УДК 517.518

О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ СТЕПЕННОГО КЛАССА ТАКАГИ

О.Е. ГАЛКИН, С.Ю. ГАЛКИНА, А.А. ТРОНОВ

Содержание

Аннотация. Функции из степенного класса Такаги по конструкции аналогичны непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции Такаги, описанной в 1903 г. Они имеют один вещественный параметр $p > 0$ и определяются с помощью ряда $S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(T_0(2^n x)/2^n)^p$, где $T_0(x)$ — расстояние между точкой $x \in \mathbb{R}$ и ближайшей к ней целой точкой. При различных значениях параметра p мы изучаем такие свойства функций $S_p(x)$, как непрерывность, обобщенное условие Гёльдера, глобальные максимумы и дифференцируемость в точках $x = 1/3$, $x = 2/3$.

Ключевые слова: степенной класс Такаги, непрерывность, обобщенное условие Гёльдера, глобальный максимум, дифференцируемость

Mathematics Subject Classification MSC2020: 26A15, 26A16, 26A27

Abstract. By construction, functions of power Takagi class are similar to Takagi's continuous nowhere differentiable function. These functions have one real parameter $p > 0$. They are defined by the series $S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(T_0(2^n x)/2^n)^p$, where $T_0(x)$ is the distance from $x \in \mathbb{R}$ to the nearest integer. We study such properties of functions $S_p(x)$ as continuity, generalized Hölder condition, global maximums and differentiability at the points $x = 1/3$, $x = 2/3$, for various values of p.

Keywords: Takagi power class, continuity, generalized Hölder condition, global maximum, differentiability

1. Введение

Данная статья посвящена изучению функций из степенного класса Такаги. Эти функции по конструкции аналогичны непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции Такаги, описанной в 1903 г ([1]). Они имеют один вещественный параметр $p > 0$ и определяются следующим образом.

Определение 1. *Степенным классом Такаги мы называем семейство функций $S_p(x)$, имеющих один вещественный параметр $p > 0$ и заданных на числовой оси $\mathbb{R}$ равенством*

$$S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T_0(2^n x)}{2^n} \right)^p, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $T_0(x) = |x - [x + 1/2]| = |\{x + 1/2\} - 1/2| = \rho(x, \mathbb{Z})$ — расстояние между точкой x и ближайшей к ней целой точкой, $[y]$ — целая часть числа $y \in \mathbb{R}$, $\{y\}$ — дробная часть числа y.

Функция T_0 может быть определена также следующим образом:

$$T_0(x) = \begin{cases} x - n & \text{при } x \in [n, n + 1/2], n \in \mathbb{Z}; \\ 1 - (x - n) & \text{при } x \in [n + 1/2, n + 1], n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что при $p = 1$ функция $S_p(x)$ совпадает с функцией Такаги.

Hata and Yamaguti [2, Sec. 2] replaced the sequence of coefficients $\{1/2^n\}$ in the definition of the Takagi function with an arbitrary sequence of constants and got a new family of functions, calling it *Takagi class*.

The real functions $T_v(x)$ which have on the real parameter $v \in (-1; 1)$ and can be defined by the formula

$$T_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v^n T_0(2^n x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

form a narrower class, namely *exponential Takagi-Landsberg class* (see [3], [4], [5], [6], [7]). Note that for $v = 0$, the function $T_v(x)$ matches $T_0(x)$, and for $v = 1/2$ it matches with the Takagi function $T(x)$.

In this article, При различных значениях параметра p мы изучаем такие свойства функций $S_p(x)$, как непрерывность, обобщенное условие Гёльдера, глобальные максимумы и дифференцируемость в точках $x = 1/3$, $x = 2/3$.

We can say that the problem of finding extremes for T_v was set by J. Tabor and J. Tabor (see [8, Problem 1.2, p. 731]. In order to accurately estimate continuous semiconvex functions, they introduced the functions ω_p, which can be set as $\omega_p(x) = 2 \cdot T_{1/2^p}(x)$, and obtained the formula for global maxima of the functions ω_{p_n} on $[0; 1]$ for one specific sequence $\{p_n\}$ (see [8, Theorem 3.1]).

Here are some more results about the extremes of the T_v functions.

1) In the case of $v = 1/2$ Kahane (see [9, Lieu 1]) found points of local and global extremes for $T_v(x) = T(x)$.

2) Further results on local extremes and sets of the Takagi function level can be found in the reviews [10] and [11].

3) In [12, Theorem 4] it is proved that for $v \in [-1/2; 1/4]$, the point $1/2$ is the point of the global maximum of the function T_v on $[0; 1]$, and for $v \in (-1; -1/2) \cup (1/4; 1)$ is not.

4) In the case of $v = -1/2$, it follows from Allaart's remark [13, Remark 5.6, p.28] that the set of minimum points of the function T_v is a Cantor type set obtained by removing the «middle half», and therefore is uncountable.

5) Han and Schied in [5], [6] gave a new approach to characterizing and computing the set of global maximizers and minimizers of the functions in the Takagi class and, in particular, in the exponential Takagi–Landsberg class. They showed that the function T_v has a unique maximizer in $[0, 1/2]$ if and only if there does not exist a Littlewood polynomial that has $2v$ as a certain type of root, called step root. Their general results lead to explicit and closed-form expressions for the maxima of the exponential Takagi–Landsberg functions with $v \in (-1, 1/4] \cup (1/, 12)$.

Similar results for maximums and minimums of functions in exponential Takagi–Landsberg class were obtained in [7].

The Takagi function and its generalizations are used in various fields of mathematics: mathematical analysis, probability theory, number theory, and others. A large number of publications are dedicated to these functions, and this number continues to increase. Lots of interesting results and links available in the reviews [10] and [11]. See also recent papers, for example [14], [15], [16].

Let us briefly describe the structure and main results of the work. The work consists of six sections.

Section 1 is an introduction.

Section 2 contains the graphs of functions $y = S_p(x)$ in exponential Takagi class for $p = 0.2$, $p = 0.4$, $p = 0.7$ and $p = 1$.

In section 3 we prove that the functions $S_p(x)$ is everywhere defined in $\mathbb{R}$, continuous and has a period of 1.

In section 4 we prove that for every $p \in (0; 1)$ the functions $S_p(x)$ satisfy the generalized H older condition with the exponent p.

In section 5 we get some functional equation that the functions $S_p(x)$ satisfy for every $p \in (0; 1)$.

The section 6 is devoted to finding the global maxima of the functions $S_p(x)$ and the sets where they are reached. Moreover, here we prove that for any $p \in (0; 1)$ the function $S_p(x)$ has no derivative at points $x = 1/3$ and $x = 2/3$.

2. Графики функций $y = S_p(x)$ степенного класса Такаги

В данном разделе мы приводим эскизы графиков функций $y = S_p(x)$ из показательного класса Такаги для $p = 0.2$, $p = 0.4$, $p = 0.7$ и $p = 1$. Двумя вертикальными линиями указаны точек глобального максимума $x = 1/3$ и $x = 2/3$.

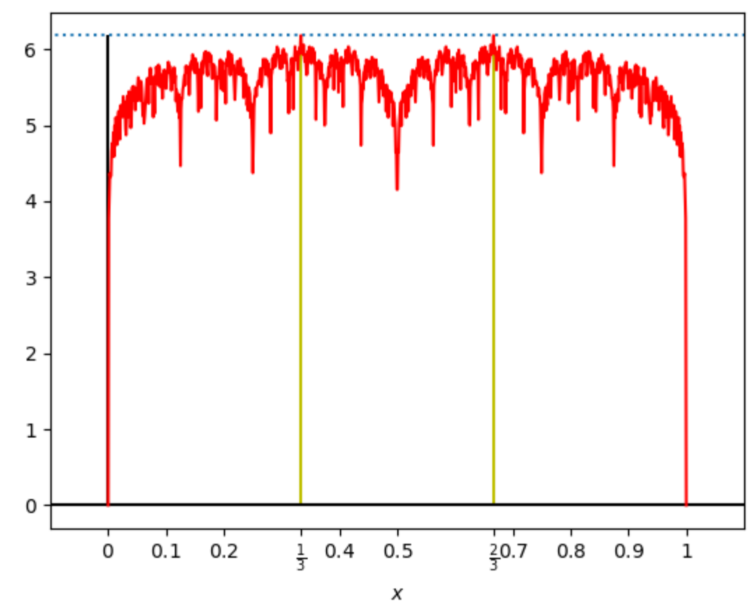

Рис. 1. График функции $y = S_p(x)$ при $p = 0.2$.

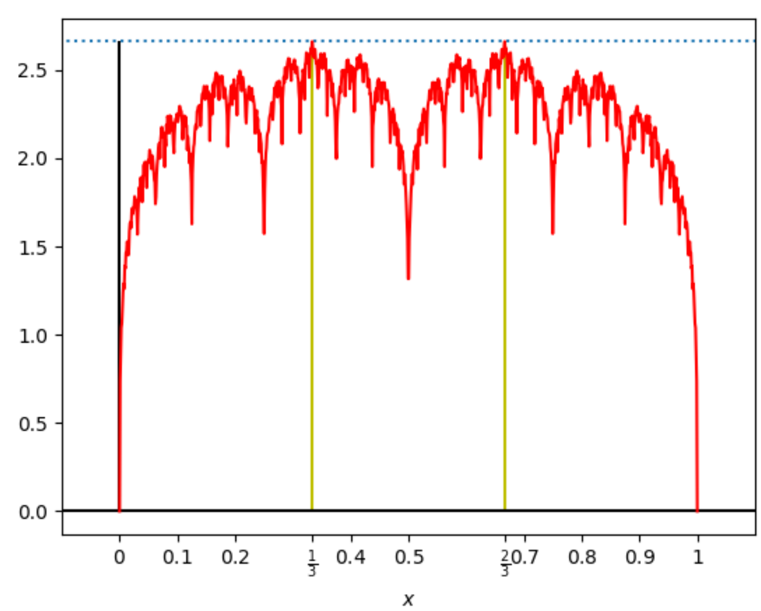

Рис. 2. График функции $y = S_p(x)$ Такаги, при $p = 0.4$.

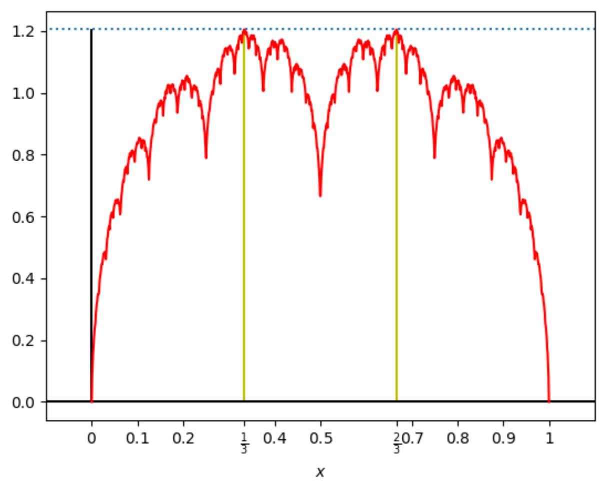

Рис. 3. График функции $y = S_p(x)$ Такаги, при $p = 0.7$.

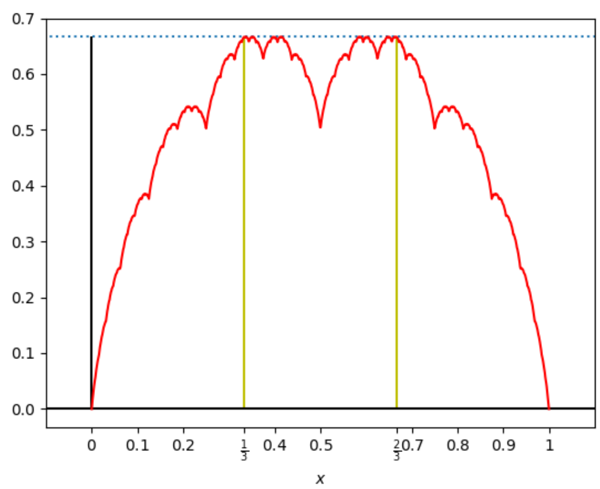

Рис. 4. График функции $y = S_p(x)$ Такаги, при $p = 1$.

3. Непрерывность функций степенного класа Такаги

Теорема 1. *При любом $p > 0$ функция $S_p(x)$ из степенного класса Такаги всюду определена на $\mathbb{R}$, непрерывна, имеет период 1 и обладает следующим свойством симметрии:*

$$S(x) = S(q - x) \quad \text{при всех } q \in \mathbb{Z} \text{ и всех } x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Кроме того, при всех $p > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|S_p(x)| \leqslant 1/(2^p - 1)$.

Доказательство. 1) Сначала воспользуемся признаком Вейерштрасса, чтобы доказать равномерную сходимость функционального ряда (1).

Очевидно, при всех $p > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|T_0(x)| \leqslant 1/2$. Поэтому

$$\left|\left(\frac{T_0(2^n x)}{2^n}\right)\right|^p \leqslant \left(\frac{1/2}{2^n}\right)^p = \frac{1}{2^{(n+1)p}}.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} 1/2^{(n+1)p}$ сходится, и его сумма равна $1/(2^p - 1)$. Следовательно, ряд (1), определяющий $S_p(x)$, сходится равномерно на всем $\mathbb{R}$, причем $S_p(x) \leqslant 1/(2^p - 1)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

2) Из равномерной сходимости ряда (1) и непрерывности его слагаемых, согласно теореме о непрерывности суммы функционального ряда, вытекает непрерывность функции $S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \big(T_0(2^n x)/2^n\big)^p$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

3) Периодичность функции $S_p(x)$ следует из формулы (1) и наличия периода 1 у функции T_0. $\square$

4. Обобщенная гёльдеровость функций степенного класса Такаги

Лемма 1. *Для любых чисел $x, y \in \mathbb{R}$ и $p > 0$ выполняется неравенство*

$$|T_0^p(x) - T_0^p(y)| \leqslant \frac{1}{2^p}. \tag{5}$$

Доказательство. Поскольку $T_0(x) \in [0, 1/2]$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то $T_0^p(x) \in [0, 1/2^p]$. Следовательно, при всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|T_0^p(x) - T_0^p(y)| \leqslant 1/2^p$. $\square$

Лемма 2. *Для любых чисел $x, y \in \mathbb{R}$ и $p \in (0; 1]$ выполняется неравенство*

$$|T_0^p(x) - T_0^p(y)| \leqslant |x - y|^p \tag{6}$$

Доказательство. 1) Докажем сначала, что верно неравенство

$$|a^p - b^p| \leqslant |a - b|^p \quad \text{при всех } a \geqslant 0, b \geqslant 0 \text{ и } p \in (0; 1]. \tag{7}$$

Предположим, что $a \geqslant b$. Случай $a = 0$ тривиален.

Пусть $a > 0$. Разделив обе части неравенства (7) на $a^p > 0$, получим равносильное неравенство: $|1 - (b/a)^p| \leqslant |1 - b/a|^p$. Поскольку $b/a \in [0; 1]$ и $p \in (0; 1]$, то это неравенство вытекает из двойного неравенства $1 - (b/a)^p \leqslant 1 - b/a \leqslant (1 - b/a)^p$.

Легко видеть, что в случае $a < b$ неравенство (7) также выполняется, в силу симметрии: $|a^p - b^p| = |b^p - a^p| \leqslant |b - a|^p = |a - b|^p$.

2) При всех $x, y \in \mathbb{R}$ докажем неравенство

$$|T_0(x) - T_0(y)| \leqslant |x - y|. \tag{8}$$

Так как функция $T_0(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и существует производная $T_0'(s) = \pm 1$ во всех точках $s \in \mathbb{R}$, кроме точек вида $s = q/2$, где $s \in \mathbb{Z}$, то верны соотношения

$$|T_0(x) - T_0(y)| = |\int_x^y T_0'(s)ds| \leqslant |\int_x^y |T_0'(s)|ds| = |x - y|.$$

3) Опираясь на результаты пунктов 1) и 2) нашего доказательства, докажем неравенство (6) при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Положим $a = T_0(x)$ и $b = T_0(y)$. Тогда $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, поэтому из неравенства (7) вытекает оценка $|T_0^p(x) - T_0^p(y)| \leqslant |T_0(x) - T_0(y)|^p$. Отсюда, возводя неравенство 8 в степень p, выводим нужное соотношение (6):

$$|T_0^p(x) - T_0^p(y)| \leqslant |T_0(x) - T_0(y)|^p \leqslant |x - y|^p.$$

□

Лемма 3. *При любом $p \in [0; 1]$ выполняется неравенство $p \cdot \ln 2 \cdot 2^p \geqslant 2^p - 1$.*

Доказательство. Доказываемое неравенство равносильно неравенству $2^p(1-p\cdot\ln 2) \leqslant 1$.

Зададим функцию $g(p) = 2^p(1-p\cdot\ln 2)$. Эта функция не возрастает на отрезке $[0; 1]$, так как

$$g'(p) = 2^p((1 - p \cdot \ln 2)\ln 2 - \ln 2) = -p \cdot 2^p \ln^p 2 \leqslant 0.$$

Кроме того, $g(0) = 1$. Поэтому $g(p) = 2^p(1 - p \cdot \ln 2) \leqslant 1$ при всех $p \in [0; 1]$. □

Определение 2. *Будем говорить, что функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем p и константой C, если при всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^p.$$

Определение 3. *Будем говорить, что функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет обобщенному условию Гёльдера с показателем p и константой C, если при всех различных $x, y \in \mathbb{R}$, таких что $|x - y| \leqslant 1/2$, выполняется неравенство*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^p \cdot \log_2 \frac{1}{|x - y|}.$$

Теорема 2. *При любом $p \in (0; 1]$ функция $S_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(T_0(2^k x)/2^k)^p$ из степенного класса Такаги удовлетворяет обобщенному условию Гёльдера с показателем p и константой $C = 1/p \cdot \log_2\big(p \cdot \ln 2/(2^p - 1)\big) + 2^p/(p \cdot \ln 2) + 1$.*

Доказательство. Пусть две различные точки $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условию $|x - y| \leqslant 1/2$. Зафиксируем их. Тогда будут верны соотношения

$$\begin{aligned} |S_p(x) - S_p(y)| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{T_0(2^k x)}{2^k}\right)^p - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{T_0(2^k y)}{2^k}\right)^p\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T_0^p(2^k x) - T_0^p(2^k y)}{2^{kp}}\right| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|T_0^p(2^k x) - T_0^p(2^k y)|}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{|T_0^p(2^k x) - T_0^p(2^k y)|}{2^{kp}} + \sum_{k=n}^{\infty}\frac{|T_0^p(2^k x) - T_0^p(2^k y)|}{2^{kp}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Слагаемые первой суммы в правой части (9) оценим, используя неравенство (6) из леммы 2:

$$|T_0^p(2^k x) - T_0^p(2^k y)| \leqslant |2^k x - 2^k y|^p.$$

Слагаемые второй суммы в правой части (9) оценим, используя неравенство (5) из леммы 1:

$$|T_0^p(2^k x) - T_0^p(2^k y)| \leqslant \frac{1}{2^p}.$$

Используем эти две оценки, получаем из (9) следующие соотношения:

$$|S_p(x) - S_p(y)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|2^k x - 2^k y|^p}{2^{kp}} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1/2^p}{2^{kp}} = n \cdot |x-y|^p + \frac{1}{2^{pn}(2^p-1)}. \tag{10}$$

Выберем число $n \in \mathbb{N}$, так, чтобы уменьшить правую часть этой оценки. Для этого найдем минимум функции $f(t) = t \cdot |x-y|^p + 1/2^{pt}(2^p-1)$.

Имеем:

$$f'(t) = |x-y|^p - \frac{p \cdot \ln 2}{2^{pt}(2^p-1)}.$$

Приравнивая $f'(t)$ к нулю, находим отсюда точку минимума:

$$t_0 = \frac{1}{p} \cdot \log_2 \Big(\frac{p \cdot \ln 2}{(2^p-1) \cdot |x-y|^p} \Big). \tag{11}$$

Так как $|x-y| \leqslant 1/2$, то $t_0 \geqslant 1/p \cdot \log_2 \big(p \cdot \ln 2 \cdot 2^p/(2^p-1) \big)$. Отсюда, в силу леммы 3, получаем, что $t_0 \geqslant 0$.

Далее, положим $n_0 = [t_0] = \big[1/p \cdot \log_2 \big(p \cdot \ln 2/((2^p-1) \cdot |x-y|^p) \big) \big]$. Тогда $n_0 \geqslant 0$ и выполняется неравенство $t_0 - 1 < n_0 \leqslant t_0$. Отсюда и из формулы (11) следует, что

$$\frac{1}{p} \cdot \log_2 \Big(\frac{p \cdot \ln 2}{(2^p-1) \cdot |x-y|^p} \Big) - 1 < n_0 \tag{12}$$

и

$$n_0 \leqslant \frac{1}{p} \cdot \log_2 \Big(\frac{p \cdot \ln 2}{(2^p-1) \cdot |x-y|^p} \Big). \tag{13}$$

Согласно (10) имеем:

$$|S_p(x) - S_p(y)| \leqslant n_0 \cdot |x-y|^p + \frac{1}{2^{pn}(2^p-1)}. \tag{14}$$

Из неравенства (12) следует, что

$$\frac{1}{2^{pn_0}(2^p-1)} < \frac{2^p |x-y|^p}{p \cdot \ln 2}. \tag{15}$$

Умножая обе части неравенства (13) на $|x-y|^p$, получим:

$$n_0 \cdot |x-y|^p \leqslant \left(\frac{1}{p} \cdot \log_2 \frac{p \cdot \ln 2}{2^p - 1} + \log_2 \frac{1}{|x-y|} \right) \cdot |x-y|^p. \tag{16}$$

Подставляя неравенства (15) и (16) в формулу (14), получаем оценку

$$|S_p(x) - S_p(y)| \leqslant \left(\frac{1}{p} \cdot \log_2 \frac{p \cdot \ln 2}{2^p-1} + \frac{2^p}{p \cdot \ln 2} + \log_2 \frac{1}{|x-y|} \right) \cdot |x-y|^p.$$

Обозначим $b = 1/p \cdot \log_2 \big(p \cdot \ln 2/(2^p - 1)\big) + 2^p/(p \cdot \ln 2)$. Тогда последнюю оценку можно переписать в виде

$$|S_p(x) - S_p(y)| \leqslant \left(b + \log_2 \frac{1}{|x-y|}\right) \cdot |x-y|^p. \tag{17}$$

Так как $|x - y| \leqslant 1/2$, то $\log_2(1/|x-y|) \geqslant 1$. Поэтому из (17) следует неравенство

$$|S_p(x) - S_p(y)| \leqslant (b+1) \cdot |x-y|^p \log_2 \frac{1}{|x-y|} = C \cdot |x-y|^p \log_2 \frac{1}{|x-y|},$$

где

$$C = b + 1 = \frac{1}{p} \cdot \log_2 \left(\frac{p \cdot \ln 2}{2^p - 1}\right) + \frac{2^p}{p \cdot \ln 2} + 1.$$

Что и требовалось доказать. □

5. Функциональное уравнение для степенного класса Такаги

Теорема 3. *При любых $p > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ функции $S_p(x)$ из степенного класса Такаги удовлетворяют функциональному уравнению*

$$S_p(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{T_0(2^k x)}{2^k}\right)^p + \frac{S_p(2^m x)}{2^{mp}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

где $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доказательство. В силу равенства (1), определяющего функцию $S_p(x)$, имеем:

$$S_p(2^m x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T_0(2^n \cdot 2^m x)}{2^n}\right)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T_0(2^{n+m} x)}{2^n}\right)^p.$$

Разделив обе части на $2^{mp} > 0$, получим:

$$\frac{S_p(2^m x)}{2^{mp}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T_0(2^{n+m} x)}{2^{n+m}}\right)^p = \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{T_0(2^k x)}{2^k}\right)^p = S_p(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{T_0(2^k x)}{2^k}\right)^p$$

Отсюда следует равенство (18), которое мы доказываем. □

Следствие 1. *При любом $p > 0$ функции $S_p(x)$ из степенного класса Такаги удовлетворяют функциональным уравнениям*

$$S_p(2x) = 2^p \big(S_p(x) - T_0^p(x)\big), \quad x \in \mathbb{R} \tag{19}$$

и

$$S_p(4x) = 4^p \big(S_p(x) - T_0^p(x)\big) - 2^p T_0^p(2x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Доказательство. Функциональное уравнение (19) следует из формулы (18) при $m = 1$. Функциональное уравнение (20) следует из формулы (18) при $m = 2$. □

Лемма 4. *Для любого $p > 0$ значения функции $S_p(x)$ в точках $x = 1/2$, $x = 1/3$, $x = 1/5$ и $x = 2/5$ можно вычислить по следующим формулам: $S_p(1/2) = 1/2^p$, $S_p(1/3) = 2^p/(6^p - 3^p)$, $S_p(1/5) = 2 \cdot 4^p/(20^p - 5^p)$ и $S_p(2/5) = (8^p - 2^p)/(20^p - 5^p)$.*

Доказательство. 1) Равенство $S_p(1/2) = 1/2^p$ следует из формул (1) и (2).

2) Подставив в формулу (19) значение $x = 1/3$, получим: $S_p(2/3) = 2^p\big(S_p(1/3) - T_0^p(1/3)\big)$. Отсюда, поскольку $T_0^p(1/3) = 1/3$ в силу (2) и $S_p(2/3) = S_p(1/3)$ в силу свойства симметрии (4), следует равенство $S_p(1/3) = 2^p\big(S_p(1/3) - T_0^p(1/3)\big)$. Из этого равенства находим, что $S_p(1/3) = 2^p/(6^p - 3^p)$.

3) Подставив в формулу (19) значения $x = 1/5$ и $x = 2/5$ получим следующие два равенства: $S_p(2/5) = 2^p\big(S_p(1/5) - T_0^p(1/5)\big)$ и $S_p(4/5) = 2^p\big(S_p(2/5) - T_0^p(2/5)\big)$.

В силу (2) имеем: $T_0^p(1/5) = 1/5$ и $T_0^p(2/5) = 2/5$. Кроме того, $S_p(4/5) = S_p(1/5)$ в силу свойства симметрии (4). С учетом этого, из предыдущих двух равенств получаем следующие два равенства: $S_p(2/5) = 2^p\big(S_p(1/5) - (1/5)^p\big)$ и $S_p(1/5) = 2^p\big(S_p(2/5) - (2/5)^p\big)$. Решая полученную систему из двух уравнений относительно $S_p(1/5)$ и $S_p(2/5)$, находим, что $S_p(1/5) = 2 \cdot 4^p/(20^p - 5^p)$ и $S_p(2/5) = (8^p + 2^p)/(20^p - 5^p)$. □

6. Глобальные максимумы функций степенного класса Такаги для значений параметра $0 < p < 1$

Лемма 5. *Для любых действительных чисел a, b, s и p, удовлетворяющих условиям $0 < s \leqslant a < b$ и $0 < p < 1$, выполняется неравенство*

$$(a+s)^p - (a-s)^p > (b+s)^p - (b-s)^p.$$

Доказательство. Зададим на отрезке $[0, a]$ функцию $f(s) = \big((a+s)^p - (a-s)^p\big) - \big((b+s)^p - (b-s)^p\big)$. Нам достаточно доказать неравенство $f(s) > 0$ для любого $s \in (0, a]$.

Вычислим производную $f'(s)$ при $s \in (0, a]$:

$$f'(s) = p \cdot \big((a+s)^{p-1} - (b+s)^{p-1} + (a-s)^{p-1} - (b-s)^{p-1}\big).$$

Поскольку $(a+s)^{p-1} > (b+s)^{p-1}$ и $(a-s)^{p-1} > (b-s)^{p-1}$ при всех $s \in (0, a]$, то $f'(s) > 0$. Так как функция $f(s)$ непрерывна при $s \in [0, a]$, то $f(s)$ строго возрастает на отрезке $[0, a]$. В силу равенства $f(0) = 0$ отсюда вытекает неравенство $f(s) > 0$ для любого $s \in (0, a]$. Что и требовалось доказать. □

Лемма 6. *Пусть $0 < p < 1$. Для каждого целого неотрицательного n зададим на полуинтервале $(0; 1]$ функцию*

$$D_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \Big(\big(2^{n-k+2} - (-1)^{n+k} + (-1)^k \cdot 3s\big)^p - \big(2^{n-k+2} - (-1)^{n+k} - (-1)^k \cdot 3s\big)^p\Big). \quad (21)$$

Тогда для любого $s \in (0; 1]$ выполнятся неравенство $D_n(s) > 0$, если n четно, и неравенство $D_n(s) < 0$, если n нечетно.

Доказательство. Для каждого целого $k=0,1,\ldots,n$ и любого $s\in(0;1]$ положим

$$d_{n,k}(s)=\big(2^{n-k+2}-(-1)^{n+k}+(-1)^k\cdot 3s\big)^p-\big(2^{n-k+2}-(-1)^{n+k}-(-1)^k\cdot 3s\big)^p. \tag{22}$$

Тогда из формулы (21) следует равенство $D_n(s)=\sum_{k=0}^n d_{n,k}(s)$.

1) Сначала докажем, что $D_n(s)<0$ при нечетных n. Для этого разобьем сумму $\sum_{k=0}^n d_{n,k}(s)$, задающую $D_n(s)$, на пары слагаемых: $D_n(s)=\sum_{i=0}^{(n-1)/2}\big(d_{n,2i}(s)+d_{n,2i+1}(s)\big)$. Нам достаточно показать, что сумма каждой пары отрицательна, то есть $d_{n,2i}(s)+d_{n,2i+1}(s)<0$ при любых $s\in(0;1]$ и любых $i=0,1,\ldots,(n-1)/2$.

Положим $a_{n,i}=2^{n-2i+1}-1$ и $b_{n,i}=2^{n-2i+2}+1$. Тогда, в силу формулы (22), верно равенство

$$d_{n,2i}(s)+d_{n,2i+1}(s)=(2^{n-2i+2}+1+3s)^p-(2^{n-2i+2}+1-3s)^p+(2^{n-2i+1}-1-3s)^p-$$
$$-(2^{n-2i+1}-1+3s)^p=\big((b_{n,i}+3s)^p-(b_{n,i}-3s)^p\big)-\big((a_{n,i}+3s)^p-(a_{n,i}-3s)^p\big).$$

Поскольку $0<3s\leqslant 3\leqslant a_{n,i}<b_{n,i}$ для любых $s\in(0;1]$ и любых $i=0,1,\ldots,(n-1)/2$, то применима лемма 5. Согласно этой лемме, верна оценка $(a_{n,i}+3s)^p-(a_{n,i}-3s)^p>(b_{n,i}+3s)^p-(b_{n,i}-3s)^p$. Отсюда получаем нужное неравенство $d_{n,2i}(s)+d_{n,2i+1}(s)<0$ для любых $s\in(0;1]$ и любых $i=0,1,\ldots,(n-1)/2$.

2) Теперь докажем, что $D_n(s)>0$ при четных n. Для этого в сумме $\sum_{k=0}^n d_{n,k}(s)$, задающей $D_n(s)$, первое слагаемое выделим отдельно, а остальные слагаемые разобьем на пары: $D_n(s)=d_{n,0}(s)+\sum_{i=1}^{n/2}\big(d_{n,2i-1}(s)+d_{n,2i}(s)\big)$. Нам достаточно показать, что здесь все слагаемые положительны, то есть $d_{n,0}(s)>0$ и $d_{n,2i-1}(s)+d_{n,2i}(s)>0$ при любых $s\in(0;1]$ и любых $i=0,1,\ldots,n/2$.

В сил равенства (22) имеем: $d_{n,0}(s)=(2^{n+2}-1+3s)^p-(2^{n+2}-1-3s)^p>0$.

Далее, положим $a_{n,i}=2^{n-2i+2}-1$ и $b_{n,i}=2^{n-2i+3}+1$. Тогда верно равенство

$$d_{n,2i-1}(s)+d_{n,2i}(s)=(2^{n-2i+3}+1-3s)^p-(2^{n-2i+3}+1+3s)^p+(2^{n-2i+2}-1+3s)^p-$$
$$-(2^{n-2i+2}-1-3s)^p=\big((a_{n,i}+3s)^p-(a_{n,i}-3s)^p\big)-\big((b_{n,i}+3s)^p-(b_{n,i}-3s)^p\big).$$

Поскольку $0<3s\leqslant 3\leqslant a_{n,i}<b_{n,i}$ для любых $s\in(0;1]$ и любых $i=0,1,\ldots,n/2$, то применима лемма 5. Согласно этой лемме, верна оценка $(a_{n,i}+3s)^p-(a_{n,i}-3s)^p>(b_{n,i}+3s)^p-(b_{n,i}-3s)^p$. Отсюда получаем нужное неравенство $d_{n,2i-1}(s)+d_{n,2i}(s)>0$ для любых $s\in(0;1]$ и любых $i=0,1,\ldots,n/2$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 7. *Для каждого $n=0,1,2,\ldots$ зададим отрезок $[a_n,b_n]$ с концами*

$$a_n=\frac{1}{3}+\frac{(-1)^{n+1}}{3\cdot 2^{n+2}}-\frac{1}{2^{n+2}}\quad \textit{и}\quad b_n=\frac{1}{3}+\frac{(-1)^{n+1}}{3\cdot 2^{n+2}}+\frac{1}{2^{n+2}}. \tag{23}$$

Тогда

1) При каждом $n=0,1,2,\ldots$ длина отрезка $[a_n,b_n]$ равна $1/2^{n+1}$, а его серединой является точка $c_n=1/3+(-1)^{n+1}/(3\cdot 2^{n+2})$, которая может быть записана также в виде $c_n=q_n/2^{n+2}$, где q_n — некоторое целое число.

2) Если n — четно, то $a_{n+1}=c_n$ и $b_{n+1}=b_n$, то есть отрезок $[a_{n+1},b_{n+1}]$ является правой половиной отрезка $[a_n,b_n]$. Если n — нечетно, то $a_{n+1}=a_n$ и $b_{n+1}=c_n$, то есть отрезок $[a_{n+1},b_{n+1}]$ является левой половиной отрезка $[a_n,b_n]$.

3) Отрезки $[a_n, b_n]$ *вложены (то есть* $[0, 1/2] = [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \ldots$*), и выполнено равенство* $\bigcap_{n=0}^{\infty}[a_n, b_n] = \{1/3\}$.

Доказательство. 1) В этом пункте в доказательстве нуждается лишь то, что число $c_n = 1/3 + (-1)^{n+1}/(3 \cdot 2^{n+2})$ можно представить в виде $c_n = q_n/2^{n+2}$, где q_n — целое число. Из равенства $c_n = 1/3 + (-1)^{n+1}/(3 \cdot 2^{n+2}) = q_n/2^{n+2}$ находим, что $q_n = (2^{n+2} + (-1)^{n+1})/3$. Если n — четное, то 2^{n+2} при делении на 3 дает остаток 1 и $(-1)^{n+1} = -1$, поэтому q_n — целое. Аналогично, если n — нечетное, то 2^{n+2} при делении на 3 дает остаток 2 и $(-1)^{n+1} = 1$, значит в этом случае q_n — тоже целое.

2) Если n — четное, то из формулы (23) вытекают следующие равенства: $c_n = 1/3 - 1/(3 \cdot 2^{n+2})$, $b_n = 1/3 - 1/(3 \cdot 2^{n+2}) + 1/2^{n+2} = 1/3 + 1/(3 \cdot 2^{n+1})$, $a_{n+1} = 1/3 + 1/(3 \cdot 2^{n+3}) - 1/2^{n+3} = 1/3 - 1/(3 \cdot 2^{n+2})$ и $b_{n+1} = 1/3 + 1/(3 \cdot 2^{n+3}) + 1/2^{n+3} = 1/3 + 1/(3 \cdot 2^{n+1})$. Таким образом, при четном n имеем: $a_{n+1} = c_n$ и $b_{n+1} = b_n$. При нечетном n проверка равенств $a_{n+1} = a_n$ и $b_{n+1} = c_n$ делается аналогично.

3) Вложенность отрезков $[a_n, b_n]$ следует из пункта 2 утверждения настоящей леммы. Равенство $\bigcap_{n=0}^{\infty}[a_n, b_n] = \{1/3\}$ следует из теоремы Кантора о вложенных отрезках и из соотношения

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1/3 + (-1)^{n+1}/(3 \cdot 2^{n+2}) - 1/2^{n+2}\right) = 1/3. \qquad \square$$

Теорема 4. *Для любого* $p \in (0; 1)$ *глобальный максимум функции* $S_p(x)$ *на отрезке* $[0; 1]$ *достигается только в точках* $x = 1/3$ *и* $x = 2/3$*, а его значение равно* $\max_{x\in[0;1]} S_p(x) = S_p(1/3) = 2^p/(6^p - 3^p)$.

Доказательство. 1) Сначала докажем, что множество точек глобального максимума функции $S_p(x)$ на отрезке $[0; 1]$ состоит только из точек $x = 1/3$ и $x = 2/3$. Обозначим множество точек глобального максимума функции $S_p(x)$ на отрезке $[0; 1/2]$ через $Argmax_{[0,1/2]}S_p$. В силу свойства симметрии (4) имеем: $S_p(x) = S_p(1 - x)$ при всех $x \in [0; 1]$. Поэтому нам достаточно доказать, что $Argmax_{[0,1/2]}S_p = \{1/3\}$. Для достижения этой цели покажем, что множество $Argmax_{[0,1/2]}S_p$ содержится в каждом из отрезков $[a_n, b_n]$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, заданных в лемме 7. Отсюда, в силу пункта 3 леммы 7, будет следовать соотношение $Argmax_{[0,1/2]}S_p \subset \bigcap_{n=0}^{\infty}[a_n, b_n] = \{1/3\}$, из которого получится нужное равенство $Argmax_{[0,1/2]}S_p = \{1/3\}$.

Включение $Argmax_{[0,1/2]}S_p \subset [a_n, b_n]$ при каждом $n = 0, 1, 2, \ldots$ докажем по индукции.

База индукции: $n = 0$. Включение $Argmax_{[0,1/2]}S_p \subset [a_0, b_0] = [0, 1/2]$ верно по определению множества $Argmax_{[0,1/2]}S_p$.

Шаг индукции: при условии, что включение $Argmax_{[0,1/2]}S_p \subset [a_n, b_n]$ верно, нужно доказать включение $Argmax_{[0,1/2]}S_p \subset [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Для этого зададим на полуинтервале $(0; 1]$ функцию

$$f_n(s) = S_p(c_n + s/2^{n+2}) - S_p(c_n - s/2^{n+2}), \tag{24}$$

где c_n — середина отрезка $[a_n, b_n]$ (см. лемму 7). Заметим, что если точка s пробегает полуинтервал $(0; 1]$, то точка $c_n + s/2^{n+2}$ пробегает правую половину отрезка $[a_n, b_n]$

(кроме его середины), а точка $c_n - s/2^{n+2}$ пробегает левую половину отрезка $[a_n, b_n]$ (также кроме его середины). Поэтому если при всех $s \in (0;1]$ верно неравенство $f_n(s) > 0$, то множество $Argmax_{[0,1/2]}S_p$ лежит в правой половине отрезка $[a_n, b_n]$, а если при всех $s \in (0;1]$ верно неравенство $f_n(s) < 0$, то множество $Argmax_{[0,1/2]}S_p$ лежит в левой половине отрезка $[a_n, b_n]$ (из дальнейшего хода доказательства будет видно, что возможны только эти два варианта). Следовательно, необходимо исследовать знак функции $f_n(s)$ при $s \in (0;1]$. В силу формул (24) и (1) имеем:

$$f_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{T_0\big(2^k(c_n + s/2^{n+2})\big)}{2^k}\right)^p - \left(\frac{T_0\big(2^k(c_n + s/2^{n+2})\big)}{2^k}\right)^p = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}}\Big(T_0^p(2^k c_n + 2^{k-n-2}s) - T_0^p(2^k c_n + 2^{k-n-2}s)\Big). \tag{25}$$

Воспользуемся симметрией функции T_0 относительно полуцелых чисел, то есть чисел вида $q/2$, где q — любое целое число (см. (4)). В силу пункта 1 леммы 7 число c_n можно записать в виде $c_n = q_n/2^{n+2}$, где q_n — целое число. Поэтому $2^k c_n = 2^k q_n/2^{n+2} = 2^{k-n-1}q_n/2$, и при $k \geq n+1$ число $2^k c_n$ будет полуцелым. Следовательно, при $k \geq n+1$ функция T_0 будет симметричной относительно точек $2^k c_n$, то есть будет выполняться равенство $T_0(2^k c_n + 2^{k-n-2}s) = T_0(2^k c_n - 2^{k-n-2}s)$. Поэтому в правой части равенства (25) все слагаемые с номерами $k \geq n+1$ равны нулю. Таким образом, формулу (25), в силу равенства $c_n = 1/3 + (-1)^{n+1}/(3 \cdot 2^{n+2})$ из пункта 1 леммы 7, можно переписать в виде

$$f_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{kp}}\Big(T_0^p(2^k c_n + 2^{k-n-2}s) - T_0^p(2^k c_n + 2^{k-n-2}s)\Big) = \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{kp}}\left(T_0^p\Big(\frac{2^k}{3} + \frac{(-1)^{n+1} + 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}}\Big) - T_0^p\Big(\frac{2^k}{3} + \frac{(-1)^{n+1} - 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}}\Big)\right). \tag{26}$$

Ввиду наличия периода 1 у функции T_0, в этом равенстве числа вида $2^k/3$ можно заменить на их дробные части $\{2^k/3\}$. Если $k \geq 0$ и четно, то $\{2^k/3\} = 1/3$, поэтому $\{2^k/3\} + ((-1)^{n+1} \pm 3s)/(3 \cdot 2^{n-k+2}) \in [0, 1/2]$ и, в силу формулы (2) для функции T_0, верны равенства

$$T_0\Big(\frac{2^k}{3} + \frac{(-1)^{n+1} \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}}\Big) = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{n+1} \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \quad \text{при четных } k \geq 0. \tag{27}$$

Аналогично, если $k \geq 0$ и нечетно, то $\{2^k/3\} = 2/3$, поэтому $\{2^k/3\} + ((-1)^{n+1} \pm 3s)/(3 \cdot 2^{n-k+2}) \in [1/2, 1]$ и, в силу формулы (2), верны равенства

$$T_0\Big(\frac{2^k}{3} + \frac{(-1)^{n+1} \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}}\Big) = T_0\Big(\Big\{\frac{2^k}{3}\Big\} + \frac{(-1)^{n+1} \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}}\Big) = \\ = 1 - \Big(\frac{2}{3} + \frac{(-1)^{n+1} \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}}\Big) = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^{n+1} \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \quad \text{при нечетных } k \geq 0. \tag{28}$$

Учитывая формулы (27) и (28), приходим к выводу, что при всех целых $k \geq 0$ верно равенство
$$T_0\Big(\frac{2^k}{3} + \frac{(-1)^{n+1} \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}}\Big) = \frac{1}{3} + (-1)^k \frac{(-1)^{n+1} \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}}.$$
Отсюда и из формулы (26) вытекает следующая цепочка равенств:
$$f_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{kp}} \bigg(\Big(\frac{1}{3} + (-1)^k \frac{(-1)^{n+1} + 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}}\Big)^p - \Big(\frac{1}{3} + (-1)^k \frac{(-1)^{n+1} - 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}}\Big)^p \bigg) =$$
$$= \frac{1}{3^p \cdot 2^{(n+2)p}} \sum_{k=0}^{n} \Big(\big(2^{n-k+2} - (-1)^{n+k} + (-1)^k \cdot 3s\big)^p -$$
$$- \big(2^{n-k+2} - (-1)^{n+k} - (-1)^k \cdot 3s\big)^p \Big) = \frac{D_n(s)}{3^p \cdot 2^{(n+2)p}},$$
где $D_n(s)$ — функция, задаваемая равенством (21) и изученная в лемме 6.

Если n четно, то, в силу леммы 6, функция $D_n(s)$, а значит и функция $f_n(s)$, положительна при $s \in (0;1]$, поэтому множество $Argmax_{[0,1/2]} S_p$ лежит в правой половине отрезка $[a_n, b_n]$, то есть на отрезке $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ (по пункту 4 леммы 7). Аналогично, если n нечетно, то, снова в силу леммы 6, функция $D_n(s)$, а значит и функция $f_n(s)$, отрицательна при $s \in (0;1]$, поэтому множество $Argmax_{[0,1/2]} S_p$ лежит в левой половине отрезка $[a_n, b_n]$, то есть снова на отрезке $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ (по пункту 4 леммы 7). Таким образом, включение $Argmax_{[0,1/2]} S_p \subset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ имеет место как при четных, так и при нечетных n.

Итак, шаг индукции сделан, и первое утверждение теоремы доказано.

2) Вычислим значение глобального максимума функции $S_p(x)$ на отрезке $[0;1]$. В силу первого пункта данного доказательства, это значение равно значению функции S_p в точке $x = 1/3$, которое, в силу леммы 4, равно $2^p/(6^p - 3^p)$.

Что и требовалось доказать. □

Теорема 5. *При любом $p \in (0;1)$ функция $S_p(x)$ не имеет производной в точках $x = 1/3$ и $x = 2/3$.*

Доказательство. 1) Докажем от противного, что $S_p(x)$ не дифференцируема в точке $x = 1/3$. Пусть производная $S_p'(1/3)$ существует. Тогда, дифференцируя функциональное уравнение (19) в точке $x = 1/3$ получаем, что существует и производная $S_p'(2/3)$, причем выполняется равенство $2S_p'(2/3) = 2^p\big(S_p'(1/3) - pT_0^{p-1}(1/3)T_0'(1/3)\big)$. Отсюда, как как $T_0(1/3) = 1/3$ и $T_0'(1/3) = 1$, получаем формулу
$$2S_p'(2/3) = 2^p\big(S_p'(1/3) - p \cdot 3^{1-p}\big). \tag{29}$$
Поскольку в силу теоремы 4 точки $x = 1/3$ и $x = 2/3$ являются точками экстремума, то должны выполняться равенства $S_p'(1/3) = S_p'(2/3) = 0$. Подставляя эти значения в формулу (29), получаем неверное равенство $0 = -2^p p \cdot 3^{1-p}$.

Полученное противоречие показывает, что $S_p(x)$ не дифференцируема в точке $x = 1/3$.

2) Поскольку производная $S_p'(1/3)$ не существует, то, в силу равенства (29), не существует и производная $S_p'(2/3)$. □

7. Благодарности

The publication was prepared within the framework of the Academic Fund Program at HSE University in 2020–2021 (grant No.20-04-022, project "Evolution semigroups and their applications").

Список литературы

[1] Takagi T. *A simple example of a continuous function without derivative.* Proc. Phys. Math. Soc. Japan. V. 1. 1903. P. 176—177.

[2] Hata M., Yamaguti M. *Takagi function and its generalization.* Japan J. Appl. Math. V. 1. 1984. P. 183—199.

[3] Landsberg G. *Über Differentiierbarkeit stetiger Funktionen.* // Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. V. 17, no. 2. 1908. P. 46–51.

[4] Mishura Yu., Schied A. *On (signed) Takagi–Landsberg functions: p^{th} variation, maximum, and modulus of continuity.* // J. Math. Anal. Appl. V. 473, no. 1. 2019. P. 258–272.

[5] Han X. *On the extrema of functions in the Takagi class.* // Waterloo, Canada. University of Waterloo. Master's thesis. 2019.

[6] Han X., Schied A. *Step roots of Littlewood polynomials and the extrema of functions in the Takagi class.* // 2020. http: arXiv.org:math.CA/2001.01348v2.

[7] Galkin O.E., Galkina S.Yu. *Functions consistent with real numbers, and global extrema of functions in exponential Takagi class.* // 2020. http: arXiv.org:math.CA/2003.08540.

[8] Tabor J., Tabor J. *Takagi functions and approximate midconvexity.* J. Math. Anal. Appl. V. 356, №2. 2009. P. 729—737.

[9] Kahane J.-P. *Sur l'exemple, donné par M. de Rham, d'une fonction continue sans dérivée.* Enseignement Math. V. 5. 1959. P. 53—57.

[10] Allaart P. C., Kawamura K. *The Takagi function: a survey.* Real Anal. Exchange. V. 37, №1. 2011/12. P. 1–54

[11] Lagarias J. C. *The Takagi Function and Its Properties.* In *RIMS Kokyuroku Bessatsu B34: Functions and Number Theory and Their Probabilistic Aspects.* Kyoto. B. 34. Aug. 2012. P. 153–189.

[12] Galkin O. E., Galkina S. Yu. *On properties of functions in exponential Takagi class.* // Ufa Mathematical Journal. V. 7, no. 3. 2015. P. 29–38.

[13] Allaart P. C. *How large are the level sets of the Takagi function?.* // Monatshefte für Mathematik. V. 167, no. 3–4. 2012. P. 311–331.

[14] Makogin V., Mishura Yu. *Fractional integrals, derivatives and integral equations with weighted Takagi–Landsberg functions.* // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. V. 25, no. 6. 2020. P. 1079–1106. http: doi.org/10.15388/namc.2020.25.20566.

[15] Yu H. *Weak tangent and level sets of Takagi functions.* // Monatshefte f?r Mathematik. V. 192. 2020. P. 249–264. http: doi.org/10.1007/s00605-020-01377-9.

[16] Monroe L. *A few identities of the Takagi function on dyadic rationals.* // arXiv:2111.05996v1 [math.CO].

Галкин Олег Евгеньевич,
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"
Email address: olegegalkin@ya.ru

Галкина Светлана Юрьевна,
Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”
Email address: svetlana.u.galkina@mail.ru

Тронов Антон Александрович,
Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”
Email address: tronovaa@yandex.ru