О ВЫБОРЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ В АЛГОРИТМЕ ВЕРНЕРА ПОИСКА РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ВИДА P_0/Q_n

Галкин О. Е.[1], **Галкина С. Ю.**[1]

1. Предварительные сведения

Всюду далее m и n — неотрицательные целые числа. Обозначим символом $\mathcal{R}_{m,n}$ множество всех рациональных функций вида

$$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{m}a_ix^i}{\sum\limits_{j=0}^{n}b_jx^j} \qquad (1)$$

с вещественными коэффициентами.

Дефектом $d(R)$ рациональной функции (1) называется такое число d, что $a_m=a_{m-1}=...=a_{m-d+1}=0$, $b_n=b_{n-1}=...=b_{n-d+1}=0$, но хотя бы один из коэффициентов a_{m-d}, b_{n-d} отличен от нуля. В случае $R\equiv 0$ считаем, что $d(R)=n$.

Пусть K — произвольное компактное (в том числе конечное) подмножество множества действительных чисел $\mathbf{R}$. Обозначим символом $\mathcal{R}_{m,n}^{K+}$ множество всех рациональных функций вида (1), таких что $Q_n(x)>0$ при любом $x\in K$.

Пусть $f\colon K\to\mathbf{R}$ — некоторая непрерывная функция. Рациональная функция $R_*=P_m/Q_n$ называется *наилучшим равномерным рациональным приближением* (сокращённо *НРРП*) из класса $\mathcal{R}_{m,n}^{K+}$ для функции f, если выполняется равенство

$$\max_{x\in K}|R_*(x)-f(x)|=\inf_{R\in\mathcal{R}_{m,n}^{K+}}\max_{x\in K}|R(x)-f(x)|.$$

Теорема о наилучших рациональных приближениях гласит (ср. [1], стр. 66; [2]):

Теорема A. Несократимая рациональная функция $R_*=P_m/Q_n$ есть наилучшее равномерное рациональное приближение из класса $\mathcal{R}_{m,n}^{K+}$ для вещественной непрерывной функции f на компактном множестве $K\subset\mathbf{R}$, содержащем не менее чем $N=m+n+2-d(R_*)$ точек, тогда и только тогда, когда в K существует N точек $x_1<...<x_N$, и существует число $\varepsilon_0\in\{-1,1\}$, такие что выполняются равенства

$$R_*(x_k)-f(x_k)=\varepsilon_0(-1)^k\cdot\max_{x\in K}|R_*(x)-f(x)|,\quad k=1,...,N.$$

Доказательство этой теоремы в такой форме аналогично доказательству этой же теоремы в случае, когда K есть отрезок, приведённому в [1].

Замечание 1. Если K — совершенное множество, то для любой непрерывной на нём функции f существует НРРП (см. [3], стр. 672). Если же множество K не является совершенным, наилучшее равномерное рациональное приближение из класса $\mathcal{R}_{m,n}^{K+}$ может не существовать. Например, оно не существует для $K=\{0,1,2\}$, $f(x)=x^2-3x+2$, и $m=0$, $n=1$ (см. [4], стр. 193). Кроме того, из теоремы A следует, что в классе $\mathcal{R}_{m,n}^{K+}$ существует не более одного НРРП для f (ср. [1], стр. 68).

На применении теоремы A основан, в частности, алгоритм Ремеза поиска наилучших равномерных рациональных приближений (см. [4], стр. 200; [5], стр. 366; [6]). Приведем его описание, следуя [4] и [5], в случае $d=0$, $N=m+n+2$, который мы будем рассматривать далее. Алгоритм состоит из 4 шагов:

[1]Работа выполнена при поддержке проектов: 1) АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)” Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/3927) и 2) ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы (проект НК-13П-13).

Шаг 1. Положим $p = 1$ и возьмём в множестве K произвольное подмножество $K_p = \{x_1^{(p)} < x_2^{(p)} < ... < x_N^{(p)}\}$ из N элементов.

Шаг 2. Из нелинейной системы относительно $a_0, \ldots, a_m$, $b_0, \ldots, b_n$ и h

$$\sum_{i=0}^{m} a_i (x_k^{(p)})^i \Bigg/ \sum_{j=0}^{n} b_j (x_k^{(p)})^j - f(x_k^{(p)}) = (-1)^k h^{(p)}, \quad k = 1, ..., N,$$

найдем рациональную функцию $R_p(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i \Bigg/ \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j$ и число $h^{(p)}$.

Шаг 3. Положим $r_p(x) = R_p(x) - f(x)$ и вычислим $\bar{h}^{(p)} = \max\limits_{x \in K} |r_p(x)|$.

Если $\bar{h}^{(p)} = h^{(p)}$, то по теореме А дробь $R_p(x)$ является наилучшим приближением на множестве K, работа алгоритма успешно завершена.

Шаг 4. Если $\bar{h}^{(p)} > h^{(p)}$, то существует точка $x_* \in K$, такая что $|r_p(x_*)| = \bar{h}^{(p)}$. Возьмём в множестве K новое подмножество $K_{p+1} = \{x_1^{(p+1)} < x_2^{(p+1)} < ... < x_N^{(p+1)}\}$, такое что $\mathrm{sign}(r_p(x_{k+1}^{(p+1)})) = -\mathrm{sign}(r_p(x_k^{(p+1)}))$ при $k = 1, \ldots, N-1$, $|r_p(x_k^{(p+1)})| \geqslant |h^{(p)}|$ при $k = 1, \ldots, N$, а также $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} |r_p(x_k^{(p+1)}))| = \bar{h}^{(p)}$. (Этого можно добиться, например, заменив одну из точек множества K_p на x_*.) Увеличим p на 1 и перейдём к шагу 2.

Замечание 2. Если в какой-то момент нельзя будет сделать шаг 2, то алгоритм не даст результата. Иначе в итоге работы алгоритма получаем последовательность рациональных функций $R_1, R_2, ...$ Она, как показал Ральстон в [7], в случае когда множество K_1 достаточно близко к множеству точек $K_0 = \{x_1, \ldots, x_N\}$ из теоремы А, будет сходиться к наилучшему рациональному приближению R_*.

Итак, в одном из шагов алгоритма Ремеза требуется на заданном множестве K_0, образованном $N = m + n + 2 - d$ точками, найти НРРП из класса $\mathcal{R}_{m,n}^{K_0+}$. Для этого и предназначен алгоритм Вернера (см., например, [8]).

2. Описание алгоритма Вернера

Пусть $N = m + n + 2$, в точках $x_1 < ... < x_N$ определена вещественная функция f. Требуется подобрать рациональную дробь $R_*(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i / \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j$, так чтобы на множестве $K_0 = \{x_1, \ldots, x_N\}$ она давала (дискретное) НРРП из класса $\mathcal{R}_{m,n}^{K_0+}$. По теореме А это равносильно следующей системе равенств:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i x_k^i \Bigg/ \sum_{j=0}^{n} b_j x_k^j - f(x_k) = (-1)^k h, \quad k = 1, ..., N, \tag{2}$$

где $h = \varepsilon_0 \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} |R_*(x_k) - f(x_k)|$.

Теперь задача состоит в нахождении h и коэффициентов $a_0, ..., a_m; b_0, ..., b_n$ таких, чтобы они удовлетворяли системе (2), и чтобы знаменатель $Q_n(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j$ был положителен в точках $x_1, \ldots, x_N$.

Умножив равенство (2) на знаменатель и перенеся всё в левую часть, получим:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i x_k^i + \sum_{j=0}^{n} b_j x_k^j ((-1)^{k+1} h - f(x_k)) = 0, \quad k = 1, ..., N. \tag{3}$$

При фиксированном h эта однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда её определитель $D_{n+1}(h)$ равен 0. Поскольку h входит лишь в последние $n + 1$ столбцов её матрицы, то определитель $D_{n+1}(h)$ является многочленом степени $n+1$ от h. Все его корни $h_1, ..., h_{n+1}$, как доказал Вернер (см. [8], стр. 334), вещественны. Назовем их *собственными значениями*.

Для каждого собственного значения h_s ($s = 1, ..., n+1$), решая систему (3) при $h = h_s$, можно найти коэффициенты $a_{0,h_s}, ..., a_{m,h_s}$, $b_{0,h_s}, ..., b_{n,h_s}$ и многочлены $P_{m,h_s}(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_{i,h_s} x^i$, $Q_{n,h_s}(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} b_{j,h_s} x^j$.

Предложение. (Ср. [9], стр. 261; [10], стр. 115.) Существует не более одного собственного значения h_s, для которого соответствующий многочлен Q_{n,h_s} положителен во всех точках $x_1, ..., x_N$.

Замечание 3. Возможна ситуация, когда ни одному из $h_1, ..., h_{n+1}$ не соответствует многочлен Q_{n,h_s}, положительный во всех точках $x_1, ..., x_N$. Например, так будет, если $m = 0$, и значения $f(x_1), ..., f(x_N)$ меняют знак больше одного раза. Маэли ([9], стр. 262) привел пример такой ситуации для $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$; $f(x) = x$; $m = 0$, $n = 1$. Такая ситуация возможна, даже если все значения $f(x_1), ..., f(x_N)$ положительны.

Замечание 4. Если всё же существует h_s, для которого многочлен Q_{n,h_s} положителен во всех точках $x_1, ..., x_N$, то не обязательно это h_s имеет минимальный модуль среди $h_1, ..., h_{n+1}$. Подтверждающий это пример приведен в [9] (стр. 262): $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$; $f(x) = (4 + 5x - x^2)/2$; $m = 0$, $n = 1$.

3. Основная теорема

Приводимая ниже основная теорема работы предлагает, в случае $m = 0$, способ выбора того собственного значения h_s, которое порождает многочлен Q_{n,h_s}, положительный на $\{x_1, ..., x_N\}$. Из условий теоремы следует, что $d = 0$, поэтому $N = n + 2$. Квадратными скобками обозначена целая часть числа, заключённого в них.

Теорема. Пусть $m = 0$, $x_1 < ... < x_{n+2}$, функция f во всех точках $x_1, ..., x_{n+2}$ имеет значения одного знака, $h_1 < ... < h_{n+1}$ — все собственные значения, и значение h_s порождает положительный во всех точках $x_1, ..., x_{n+2}$ многочлен Q_{n,h_s}. Тогда:

1) если $f(x_k) > 0$ при $k = 1, ..., n+2$, то $s = [(n+2)/2]$;

2) если $f(x_k) < 0$ при $k = 1, ..., n+2$, то $s = [(n+3)/2]$.

Литература

[1]. Ахиезер Н. И. *Лекции по теории аппроксимации.* М. Наука. 1965. 407 с.

[2]. Ахиезер Н. И. *Лекции по теории аппроксимации.* Харьков. Гостехиздат. 1940. 137 с.

[3] Walsh J. L. *The existence of rational functions of best approximation.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1931. Vol. 33. P. 668-689.

[4]. Watson G. A. *Approximation theory and numerical methods.* N. Y. John Wiley and sons. 1980. 229 p.

[5]. Sendov Bl., Andreev A. *Handbook of numerical analysis. V. III.* Lions, Carset editors, 1994.

[6]. Werner H. *Tschebyscheff-Approximation im Bereich der rationalen Funktionen bei Vorliegen einer guten Ausgangsnäherung.* // Archives for Rational Mechanics and Analysis. 1962. Vol. 10. P. 205-219.

[7]. Ralston A. *Rational Chebyshev approximation by Remes' algorithms.* // Numer. math. 1965. Vol. 7. P. 322-330.

[8]. Werner H. *Rationale Tschebyscheff Approximation, Eigenwerttheorie und Difreren-zenrechnung.* // Archives for Rational Mechanics and Analysis. 1963. Vol. 12. P. 330-347.

[9]. Maehly H. J., Witzgall C. *Methods for Fitting Rational Approximations. Parts II and III.* // Journal of the Association for Computing Machinery. Vol. 10. P. 257-277.

[10]. Powell M. J. D. *Approximation theory and methods.* Cambridge University Press. 1981. 339 p.