 и в пространстве H_2. Тогда пространство H_1 совпадает с пространством H_2.

Интегральная норма в гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром

Докажем утверждение:

Теорема 2

Пусть H – гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из функций, заданных в области $G \subset \mathbb{C}$. Норма в пространстве H будет иметь интегральный вид:

$$\|f\|_H = \sqrt{\int_G |f(\xi)|^2 \, d\nu(\xi)} \tag{5}$$

тогда и только тогда, когда система функций $\{K_H(\xi, t)\}_{t \in G}$ будет неотрицательной ортоподобной системой разложения с мерой ν в пространстве H.

Доказательство

Достаточность. Очевидно, что если норма в пространстве H определена как в (5), то

$$(f,g)_H = \int_G f(\xi)\cdot\overline{g(\xi)}\,d\nu(\xi).$$

Пусть система функций $\{K_H(\xi,t)\}_{t\in G}$ – неотрицательная ортоподобная система разложения с мерой ν в пространстве H. Это означает, что любой элемент $f\in H$ может быть представлен в виде:

$$f(\xi) = \int_G (f(\tau),K_H(\tau,t))_H K_H(\xi,t)\,d\nu(t),\quad \xi\in G.$$

В силу теоремы F

$$\|f\|_H^2 = \int_G |(f(\tau),K_H(\tau,t))_H|^2\,dv(t) = \int_G |f(t)|^2\,d\nu(t).$$

Доказательство

Необходимость. Пусть для любого $f \in H$ верно

$$\|f\|_H^2 = \int_G |f(\xi)|^2 \, d\nu(\xi).$$

Тогда

$$f(\xi) = (f(t), K_H(t,\xi))_H = \int_G f(t) \cdot \overline{K_H(t,\xi)} \, d\nu(t).$$

По свойству воспроизводящих ядер (см. [1]) $\overline{K_H(t,\xi)} = K_H(\xi, t)$, поэтому

$$f(\xi) = \int_G f(t) \cdot K_H(\xi, t) \, d\nu(t) =$$

$$= \int_G (f(\tau), K_H(\tau, t))_H \cdot K_H(\xi, t) \, d\nu(t), \ \xi \in G. \qquad (6)$$

Таким образом, система функций $\{K_H(\xi, t)\}_{t \in G}$ – неотрицательная ортоподобная система разложения в пространстве H с мерой ν.

Следствие

Гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из функций, заданных в области G, являющееся пополнением системы функций $\{1/(z-\xi)^2\}_{\xi \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}}$ относительно нормы

$$\|h\|_{B_2(G,\mu)} \overset{def}{=} \sqrt{\int_G |h(z)|^2 \, d\mu(z)},$$

называется пространством $B_2(G,\mu)$.

Следствие

Теорема 3

Гильбертово пространство с воспроизводящим ядром H, состоящее из аналитических в области G функций совпадает с пространством $B_2(G,\mu)$ для некоторой меры μ тогда и только тогда, когда семейство воспроизводящих ядер $\{K_H(\xi,t)\}_{t\in G}$ пространства H есть неотрицательная ортоподобная система разложения в H с мерой μ, т.е. любая функция $g \in H$ представляется в виде:

$$g(\xi) = \int_G (g(\tau), K_H(\tau,t))_H K_H(\xi,t)\, d\mu(t), \quad \forall \xi \in G.$$

Теорема 4

Гильбертово пространство с воспроизводящим ядром H, состоящее из функций от переменной $\xi \in \mathbb{C}\setminus\overline{G}$ совпадает с пространством $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ тогда и только тогда, когда семейство функций $\{\frac{1}{(\xi-t)^2}\}_{t\in G}$ есть ортоподобная система разложения в H с мерой μ, т.е. любая функция $g \in H$ представляется в виде:

$$g(\xi) = \int_G \left(g(\tau), \frac{1}{(\tau-t)^2}\right)_H \frac{1}{(\xi-t)^2}\, d\mu(t), \quad \forall \xi \in \mathbb{C}\setminus\overline{G}. \tag{7}$$

Связь задачи описания сопряженного пространства с ортоподобными системами разложения.

Верно и более общее утверждение.
Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из функций заданных на множестве точек M. Пусть Ω – некоторое пространство с мерой μ. Каждому линейному непрерывному функционалу над H, порождаемому функцией $f \in H$, поставим в соответствие функцию:

$$\widetilde{f}(\xi) \stackrel{def}{=} (e(\cdot, \xi), f)_H, \quad \xi \in \Omega.$$

Совокупность $\widetilde{f}$, $f \in H$ образует гильбертово пространство

$$\widetilde{H} = \{\widetilde{f}, \ f \in H\}$$

со скалярным произведением

$$(\widetilde{f}, \widetilde{g})_{\widetilde{H}} \stackrel{def}{=} (g, f)_H$$

и нормой

$$\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{H}} \stackrel{def}{=} \|f\|_H.$$

Связь задачи описания сопряженного пространства с ортоподобными системами разложения.

Теорема 5

В пространстве $\widetilde{H}$ норма имеет интегральный вид:

$$\|\widetilde{f}\|^2_{\widetilde{H}} = \int_\Omega |\widetilde{f}(\xi)|^2 \, d\mu(\xi), \; \forall \widetilde{f} \in \widetilde{H}$$

тогда и только тогда, когда система функций $\{e(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$ – ортоподобная система разложения с мерой μ в пространстве H, т.е. система $\{e(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$ принадлежит пространству H и любая функция $f \in H$ может быть записана в виде:

$$f(t) = \int_\Omega (f(\cdot), e(\cdot,\eta))_H e(t,\eta) \, d\mu(\eta), \quad \forall t \in M. \qquad (8)$$

Связь задачи описания сопряженного пространства с ортоподобными системами разложения.

Теорема 6

Для того, чтобы в пространстве $\widetilde{H}$ можно было ввести эквивалентную исходной норму

$$\|\widetilde{f}\|_\mu = \sqrt{\int_\Omega |\widetilde{f}(\xi)|^2 \, d\mu(\xi)},$$

где μ – неотрицательная борелевская мера на Ω, необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный непрерывный оператор S, задающий автоморфизм пространства H, такой, что система $\{Se(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ в пространстве H, т.е. любой элемент $f \in H$ можно представить в виде:

$$f(z) = \int_\Omega (f(\tau), S_\tau e(\cdot,\xi))_H S_z e(z,\xi) \, d\mu(\xi), \quad \forall z \in M.$$

Следующая теорема связывает задачу об описании пространства $\widetilde{B}_2(G, \mu)$ с вопросом существования в пространстве $B_2(G, \mu)$ специальной ортоподобной системы разложения.

Теорема 7

Для того, чтобы в пространстве $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ можно было ввести эквивалентную исходной норму

$$\|\widetilde{f}\|_\nu = \sqrt{\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} |\widetilde{f}(\xi)|^2 \, d\nu(\xi)},$$

где ν – неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$, необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный непрерывный оператор S, задающий автоморфизм банахова пространства $B_2(G,\mu)$, такой, что система $\{S\left(\frac{1}{(z-\xi)^2}\right)\}_{\xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}}$ является ортоподобной системой разложения с мерой ν в пространстве $B_2(G,\mu)$, т.е. любой элемент $f\in B_2(G,\mu)$ можно представить в виде:

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} (f(\tau), S_\tau \frac{1}{(\tau-\xi)^2})_{B_2(G,\mu)} S_z \frac{1}{(z-\xi)^2} \, d\nu(\xi), \quad z \in G.$$

Условие при котором возможно описание пространства $\widetilde{B}_2(G,\mu)$

Теорема 8

Пусть существует оператор S осуществляющий автоморфизм пространства $B_2(G,\mu)$, который переводит семейство воспроизводящих ядер $\{K_H(z,t)\}_{t\in G}$ на семейство ядер Гильберта $\{\frac{1}{(z-\tau)^2}\}_{\tau\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}}$. Тогда в пространстве $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ можно ввести эквивалентную интегральную норму вида

$$\|\widetilde{f}\|_\nu = \sqrt{\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} |\widetilde{f}(\xi)|^2\, d\nu(\xi)},$$

где мера ν определяется следующим образом:

Условие при котором возможно описание пространства $\widetilde{B}_2(G, \mu)$

Теорема 8

оператор S определяет отображение

$$\tau = \rho(t);\ \rho : G \to \mathbb{C}\backslash\overline{G}$$

из равенства

$$SK_H(z, t) = \frac{1}{(z-\rho(t))^2}, \quad t \in G.$$

Пусть P – множество в G. Тогда $Q \stackrel{def}{=} \rho(P)$ есть множество в $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$, и мера $\nu(Q) \stackrel{def}{=} \mu(P)$.

Условия совпадения гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром.

Пусть H_1 – гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из функций заданных на множестве точек M_1. Пусть Ω – некоторое пространство с мерой μ. Пусть $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$ – ортоподобная система разложения с мерой μ в пространстве H_1, т.е. система $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$ принадлежит пространству H_1 и любая функция $f\in H_1$ может быть записана в виде:

$$f(t)=\int_\Omega (f(\cdot),e_1(\cdot,\eta))_{H_1} e_1(t,\eta)\,d\mu(\eta),\quad t\in M_1. \tag{9}$$

Система функций $\{e_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$ полна в пространстве H_1.

Условия совпадения гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром

Каждому линейному непрерывному функционалу над H_1, порождаемому функцией $f \in H_1$, поставим в соответствие функцию:

$$\widetilde{f}(\xi) \overset{def}{=} (e_1(\cdot, \xi), f)_{H_1}, \quad \xi \in \Omega.$$

Совокупность $\widetilde{f}$, $f \in H_1$ образует гильбертово пространство

$$\widetilde{H}_1 = \{\widetilde{f},\ f \in H_1\}$$

со скалярным произведением

$$(\widetilde{f}, \widetilde{g})_{\widetilde{H}_1} \overset{def}{=} (g, f)_{H_1}$$

и нормой

$$\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{H}_1} \overset{def}{=} \|f\|_{H_1}.$$

Условия совпадения гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром.

Пусть H_2 – гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из функций заданных на множестве точек M_2. Пусть в пространстве H_2 имеется ортоподобная система разложения $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$ с мерой μ , т.е. система $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$ принадлежит пространству H_2, и любая функция $f \in H_2$ может быть представлена в в виде:

$$f(t) = \int_{\Omega_2} (f(\cdot), e_2(\cdot,\eta))_{H_2} e_2(\cdot,\eta)\, d\mu(\eta), \quad t \in M_2. \qquad (10)$$

Система функций $\{e_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$ полна в пространстве H_2.

Условия совпадения гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром.

Каждому линейному непрерывному функционалу над H_2, порождаемому функцией $f \in H_2$, поставим в соответствие функцию:

$$\widehat{f}(\xi) \stackrel{def}{=} (e_2(\cdot, \xi), f)_{H_2}, \quad \xi \in \Omega.$$

Совокупность $\widehat{f}$, $f \in H_2$ образует гильбертово пространство

$$\widehat{H}_2 = \{\widehat{f},\ f \in H_2\}$$

со скалярным произведением

$$(\widehat{f}, \widehat{g})_{\widehat{H}_2} \stackrel{def}{=} (g, f)_{H_2}, \quad f, g \in H_2 \tag{11}$$

и нормой

$$\|\widehat{f}\|_{\widehat{H}_2} \stackrel{def}{=} \|f\|_{H_2}, \quad f \in H_2.$$

Условия совпадения гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром.

Теорема 9

Для того чтобы пространства $\widetilde{H}_1$ *и* $\widehat{H}_2$ *были эквивалентны, т.е. состояли из одних и тех же функций, и, при этом, было выполнено соотношение*

$$C_1\|f\|_{\widetilde{H}_1} \le \|f\|_{\widehat{H}_2} \le C_2\|f\|_{\widetilde{H}_1}, \quad \forall f \in \widetilde{H}_1 = \widehat{H}_2, \tag{12}$$

где $C_1, C_2 > 0$ *– некоторые постоянные, необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный непрерывный взаимнооднозначный оператор* B*, действующий из пространства* H_1 *на* H_2*, такой, что*

$$B\colon e_1(\cdot,\tau) \longrightarrow e_2(\cdot,\tau), \quad \forall \tau \in \Omega. \tag{13}$$

Пусть ∂G – ограниченная квазиокружность и G_1, G_2 области в $\mathbb{C}$, $G_1 \bigcup \partial G \bigcup G_2 = \widehat{\mathbb{C}}$. Рассмотрим пространства Бергмана:

$$B_2(G_k) \stackrel{def}{=} \left\{ f \in Hol(G_k) \colon \|f\|^2_{B_2(G_k)} \stackrel{def}{=} \int_{G_k} |f(z)|^2 \, dv(z) < \infty \right\}, (14)$$

$$k = 1, 2. (15)$$

где $dv(z)$ – плоская мера Лебега. Пусть $y(z)$, $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ – квазиконформное отражение Альфорса относительно квазиокружности ∂G, и $y_{\overline{z}}$ – функция из работы

В. И. Белый, Современные методы геометрической теории функции комплексного переменного в задачах аппроксимации, Алгебра и анализ, 9:3 (1997), 3–40.

(см. стр. 24–25, Лемма 3.1).

Применение теории ортоподобных систем к задаче комплексного анализа.

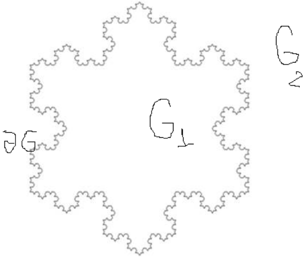

Рис.: Область с фрактальной границей “снежинка фон Коха” является квазикругом.

Квазиконформное отражение Альфорса является гомеоморфизмом расширенной комплексной плоскости со следующими свойствами:
1. $y(z) = z$, $z \in \partial G$;
2. $y(G_k) = G_{3-k}$, $k = 1, 2$;
3. $C_1|z_1 - z_2| \leq |y(z_1) - y(z_2)| \leq C_2|z_1 - z_2|, \forall z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$.

Также мы рассматриваем пространство

$$B_2^y(G_2) \overset{def}{=} \Big\{ h\colon \exists g \in B_2(G_1),\ h(z) = \overline{g(y(z))},\ z \in G_2,$$
$$\|h\|^2_{B_2^y(G_2)} \overset{def}{=} \int_{G_2} |h(\zeta)|^2 |y_{\overline{z}}(\zeta)|^2\, dv(\zeta) < \infty \Big\}.$$

Обозначим $m(\zeta) \overset{def}{=} \overline{y_{\overline{z}}(\zeta)}$, $\zeta \in G_2$, где черта над $y_{\overline{z}}$ означает комплексное сопряжение. Заметим, что, как показано в [1], $m(\zeta)$, $\zeta \in G_2$ – непрерывная функция. Пусть $\mathcal{M}$ оператор, действующий из пространства $B_2^y(G_2)$ по следующему правилу: если $h \in B_2^y(G_2)$, то

$$\mathcal{M}h(\zeta) \overset{def}{=} h(\zeta) \cdot m(\zeta),\ \zeta \in G_2. \qquad (16)$$

Далее мы приведем теорему, которая была получена в результате обсуждения этой темы с Напалковым Валентином Васильевичем.

Пример применения ортоподобных систем к задаче комплексного анализа.

Теорема 10 (Новый результат)

Оператор умножения $\mathcal{M}$ является линейным непрерывным взаимно-однозначным оператором, действующим из пространства $B_2^y(G_2)$ на пространство $B_2(G_2)$.

Приведем схему доказательства теоремы.
В силу теорем 1 и 7 справедливо представление:

$$f(z) = \int_{G_2} (f(\tau), S_\tau \frac{1}{(\tau-\xi)^2})_{B_2(G_1)} S_z \frac{1}{(z-\xi)^2}\, dv(\xi),\ \forall f \in B_2(G_1) \forall z \in G_1, \tag{17}$$

где S – линейный непрерывный взаимнооднозначный самосопряженный оператор, действующий из $B_2(G_1)$ на $B_2(G_1)$.
Далее для краткости записи формул мы вводим обозначение:

$$\mathcal{E}_1(t,\xi) \stackrel{def}{=} S_t \frac{1}{(t-\xi)^2},\ t \in G_1,\ \xi \in G_2.$$

Соотношение (17) означает, что система функций $\{\mathcal{E}_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in G_2}$ является ортоподобной системой разложения в пространстве $B_2(G_1)$. Справедливо равенство

$$\|f\|^2_{B_2(G_1)} = \int_{G_1} |f(z)|^2\, dv(z) =$$

$$= \int_{G_2} |f(y(\zeta))|^2 \cdot |\det(J(\zeta,y))|\, dv(\zeta).$$

В книге *Л. Альфорс Лекции по квазиконформным отображениям, М: Мир, 1969. 135 С.* на стр.15 доказано, например, что

$$|\det(J(\zeta,y))| = |y_{\overline{z}}(\zeta)|^2 - |y_z(\zeta)|^2,\ \zeta\in G_2.$$

Также справедлива оценка см., например, [1]

$$|y_z(\zeta)| \le k\cdot|y_{\overline{z}}(\zeta)|,\ \zeta\in G_2,\ 0<k<1.$$

Из последних неравенств вытекает оценка якобиана:

$$(1-k^2)|y_{\overline{z}}(\zeta)|^2 \leq |det(J(\zeta, y))| \leq |y_{\overline{z}}(\zeta)|^2,\ \zeta \in G_2.$$

Последнее соотношение влечет:

$$\|f\|^2_{B_2(G_1)} \asymp \int_{G_2} |f(y(\zeta))|^2 \cdot |y_{\overline{z}}(\zeta)|^2 \, dv(\zeta) = \\ = \int_{G_2} |f(y(\zeta)) \cdot y_{\overline{z}}(\zeta)|^2 \, dv(\zeta). \qquad (18)$$

Используя аналог равенства Парсеваля для ортоподобных систем разложения, из последнего соотношения можно доказать, что справедливо представление:

$$f(z) = \int_{G_2} (f(\tau), m(\xi) \cdot R_\tau K_{B_2(G_1)}(\tau, y(\xi)))_{B_2(G_1)} \times$$
$$\times m(\xi) \cdot R_z K_{B_2(G_1)}(z, y(\xi))\, dv(\xi),\ \forall f \in B_2(G_1),\ \forall z \in G_1, \quad (19)$$

где R – линейный непрерывный взаимнооднозначный самосопряженный оператор, действующий из $B_2(G_1)$ на $B_2(G_1)$. Введем обозначение

$$\mathcal{E}_2(t,\xi) \stackrel{def}{=} m(\xi) \cdot RK_{B_2(G_1)}(t, y(\xi)),\ t \in G_1, \xi \in G_2$$

Соотношение (19) означает, что система функций $\{\mathcal{E}_2(\cdot,\xi)\}_{\xi \in G_2}$ является ортоподобной системой разложения в пространстве $B_2(G_1)$.

Схема доказательства теоремы 10.

Справедлива следующая теорема (см, например, [1], стр. 25.)

Теорема I

Если $f(z)$ – аналитическая и ограниченная в конечном квазикруге G_1 функция, $y(z)$ – квазиконформное отражение Альфорса относительно ∂G, то при всех $z \in G_1$ справедлива формула

$$f(z) = \int_{G_2} \frac{f(y(\zeta))}{(\zeta - z)^2} y_{\overline{z}}(\zeta)\, dv(\zeta). \tag{20}$$

Как отмечено в той же статье утверждение теоремы остается верным, если $f \in B_2(G_1)$.

Из формулы (20) вытекает соотношение

$$R \circ Sf(z) = \int_{G_2} (f(\tau), R_\tau K_{B_2(G_1)}(\tau, y(\xi)) \cdot m(\xi))_{B_2(G_1)} S_z \frac{1}{(z-\xi)^2}\, dv(\xi),$$

$$\forall f \in B_2(G_1)\, \forall z \in G_1,$$

или, в наших обозначениях,

$$R \circ Sf(z) = \int_{G_2} (f(\tau), \mathcal{E}_2(\tau, \xi))_{B_2(G_1)} \mathcal{E}_1(z, \xi)\, dv(\xi),$$

$$\forall f \in B_2(G_1)\, \forall z \in G_1.$$

Применяя теорему H, приходим к равенству:

$$f(z) = \int_{G_2} (f(\tau), \mathcal{E}_2(\tau, \xi))_{B_2(G_1)} T\mathcal{E}_1(z, \xi)\, dv(\xi),$$

$$\forall f \in B_2(G_1)\, \forall z \in G_1, \qquad (21)$$

где T – самосопряженный оператор; $T = (R \circ S)^{-1}$.

Схема доказательства теоремы 10.

Рассмотрим пространство $B_2'(G_1)$, которое состоит из тех же функций, что и пространство $B_2(G_1)$ и

$$(f,g)_{B_2'(G_1)} \stackrel{def}{=} (f,\, T^{-1}g)_{B_2(G_1)},\ \forall f,g \in B_2(G_1). \qquad (22)$$

Нетрудно показать , что системы функций $\{T\mathcal{E}_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in G_2}$, $\{T\mathcal{E}_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in G_2}$ являются ортоподобными системами разложения в пространстве $B_2'(G_1)$.

Из равенств (21) и (22) вытекает, что для любого $f \in B_2'(G_1)$ справедливо представление:

$$f(z) = \int_{G_2} (f(\tau), T\mathcal{E}_2(\tau,\xi))_{B_2'(G_1)} T\mathcal{E}_1(z,\xi)\, dv(\xi),$$
$$\forall f \in B_2'(G_1),\ \forall z \in G_1. \qquad (23)$$

Система функций $\{T\mathcal{E}_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in G_2}$ является ортоподобной системой разложения в пространстве $B_2'(G_1)$, поэтому

$$f(z) = \int_{G_2} (f(\tau), T\mathcal{E}_1(\tau,\xi))_{B_2'(G_1)} \times$$
$$\times T\mathcal{E}_1(z,\xi)\, dv(\xi),\ \forall f \in B_2'(G_1),\ \forall z \in G_1. \qquad (24)$$

Выражение (23) есть представление элемента $f \in B_2'(G)$ по ортоподобной системе $\{T\mathcal{E}_1(\cdot,\xi)\}_{\xi\in G_2}$. От представления (24) того же элемента $f \in B_2'(G_1)$ отличается коэффициентом разложения; в (23) коэффициент разложения $(f(\tau), T\mathcal{E}_2(\tau,\xi))_{B_2'(G_1)}$, а в представлении (24) коэффициент разложения $(f(\tau), T\mathcal{E}_1(\tau,\xi))_{B_2'(G_1)}$. Поскольку система функций $\{T\mathcal{E}_2(\cdot,\xi)\}_{\xi\in G_2}$ является ортоподобной системой разложения в пространстве $B_2'(G_1)$, то в силу аналога равенства Парсеваля для ортоподобных систем разложения

$$\int_{G_2} |(f(\tau), T\mathcal{E}_1(\tau,\xi))_{B_2'(G_1)}|^2\, dv(\xi) = \|f\|^2_{B_2'(G_1)} =$$
$$= \int_{G_2} |(f(\tau), T\mathcal{E}_2(\tau,\xi))_{B_2'(G_1)}|^2\, dv(\xi),\ \forall f \in B_2'(G_1). \tag{25}$$

Используем экстремальное свойство коэффициентов разложения по ортоподобной системе. Учитывая соотношения (23), (24) и (25), применим теорему G. Учтем, что в данном случае коэффициенты разложения непрерывные функции. Поэтому равенство коэффициентов разложения будет не "почти всюду", а для всех $\xi \in G_2$:

$$(f(\tau), T\mathcal{E}_1(\tau,\xi))_{B_2'(G_1)} = (f(\tau), T\mathcal{E}_2(\tau,\xi))_{B_2'(G_1)}, \ \forall f \in B_2'(G_1), \forall \xi \in G_2.$$

Отсюда следует

$$T \circ S_\tau \frac{1}{(\tau-\xi)^2} \equiv m(\xi) \cdot T \circ R_\tau K_{B_2(G_1)}(\tau, y(\xi)), \ \tau \in G_1, \ \forall \xi \in G_2,$$

или $S_\tau \frac{1}{(\tau-\xi)^2} \equiv m(\xi) \cdot R_\tau K_{B_2(G_1)}(\tau, y(\xi)), \ \tau \in G_1, \ \forall \xi \in G_2.$
Поэтому

$$R^{-1} \circ S_\tau \frac{1}{(\tau-\xi)^2} \equiv K_{B_2(G_1)}(\tau, y(\xi)) \cdot m(\xi), \qquad \tau \in G_1, \ \forall \xi \in G_2. \quad (26)$$

Схема доказательства теоремы 10.

Применим теорему 9; из равенства (26) следует, что образ оператора $\mathcal{M}$ (см. определение (16)) состоит из функций пространства $B_2(G_2)$ и только из таких функций. В силу определения оператора $\mathcal{M}$, определения норм в пространствах $B_2^y(G_2)$ и $B_2(G_2)$, оператор $\mathcal{M}$ – линейный непрерывный взаимнооднозначный унитарный оператор, действующий из пространства $B_2^y(G_2)$ на пространство $B_2(G_2)$. Теорема 10 доказана.