Быстро сходящиеся аппроксимации Чернова, построенные на основе оператора сдвига и интегрального оператора, к решению параболического дифференциального уравнения

Александр Веденин

Содержание

Задача Коши для параболического дифференциального уравнения

Рассмотрим задачу Коши для параболического дифференциального уравнения в частных производных на вещественной прямой:

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = a(x)u''_{xx}(t,x) + b(x)u'_x(t,x) + c(x)u(t,x) & t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Где функция a строго положительна, функции $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', u_0$ равномерно непрерывны и ограничены.

C_0-полугруппы и линейные эволюционные уравнения

Пусть Q — некоторое множество. В задаче Коши для эволюционного уравнения с частными производными

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = Lu(t,x) \ \text{для} \ \ t > 0, x \in Q, \\ u(0,x) = u_0(x) \ \text{для} \ \ x \in Q. \end{cases}$$

можно положить $U(t) = u(t,\cdot) = [x \longmapsto u(t,x)]$ и получить задачу Коши для обыкновенного дифференциального ур-я

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = LU(t) \ \text{для} \ \ t > 0, \\ U(0) = u_0. \end{cases}$$

Известно, что если $u(t,\cdot) \in \mathcal{F}$ и существует C_0-полугруппа с генератором L, т.е. если существует экспонента от оператора tL, то обе задачи имеют решение

$$U(t) = e^{tL}u_0, \quad u(t,x) = U(t)(x) = \left(e^{tL}u_0\right)(x).$$

Определение C_0-полугруппы

Пусть $\mathcal{F}$ – банахово пространство, и $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ – пространство всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$.

Пусть дано отображение $V\colon [0; +\infty) \to \mathscr{L}(\mathcal{F})$, т.е. при каждом фиксированном $t \geq 0$ дан линейный ограниченный оператор $V(t)$, который отображает $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$.

Функция V, а также семейство $V(t)_{t\geq 0} \subset \mathscr{L}(\mathcal{F})$, называется C_0-полугруппой, если верно следующее:

1) $V(0)$ это тождественный оператор I;
2) $V(t+s) = V(t) \circ V(s)$ для всех $t \geq 0, s \geq 0$;
3) V непрерывно при наделении $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ сильной операторной топологией, т.е. для каждого $f \in \mathcal{F}$ непрерывно отображение $t \longmapsto V(t)f \in \mathcal{F}$.

Определение генератора C_0-полугруппы

Пусть дана C_0-полугруппа $V(t)_{t\geq 0}$. Рассмотрим линейный оператор $L\colon Dom(L) \to \mathcal{F}$, определяемый равенством

$$L\varphi = \lim_{t\to+0} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t}$$

на множестве $Dom(L) \subset \mathcal{F}$ всех таких φ, что предел существует по норме в $\mathcal{F}$.

Оператор L называется генератором C_0-полугруппы $V(t)_{t\geq 0}$. При этом L порождает эту полугруппу и используется обозначение $V(t) = e^{tL}$.

Теорема Чернова

Теорема Чернова — это теорема о «втором замечательном пределе» для C_0-полугрупп.

«Второй замечательный предел» для C_0-полугрупп:

$$e^{tL} = \lim_{n\to\infty} G(t/n)^n = \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{tL}{n} + o(t/n) \right)^n$$

Касание по Чернову

:

1) Пусть — банахово пространство, и пусть Пусть $\mathcal{F}$ – банахово пространство, и $\mathscr{L}(\mathcal{F})$ – пространство всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$.
Пусть дана функция $G\colon [0; +\infty) \to \mathscr{L}(\mathcal{F})$. Пусть также дан замкнутый линейный оператор $L\colon Dom(L) \to \mathcal{F}$ с областью определения $Dom(L) \subset \mathcal{F}$.
2) $G(0) = I$
3) Существует плотное в F линейное подпространство $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ что при всех $f \in \mathcal{D}$ существует предел $\lim_{t\to+0}(G(t)f - f)/t$ Значение которого обозначим G'(0)f
4) Замыкание оператора $(G'(0), \mathcal{D})$ существует и равно $(L, Dom(L))$

Современная формулировка теоремы Чернова

1) (E) существует C_0-полугруппа $(e^{tL})_{t\geq 0}$ с генератором $(L, Dom(L))$
2) (CT) функция G касается по Чернову оператора L
3) (N) существует такое число $\omega \in \mathbb{R}$, что $\|G(t)\| \leq e$

Теорема Чернова как метод решения задачи Коши

Решение задачи Коши

$$\begin{cases} u'_t(t,x) = Lu(t,x) \ \text{ для } \ t>0, x\in Q, \\ u(0,x) = u_0(x) \ \text{ для } \ x\in Q. \end{cases}$$

представимо в виде $u(t,x) = U(t)(x) = \left(e^{tL}u_0\right)(x)$.

Поэтому аппроксимации Чернова для полугруппы – это аппроксимации к решению задачи Коши.

Пример: если оператор L это лапласиан $L = \Delta$, то получаем уравнение теплопроводности, для которого полугруппу легко записать в явном виде.

Но если оператор L более сложный, то теорема Чернова – один из немногих методов, позволяющих явно выразить решение задачи Коши через коэффициенты оператора L.

Метод создания быстро сходящихся аппроксимаций Чернова

Для полугруппы справедливо разложение:

$$e^{tL} = I + tL + \frac{(tL)^2}{2} + \frac{(tL)^3}{3!} + o(t^3).$$

Функция G, удовлетворяющая теореме Чернова, называется функцией Чернова для оператора L. От функции Чернова требуется разложение:

$$G(t) = I + tL + o(t).$$

Однако, если построим функцию Чернова, удовлетворяющую

$$G(t) = I + tL + \frac{(tL)^2}{2} + o(t^2)$$

то ожидаем, что аппроксимации будут сходиться быстрее.

Модельное уравнение и постановка задачи

Для следующей задачи Коши

$$\begin{cases} \mathrm{u'}_t(t,x) = a(x)u''_{xx}(t,x) + b(x)u'_x(t,x) + c(x)u(t,x) \\ \mathrm{u(0,x){=}u_0}(x) \end{cases}$$

Мы представим решение $u(t,x)$ в виде предела быстро сходящихся аппроксимаций Чернова при условиях, что функция a строго положительна, функции $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', u_0$ равномерно непрерывны и ограничены.

В этом случае $L = a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b\frac{\partial}{\partial x} + c$.

Быстро сходящиеся аппроксимации к решению модельного уравнения

Основной результат: построена функция Чернова

$$(S(t)f)(x) = \int_{-1}^{1} \frac{3}{10} f(x + (10a(x)t)^{\frac{1}{2}} y + b(x)t)dy +$$

$$+\frac{2}{5} f(x + b(x)t) + c(x)f(x)t +$$

$$+\int_{-1}^{1} (\beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3) f(x + yt^{\frac{1}{3}})dy$$

$$\beta_0 = \frac{9}{8}\frac{t^2}{2}(ac'' + bc' + cc) - \frac{15}{4}\frac{t^{4/3}}{2}(aa'' + 2ab' + 2ac + ba')$$

$$\beta_1 = \frac{75}{8}\frac{t^{5/3}}{2}(ab'' + 2ac' + bb' + 2bc) - \frac{315}{4}\frac{t}{2}(2aa')$$

$$\beta_2 = -\frac{15}{8}\frac{t^2}{2}(ac'' + bc' + cc) + \frac{45}{4}\frac{t^{4/3}}{2}(aa'' + 2ab' + 2ac + ba')$$

$$\beta_3 = -\frac{105}{8}\frac{t^{5/3}}{2}(ab'' + 2ac' + bb' + 2bc) + \frac{525}{4}\frac{t}{2}(2aa')$$

Она удовлетворяет условию

$$S(t) = I + tL + \frac{(tL)^2}{2} + o(t^2).$$

Решением задачи Коши

$$\begin{cases} \text{u'}_t(t,x) = a(x)u''_{xx}(t,x) + b(x)u'_x(t,x) + c(x)u(t,x) \\ \text{u(0,x)=u}_0(x) \end{cases}$$

является

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty} \left(S\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0 \right)(x).$$

Идея построения

Напомним, что

$$Lf = af'' + bf' + cf$$

$$L^2 f = aaf^{(4)} + (2aa' + 2ab)f''' + (aa'' + 2ab' + 2ac + ba' + bb)f'' +$$

$$+(ab'' + 2ac' + bb' + 2bc)f' + (ac'' + bc' + cc)f$$

$$(S(t)f)(x) = f(x) + (Lf)(x) + \frac{t^2}{2}(L^2 f)(x) + o(t^2)$$

1) Докажем, что первая часть формулы (до второго интеграла) равна

$$f(x) + t(Hf)(x) + \frac{t^2}{2}\Big((a(x))^2 f^{(4)}(x) + (b(x))^2 f''(x)\Big) +$$

$$+t^2 a(x)b(x)f'''(x) + o(t^2)$$

Для этого каждое слагаемое разложим по формуле Тейлора в точке x, пока степень разложения не будет содержать t^2, а остальные слагаемые представим в виде остаточного члена Лагранжа.

2) Построим оставшуюся часть:

$$\frac{t^2}{2}\Big(L^2 f - (a(x))^2 f^{(4)}(x) + (b(x))^2 f''(x) + 2a(x)b(x)f'''(x)\Big) + o(t^2)$$

Задача сводится к проблеме моментов. Проблема моментов состоит в построении меры, имеющей заданные интегралы от одночленов вида x^n, называемых моментами.

$$\int_{-1}^{1}(\beta_0+\beta_1 y+\beta_2 y^2+\beta_3 y^3)f(x+yt^{\frac{1}{3}})dy=$$

$$=\alpha_0 f(x)+...+\alpha_4 f^{(4)}(x)+o(t^2)$$

В выражении

$$\frac{t^2}{2}\Big(L^2 f-(a(x))^2 f^{(4)}(x)+(b(x))^2 f''(x)+2a(x)b(x)f'''(x)\Big)+o(t^2)$$

мы приводим подобные слагаемые по производным функции f и получаем $\alpha_0 .. \alpha_4$.

Таким образом, мы получаем следующие линейные уравнения

$$\alpha_0^* = \int_{-1}^{1} (\beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3) dy$$

$$\alpha_1^* = \int_{-1}^{1} (\beta_0 y + \beta_1 y^2 + \beta_2 y^3 + \beta_3 y^4) dy$$

$$\alpha_2^* = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (\beta_0 y^2 + \beta_2 y^3 + \beta_2 y^4 + \beta_3 y^5) dy$$

$$\alpha_3^* = \frac{1}{6} \int_{-1}^{1} (\beta_0 y^3 + \beta_1 y^4 + \beta_2 y^5 + \beta_3 y^6) dy$$

Вывод

Найти общее решение задачи Коши для параболического дифференциального уравнения в частных производных трудно. Однако, с помощью методов, предложенных в задаче, мы можем построить аппроксимации сколь угодно высокой скорости сходимости для некоторого класса решений. При этом, построение сводится к линейной алгебре. Возможно, модификация этих методов позволит решать эту задачу численными методами достаточно эффективно.

Спасибо за внимание!