Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Международная лаборатория динамических систем и приложений

На правах рукописи

Баринова Марина Константиновна

ПОСТРОЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ 2- И 3-ДИФФЕОМОРФИЗМОВ С ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ

на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор
Починка Ольга Витальевна

Нижний Новгород – 2021

Содержание

Введение

Пусть M гладкое компактное ориентируемое n-многообразие. *Функцией Ляпунова* динамической системы (потока или каскада), заданной на M называется непрерывная функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$, которая постоянна на каждой цепной компоненте системы и убывает вдоль ее орбит вне цепно рекуррентного множества. В силу результатов Ч. Конли [7], такая функция существует для любой динамической системы, а сам факт существования носит название “Фундаментальная теорема динамических систем”. В разделе 1.1 изложена идея построения функции Ляпунова для дискретной динамической системы. Следует отметить, что сам Ч. Конли дополнительно требовал, чтобы образ цепно рекуррентного множества в силу φ был нигде не плотен на прямой, а значения функции φ на различных компонентах цепно рекуррентного множества были различны, и называл такую функцию *полной функцией Ляпунова.* Числа, принадлежащие образу цепно рекуррентного множества, Ч. Конли назвал критическими значениями функции φ.

Однако для непрерывной функции ее критическим значением принято называть образ критической точки (точки, в любой окрестности которой множества уровня не образуют слоения, гомеоморфного слоению $\mathbb{R}^n$ на гиперплоскости коразмерности 1), которая, вообще говоря, не обязана принадлежать цепно рекуррентному множеству. В связи с чем, наряду с функцией Ляпунова, используется понятие *энергетической функции*, то есть функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством системы. Заметим, что в гладкой категории множество критических точек совпадает с множеством точек, в которых градиент обращается в ноль.

Первые результаты по построению энергетической функции принадлежат С. Смейлу [29], который в 1961 году доказал существование энергетической функции Морса у градиентно-подобных потоков. К. Мейер [54] в 1968 году обобщил этот результат, построив энергетическую функцию Морса-Ботта для произвольного потока Морса-Смейла (см. раздел 1.2).

Как заметил в 1985 году Дж. Фрэнкс [9], применение результатов В. Вильсона [34] к конструкции К. Конли даёт существование энергетической функции у любого гладкого потока с гиперболическим цепно рекуррентным множеством. Тогда с помощью надстройки можно построить гладкую функцию Ляпунова для любого диффеоморфизма с гиперболическим цепно рекуррентным множеством. Но, построенная таким образом функция, может иметь критические точки, которые не являются цепно рекуррентными и, следовательно, функция Ляпунова не является энергетической. Встает вопрос о том, какие дискретные динамические системы допускают энергетические функции. Первые результаты в этом направлении были получены Д. Пикстоном в 1977 году, в своей работе [22] он доказал существование энергетической функции Морса у любого диффеоморфизма Морса-Смейла на поверхности. В разделе 1.3 мы приводим обобщение результата Пикстона на Ω-устойчивые 2-диффеоморфизмы с конечным неблуждающим множеством, энергетическая функция Морса для таких диффеоморфизмов была построена в работе [56]. В той же работе [22] Д. Пикстон построил диффеоморфизм Морса-Смейла на трехмерной сфере, не обладающий энергетической функцией Морса. Также в разделе 1.3 дается экспозиция результатов работ [12], [13] и книги [15] о необходимых и достаточных условиях существования энергетической функции Морса у трехмерных диффеоморфизмов Морса-Смейла. Также известны примеры диффеоморфизмов Морса-Смейла в размерности $n > 3$, которые не обладают энергетической функцией Морса (например, [19]).

Из результатов выше следует, что не все диффеоморфизмы даже с регулярной динамикой имеют энергетическую функцию. Тем более удивительным является факт наличия энергетической функции у некоторых дискретных динамических систем с хаотическим поведением. В настоящей работе энергетическая функция конструируется для некоторых классов Ω-устойчивых 2- и 3-диффеоморфизмов с нетривиальными базисными множествами. Технически построение такой функции базируется на динамических свойствах базисных множеств, описанных в разделе 4.1 и процедуре сглаживания непрерывного отображения, приведенной в разделе 4.2. Прежде, чем перейти к изложению результатов, приведем обзор имеющихся по данной тематике исследований.

1 Обзор имеющихся по данной тематике результатов

1.1 Фундаментальная теорема динамических систем

В этом разделе мы даем краткое изложение основной конструкции работы Чарльза Конли [7], лежащей в основе построения функции Ляпунова для произвольной динамической системы (потока или каскада), заданной на компактном метрическом пространстве M с метрикой d. Оригинальная конструкция Конли сделана для потоков, при построении функции Ляпунова для каскадов Конли использовал переход к надстройке. Однако идея Конли применима к дискретным динамическим системам непосредственно, без перехода к надстройке, и была изложена Дж. Фрэнксом в [10]. Приведем схему построения функции Ляпунова, для каскада, порожденного гомеоморфизмом $f : M \to M$, следуя Фрэнксу.

Для $\varepsilon > 0$ набор точек $x_1, x_2, \dots, x_n$ такой, что

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \text{ для } 1 \leq i \leq n-1,$$

называется ε-цепью гомеоморфизма f.

Точка $x \in M$ называется *цепно рекуррентной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число n (зависящее от ε) и ε-цепь $x_1, x_2, \dots, x_n$ такая, что $x_1 = x_n = x$. Множество R_f всех цепно рекуррентных точек называется *цепно рекуррентным множеством* диффеоморфизма f.

Непосресственной проверкой устанавливается, что множество R_f является f-инвариантным и компактным.

Введем на цепно рекурентном множестве R_f отношение эквивалентности $\sim$ правилом: $x \sim y$ для $x, y \in R_f$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существуют ε-цепи от x к y и от y к x. Класс эквивалентности точек из R_f относительно введенного отношения эквивалентности называется *цепной компонентой*.

Определение 1. *Функцией Ляпунова для гомеоморфизма f называется непрерывная функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:*

1) если $x \notin R_f$, то $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$;

2) если $x, y \in R_f$, то $\varphi(x) = \varphi(y)$ тогда и только тогда, когда x и y лежат в одной цепной компоненте;

3) $\varphi(R_f)$ — компактное нигде не плотное подмножество прямой $\mathbb{R}$.

Компактное множество $A \subset M$ называется *аттрактором гомеоморфизма f*, если существует его открытая окрестность U, называемая *захватывающей*, такая, что $f(cl(U)) \subset U$ и $\bigcap\limits_{n\geq 0} f^n(cl(U)) = A$. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1}. Если A — аттрактор с захватывающей окрестностью U и $V = M \setminus cl(U)$ — захватывающая окрестность репеллера $A^* = \bigcap\limits_{n\geq 0} f^{-n}(cl(V))$, то A^* называется *репеллером, дуальным* *к аттрактору* A. Из построения ясно, что A^* не зависит от выбора захватывающей окрестности U аттрактора A и $f(A) = A$, $f(A^*) = A^*$. Кроме того, из определения аттрактора (репеллера) следует, что само пространство M является аттрактором (репеллером) гомеоморфизма f, дуальным репеллером (аттрактором) к которому является пустое множество.

Предложение 1.1 ([10], Lemmas 1.2, 1.3)**.** *Пусть $f : M \to M$ — гомеоморфизм. Тогда*

1. *Множество аттракторов гомеоморфизма f не более, чем счетно.*
2. *Если $\{A_n\}$ — множество всех аттракторов гомеоморфизма f и $\{A_n^*\}$ множество соответствующих дуальных к ним репеллеров, то $R_f = \bigcap\limits_n (A_n \cup A_n^*)$.*

Предложение 1.2 ([10], Proposition 1.5)**.** *Пусть $f : M \to M$ — гомеоморфизм. Тогда точки $x, y \in M$ лежат в одной и той же цепной компоненте множества R_f тогда и только тогда, когда не существует дуальной пары аттрактор-репеллер (A, A^*) такой, что $x \in A$, $y \in A^*$ или $y \in A$, $x \in A^*$.*

Предложение 1.3 ([10], Lemma 1.7)**.** *Существует непрерывная функция $\varphi : M \to [0, 1]$ такая, что $\varphi^{-1}(0) = A$, $\varphi^{-1}(1) = A^*$ и φ убывает вдоль орбит множества $M \setminus (A \cup A^*)$ (то есть $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$, если $x \in M \setminus (A \cup A^*)$).*

Определим функцию $\varphi : M \to \mathbb{R}$ посредством сходящегося ряда:

$$\varphi(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}\varphi_n(x),$$

где $\varphi_n : M \to [0, 1]$ — непрерывная функция из предложения 1.3 для пары A_n, A_n^*.

Непосредственно проверяется, что $\varphi : M \to \mathbb{R}$ является функцией Ляпунова для каскада, порожденного гомеоморфизмом f.

Дав определения цепно рекуррентного множества, аттрактора, репеллера и функции Ляпунова для непрерывного потока f^t, заданного на M, и, реализовав конструкцию аналогичную построению функции $\varphi : M \to \mathbb{R}$ для гомеоморфизма f, получаем следующий результат.

Предложение 1.4 (Фундаментальная теорема динамических систем, [7])**.** *Для любого непрерывного потока f^t и любого гомеоморфизма f компактного метрического пространства M существует функция Ляпунова $\varphi : M \to \mathbb{R}$.*

1.2 Энергетическая функция для потоков Морса-Смейла

1.2.1 Понятие энергетической функции

В дальнейшем мы будем предполагать, что метрическое пространство M является замкнутым n-мерным многообразием.

Для любой точки $p \in M$ обозначим через (V_p, ϕ_p) локальную карту, такую, что

$$\phi_p(y) = (x_1(y), \cdots, x_n(y)) \in \mathbb{R}^n,\ y \in V_p,\ x_i(p) = 0, i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Для непрерывной функции $\varphi : M \to \mathbb{R}$ точка $p \in M$ называется *регулярной точкой* функции φ, если в точке p существует локальная карта (V_p, ϕ_p) такая, что

$$\varphi(y) = \varphi(p) + x_n(y).$$

В противном случае p называется *критической точкой.*

Таким образом, в некоторой окрестности регулярной точки произвольной непрерывной функции множества уровня этой функции образуют слоение коразмерности один без особенностей. Обозначим через Cr_φ множество критических точек функции φ.

Определение 2. *Функция Ляпунова $\varphi : M \to \mathbb{R}$ для потока $f^t : M \to M$ или диффеоморфизма $f : M \to M$ называется энергетической функцией, если $Cr_\varphi = R_{f^t}$ или $Cr_\varphi = R_f$, соответственно.*

1.2.2 Существование энергетической функции для гладкого потока на многообразии

про то, что для потоков верны предложения 1.1, 1.2

Как уже было отмечено выше, применение результатов В. Вильсона, полученных в [34], приводит к доказательству существования энергетической функции для произвольного гладкого потока на многообразии M. Пусть f^t гладкий поток, индуцированный векторным полем χ заданным на M и A — аттрактор этого потока с захватывающей окрестностью U и бассейном притяжения $D = \bigcup\limits_{t \leq 0} f^t(cl(U))$. Для гладкой функции $\varphi : D \to \mathbb{R}$ обозначим через $\chi(\varphi)$ производную φ в направлении векторного поля χ.

Предложение 1.5 ([34], Theorem 3.2)**.** *Пусть $f^t : M \to M$ — гладкий поток, индуцированный векторным полем χ на гладком многообразии M и A — аттрактор этого потока с захватывающей окрестностью U и бассейном притяжения D. Тогда существует C^∞-функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ такая, что $\varphi(A) = 0$ и $\chi(\varphi)(x) < 0$, $x \in (D \setminus A)$.*

Непосредственно из этого предложения следует, что для гладкого потока f^t, индуцированного векторным полем χ, заданным на гладком многообразии M, Предложение 1.3 может быть усилено до результата существования гладкой функции $\varphi_n : M \to [0, 1]$ такой, что $\varphi_n^{-1}(0) = A_n$, $\varphi_n^{-1}(1) = A_n^*$ и $\chi(\varphi_n)(x) < 0$, $x \in (M \setminus (A_n \cup A_n^*))$ для каждой пары аттрактор-репеллер (A_n, A_n^*). Тогда функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$, определяемая рядом $\varphi(x) = 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \varphi_n(x)$, является энергетической функцией потока f^t. Таким образом, фундаментальная теорема Ч. Конли в применении к гладким потокам на многообразии может быть переформулирована следующим образом.

Предложение 1.6. *Для любого гладкого потока f^t, заданного на гладком компактном многообразии M существует гладкая энергетическая функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$.*

Используя конструкцию надстройки, можно построить гладкую функцию Ляпунова φ для любого диффеоморфизма гладкого компактного многообразия. Но, эта функция может иметь критические точки вне цепно рекуррентного множества и, следовательно, не является энергетической. В связи со всем вышесказанным возникают естественные вопросы, для каких классов дискретных динамических систем существует энергетическая функция и как ее строить. Частично ответы на эти вопросы будут даны ниже. Но сначала мы приведем исторически первые результаты о построении энергетической функции для потоков Морса-Смейла, полученные ранее работы Ч. Конли.

1.2.3 Функции Морса и Морса-Ботта

Этот раздел мы начнем с короткого введения в теорию Морса (для детального знакомства см., например, [55]).

Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ — C^r-гладкая функция, заданная на многообразии M. Точка $p \in M$ называется *критической точкой* функции $f(x)$, если $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)|_p = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$, а $f(p)$ называется *критическим значением* функции $f(x)$. В противном случае точка p называется *регулярной точкой*, а $f(p)$ *регулярным значением* функции $f(x)$. Следующее утверждение о регулярном значении доставляет распространенный способ задания многообразий. Если $a \in \mathbb{R}$ есть регулярное значение C^r-гладкой функции ($r \geq 1$) $f : M \to \mathbb{R}$, то $f^{-1}(a)$ есть C^r-подмногообразие многообразия M.

Для $r \geq 2$ критическая точка p C^r-функции f называется *невырожденной*, если матрица вторых производных (*матрица Гесса*) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)|_p$ невырождена, в противном случае точка p называется *вырожденной*. В силу симметричности, матрица Гесса имеет только действительные собственные значения и является вырожденной тогда и только тогда, когда имеет нулевые собственные значения. Число нулевых собственных значений матрицы $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)|_p$ называют *степенью вырождения критической точки p*, а число ее отрицательных собственных значений называют *индексом критической точки p* и обозначают $q(p)$. Гладкая функция, значение которой в каждой критической точке p равно индексу этой точки ($f(p) = q(p)$) называется *самоиндексирующейся.*

Определение 3. *C^r-гладкая ($r \geq 2$) функция $f : M \to \mathbb{R}$ на гладком n-многообразии X называется функцией Морса, если все ее критические точки невырождены.*

Определение 4. *C^r-гладкая ($r \geq 2$) функция $f : M \to \mathbb{R}$ на гладком n-многообразии X называется функцией Морса-Ботта, если Гессиан в каждой критической точке невырожден в направлении нормальном к критическому множеству уровня.*

Функции Морса имеют важное значение при изучении топологии многообразия в силу следующих фактов. На любом гладком компактном многообразии существуют функции Морса. Функции Морса всюду плотны в пространстве всех гладких функций на многообразии. Каждая функция Морса имеет на компактном многообразии лишь конечное число критических точек, в частности, все они изолированы. На любом компактном многообразии X существуют, так называемые, *правильные функции Морса* $f : M \to \mathbb{R}$, т. е. такие, что $f(x) \geq f(y)$, если x и y — критические точки f и $q(x) \geq q(y)$. Отметим, что такие функции уже не образуют плотного подмножества в пространстве всех гладких функций на M.

Предложение 1.7 (Лемма Морса)**.** *Пусть p — критическая точка функции Морса $f : M \to \mathbb{R}$. Тогда существуют локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ в точке p, называемые координатами Морса, в которых локальное представление f имеет вид*

$$f_p(x_1, \ldots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_{q(p)}^2 + x_{q(p)+1}^2 + \cdots + x_n^2,$$

где $q(p)$ — индекс f в точке p.

1.2.4 Энергетическая функция Морса для градиентно-подобных потоков

Первые результаты по построению энергетических функций касались систем Морса-Смейла. В 1960 году С. Смейл в работе [28] ввел класс C^∞ векторных полей χ на C^∞ замкнутом многообразии M со следующими свойствами:

(1) Векторное поле χ имеет конечное число особых точек $\beta_1, \ldots, \beta_k$ и матрица Якоби линеаризации векторного поля в окрестности каждой особой точки не имеет собственных значений с нулевой действительной частью.

(2) Векторное поле χ имеет конечное число замкнутых орбит $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_m$ и отображение Пуанкаре в окрестности каждой такой орбиты не имеет собственных значений по модулю равных 1.

(3) Предельные точки всех орбит χ при $t \to \pm\infty$ принадлежат β_i.

(4) Устойчивые и неустойчивые многообразия β_i имеют трансверсальное пересечение.

(5) Если β_i — периодическая орбита, то не существует точка $y \in M$ такая, что $\alpha(y) = \omega(y) = \beta_i$, где $\alpha(y)$ и $\omega(y)$ — α- и ω-предельные множества точки y.

С современной точки зрения условия (1)-(5) означают, что цепно рекуррентное множество потока, индуцированного векторным полем χ состоит из конечного числа неподвижных гиперболических точек $\beta_1, \ldots, \beta_k$ и конечного числа гиперболических периодических орбит $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_m$ таких, что устойчивые и неустойчивые многообразия орбит β_i пересекаются трансверсально. Таким образом, условия (1)-(5) выделяют структурно устойчивые векторные поля с конечным цепно рекуррентным множеством. В своей работе [28] С. Смейл показал, что для векторных полей со свойствами (1)-(5) справедливы неравенства, подобные неравенствам Морса, с тех пор такие векторные поля называют полями *Морса-Смейла*.

Векторные поля Морса-Смейла без периодических орбит называюся *градиентно-подобными*, поскольку они имеют динамику, подобную динамике градиентного векторного поля, порожденного функцией Морса. Действительно, если мы рассмотрим градиентное векторное поле $grad\ \varphi$, порожденное функцией Морса φ, то множество критических точек φ совпадает с множеством состояний равновесия градиентного потока (потока, порожденного градиентным векторным полем). Если x не является критической точкой функции φ, то $\nabla_{grad\ \varphi}(-\varphi) = -|grad\ \varphi(x)|^2 < 0$, то есть $-\varphi$ строго убывает вдоль траекторий $\mathcal{O}_x$. Таким образом, $-\varphi$ является энергетической функцией градиентного потока. Градиентное векторное поле не является структурно устойчивым в общем случае, поскольку инвариантные многообразия седловых точек могут иметь нетрансверсальное пересечение. Однако, С. Смейл в 1961 году в работе [29] доказал, что любое градиентное векторное поле на M может быть C^1 аппроксимировано градиентно-подобным векторным полем.

В связи с вышесказанным естественно искать энергетическую функцию градиентно-подобного потока в классе функций Морса.

В работе [29] С. Смейл рассмотрел класс C^∞ векторных полей χ на замкнутых C^∞ n-многообразиях M, которые удовлетворяют следующим условиям:

(i) У каждой особой точки β поля χ существует окрестность U и C^∞-функция φ_β на U такие, что χ есть $grad\ \varphi_\beta$ на U в некоторой римановой структуре на U. Более того β — невырожденная критическая точка φ_β. Обозначим через $\beta_1, \dots, \beta_k$ эти особенности.

(ii) Если $x \in M$ и $\mathcal{O}_x$ орбита потока, порожденного χ, проходящая через x, то предельное множество орбиты $\mathcal{O}_x$ при $t \to \pm\infty$ содержится в объединении β_i.

(iii) Устойчивые и неустойчивые многообразия β_i пересекаются трансверсально.

Из следующей теоремы вытекает, что векторное поле, удовлетворяющее условиям (i)-(iii), обладает энергетической функцией.

Предложение 1.8 ([29], Theorem B). *Пусть χ — C^∞ векторное поле на замкнутом C^∞ многообразии M, удовлетворяющее условиям (i)-(iii). Тогда существует C^∞-функция φ на M со следующими свойствами:*

(a) Критические точки φ совпадают с особыми точками χ и φ отличается на константу от функции из условия (i) в некоторой окрестности критической точки.

(b) Если χ не обращается в 0 в точке $x \in M$, то поле трансверсально поверхности уровня функции φ в точке x.

(c) Если $\beta \in M$ — критическая точка φ, то $\varphi(\beta) = q(\beta)$, где $q(\beta)$ индекс точки β.

С. Смейл доказал, что предыдущая теорема может быть усилена следующим образом.

Замечание 1 ([29], Remark). *Существует риманова метрика на M такая, что $\chi = grad\ \varphi$.*

1.2.5 Энергетическая функция Морса-Ботта для потоков Морса-Смейла

Если векторное поле Морса-Смейла имеет периодическую орбиту, то энергетическая функция для такого поля не может быть функцией Морса. Поэтому К. Мейер в 1968 году в работе [54] предложил рассматривать более общий класс Φ, состоящий из C^∞-функций $\varphi : M \to \mathbb{R}$ на гладком замкнутом многообразии M с римановой метрикой d, обладающих следующими свойствами:

1) множество $Cr(\varphi)$ критических точек функции φ состоит из конечного подмножества $Cr_0(\varphi) = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ невырожденных точек и подмножества $Cr_1(\varphi)$, которое является объединением конечного числа попарно не пересекающихся окружностей $\beta_{m+1}, \dots, \beta_k$, таких, что индекс φ постоянен на каждой окружности;

2) Для $i \in \{m+1, \dots, k\}$ существует окрестность U_i окружности β_i и диффеоморфизм ξ_i такой, что ξ_i отображает U_i на прямое произведение $\mathbb{D}^{n-1}$ и $\mathbb{S}^1$, если U_i ориентируемо, и на косое произведение $\mathbb{D}^{n-1}$ и $\mathbb{S}^1$, если U_i неориентируемо, при этом $\varphi \circ \xi_i^{-1} = \varphi(\beta_i) + Q_i(x)$, где Q_i — невырожденная квадратичная форма в координатах $x_1, \dots, x_{n-1}$ на $\mathbb{D}^{n-1}$ и периодическая функция периода один по координате x_n в $\mathbb{S}^1$. Более того, в каждой точке окружности $\mathbb{S}^1$ квадратичная форма равна индексу функции φ на β_i.

В действительности класс Φ есть класс функций Морса-Ботта, чье множество критических точек совпадает с объединением $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \beta_k$. Из определения функции Морса-Ботта следует, что гессиан этой функции невырожден в нормальном к окружности направлении.

Предложение 1.9 ([54], Theorem 1)**.** *Если χ — векторное поле Морса-Смейла, тогда существует энергетическая функция $\varphi \in \Phi$ для χ.*

Предложение 1.10 ([54], Proposition)**.** *Пусть для гладкого векторного поля χ на M существует функция $\varphi \in \Phi$ такая, что:*

1) $\chi(\varphi)(x) < 0$ для всех $x \in (M \setminus Cr(\varphi))$;

2) если p особая точка χ, то $p \notin Cr_1(\varphi)$;

3) существует константа $\kappa > 0$ такая, что для любого $x \in U_i$

$$-\chi(\varphi)(x) \geq \kappa d(x, \beta_i)^2.$$

Тогда χ удовлетворяет всем условиям определения векторного поля Морса-Смейла, за исключением, быть может, условия трансверсальности. Более того, поле χ может быть C^1 аппроксимировано системой Морса-Смейла.

1.3 Энергетическая функция для каскадов с регулярной динамикой

В этом разделе мы будем рассматривать дискретные динамические системы (каскады) с регулярной динамикой. А именно мы будем строить энергетические функции для диффеоморфизмов $f : M^n \to M^n$ с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством, заданные на замкнутом гладком n-многообразии M^n. Обозначим через $G(M^n)$ класс таких диффеоморфизмов. Подмножество структурно устойчивых диффеоморфизмов в этом классе составляют диффеоморфизмы Морса-Смейла, обозначим через $MS(M^n)$ их класс.

1.3.1 Функция Морса-Ляпунова

Пусть $f \in G(M^n)$. Поскольку цепно рекуррентное множество диффеоморфизма f конечно, то естественно искать его функцию Ляпунова в классе функций Морса. Факт совпадения неблуждающего множества с цепно рекуррентным приводит к следующему определению.

Определение 5. *Функция Морса $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ называется функцией Ляпунова для $f \in G(M^n)$, если:*

1) $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$ для любого $x \notin NW(f)$;

2) $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$ для любого $x \in NW(f)$.

Приведем несколько утверждений, необходимых для построения энергетической функции для диффеоморфизмов из рассматриваемого класса.

Предложение 1.11 ([15], Proposition 7.1)**.** *Пусть $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция Ляпунова для диффеоморфизма $f \in G(M^n)$. Тогда*

1) $-\varphi$ — гладкая функция Ляпунова для f^{-1};

2) если p — периодическая точка диффеоморфизма f, то $\varphi(x) < \varphi(p)$ для любого $x \in W^u_p \setminus p$ и $\varphi(x) > \varphi(p)$ для любого $x \in W^s_p \setminus p$;

3) если p — периодическая точка диффеоморфизма f, то p — критическая точка функции φ;

4) индекс критической точки p равен $\dim W^u_p$.

Предложение 1.12 ([15], Proposition 7.2)**.** *Если периодическая точка p является невырожденным максимумом (минимумом) ограничения функции Ляпунова φ для диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ на неустойчивое (устойчивое) инвариантное многообразие точки p, то это многообразие трансверсально ко всем регулярным множествам уровня φ в некоторой окрестности точки p.*

Определение 6. *Пусть $\mathcal{O}_i$ — периодическая орбита диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ и U_i — окрестность орбиты $\mathcal{O}_i$ и $q_i = dim\ W^u_{\mathcal{O}_i}$. Функцию Морса $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}$ назовем локальной функцией Морса-Ляпунова, если она обладает следующими свойствами:*

1) $\varphi_i(f(x)) < \varphi_i(x)$ для любого $x \in (f^{-1}(U_i) \cap U_i) \setminus \mathcal{O}_i$ и $\varphi_i(f(x)) = \varphi_i(x) = 0$ для $x \in \mathcal{O}_i$;

2) множество критических точек функции φ_i совпадает с орбитой $\mathcal{O}_i$ и каждая критическая точка имеет индекс q_i;

3) $(W^u_r \cap U_i)$ и $(W^s_r \cap U_i)$ лежат в координатных гиперплоскостях $Ox_1 \dots x_{q_i}$ и $Ox_{q_i+1} \dots x_n$ соответственно для координат Морса $x_1, \dots, x_n$ в окрестности точки $r \in \mathcal{O}_i$.

Предложение 1.13 ([15], Lemma 2.2)**.** *Для любой периодической орбиты $\mathcal{O}_i$ диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ существует локальная функция Морса-Ляпунова.*

Локальное свойство, сформулированное в предложении 1.12, полезно для построения функции Ляпунова (глобальной).

Определение 7. *Функция Ляпунова $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ для диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ называется функцией Морса-Ляпунова, если каждая периодическая точка p является невырожденным максимумом ограничения φ на неустойчивое многообразие W^u_p и невырожденным минимумом ограничения φ на устойчивое многообразие W^s_p.*

Согласно Предложению 1.13, функция Морса-Ляпунова существует в окрестности любой периодической орбиты диффеоморфизма $f \in G(M^n)$. Справедлив и факт существования глобальной функции Морса-Ляпунова для любого диффеоморфизма $f \in G(M^n)$. Такая функция может быть построена, в частности, с помощью перехода к надстройке. Именно, пусть $f \in G(M^n)$ и $\widehat{f}^t$ — поток на многообразии $M^n \times \mathbb{R}$, порожденный векторным полем, состоящим из единичных векторов, параллельных $\mathbb{R}$ и направленных в $+\infty$. Определим диффеоморфизм $g : M^n \times \mathbb{R} \to M^n \times \mathbb{R}$ формулой $g(x, \tau) = (f(x), \tau - 1)$. Положим $\mathcal{G} = \{g^k \ , k \in \mathbb{Z}\}$ и $W = (M^n \times \mathbb{R})/\mathcal{G}$. Обозначим через $p_{_W} : M^n \times \mathbb{R} \to W$ естественную проекцию и через f^t поток на многообразии W, заданный формулой $f^t(x) = p_{_W}(\widehat{f}^t(p^{-1}_{_W}(x)))$. Поток f^t называется *надстройкой над диффеоморфизмом* f. По построению, цепно рекуррентное множество потока f^t состоит из k_f периодических орбит $\beta_i = p_{_W}(\mathcal{O}_i \times \mathbb{R})$ $, i \in \{1, \dots, k_f\}$. То есть надстройка f^t является потоком Морса-Смейла без неподвижных точек. Согласно Теореме 1.9 существует энергетическая функция Морса-Ботта для потока f^t. Ее ограничение на M^n является искомой функцией Морса-Ляпунова для f. Однако, в общем случае, построенная функция может иметь критические точки, которые не являются периодическими точками f.

Предложение 1.14 ([15], Theorem 7.1)**.** *Среди гладких функций Ляпунова для диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ функции Морса-Ляпунова образуют открытое всюду плотное множество в C^∞-топологии.*

1.3.2 Порядок на множестве периодических орбит

Гиперболичность цепно рекуррентного множества равносильна Ω-устойчивости диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ (см. [23], например). Следовательно, периодические орбиты диффеоморфизма f допускают нумерацию $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_{k_f}$, согласующуюся с отношением С. Смейла, то есть $i \leqslant j$, если $W^s_{\mathcal{O}_i} \cap W^u_{\mathcal{O}_j} \neq \emptyset$. Не уменьшая общности, будем считать, что нумерация орбит выбрана так, что номер любой седловой орбиты больше номера любой стоковой и меньше номера любой источниковой орбиты. Для $i = 1, \dots, k_f$ положим $W^s_i = W^s_{\mathcal{O}_i}$,$W^u_i = W^u_{\mathcal{O}_i}$ и для $i = 1, \dots, k_f - 1$ положим $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{i} W^u_j,\ R_i = \bigcup\limits_{j=i+1}^{k_f} W^s_j$.

Для $i = 1, \dots, k_f - 1$ положим $V_i = M^2 \setminus (A_i \cup R_i)$. Обозначим через $\widehat{V}_i = V_i/f$ пространство орбит действия диффеоморфизма f на множестве V_i и через $p_{_i} : V_i \to \widehat{V}_i$ — естественную проекцию.

Предложение 1.15 ([15], Theorem 2.6)**.** *Пусть $f \in G(M^n)$. Тогда*

1) множество A_i (R_i) является аттрактором (репеллером) диффеоморфизма f и имеет захватывающую окрестность $M_i \subset \bigcup\limits_{j=1}^{i} W^s_j$ $(M_i \subset \bigcup\limits_{j=i+1}^{k_f} W^u_j)$ такую, что $M_i \setminus int\ f(M_i)$ $(M_i \setminus int\ f^{-1}(M_i))$ является фундаментальной областью ограничения диффеоморфизма f на V_i;

2) проекция $p_{_i} : V_i \to \widehat{V}_i$ является накрытием, индуцирующим структуру гладкого замкнутого n-многообразия на пространстве орбит $\widehat{V}_i$;

3) если $\dim\ A_i \leqslant (n-2)$ $(\dim\ R_i \leqslant (n-2))$*, то репеллер R_i (аттрактор A_i) является связным и если* $\dim\ (A_i \cup R_i) \leqslant (n-2)$*, то многообразия V_i, $\widehat{V}_i$ связны.*

1.3.3 Ω-устойчивые 2-диффеоморфизмы с конечным неблуждающим множеством

В этом разделе мы изложим результаты работы [56].

Пусть $f \in G(M^2)$. Пусть Ω^q_f, $q \in \{0, 1, 2\}$, — подмножество периодических точек r таких, что $\dim\ W^u_r = q$, k_q — число всех периодических орбит с индексом Морса (индекс Морса периодической точки r равен размерности $\dim\ W^u_r$), меньшим или равным q. Основой построения энергетической функции являются динамические свойства диффеоморфизмов множества $G(M^2)$, сформулированные в Предложениях 1.16, 1.17, 1.18). Доказательство лемм существенно опирающиеся на классические факты двумерной топологии, в частности на факт об отсутствии диких дуг на поверхностях.

Предложение 1.16 ([15], Lemma 3.4)**.** *В каждой компоненте связности множества V_i, $i = k_0, \dots, k_1 - 1$, существует окружность такая, что объединение этих окружностей пересекается с каждой сепаратрисой множества $W^u_{i+1} \setminus \mathcal{O}_{i+1}$ в одной точке.*

Согласно Предложению 1.15, A_i обладает захватывающей окрестностью M_i, где M_i

компактное множество такое, что $f(M_i) \subset int\ M_i$ (M_i — f-сжимаема) и $\bigcap\limits_{k\geq 0} f^k(M_i) = A_i$. Для $i = 1, \ldots, k_1$ обозначим через c_i число компонент связности аттрактора A_i, через r_i — число седловых точек и через s_i — число стоковых точек в A_i. Положим $g_i = c_i + r_i - s_i$.

Определение 8. *Захватывающую окрестность M_i, $i = 1, \ldots, k_1$, аттрактора A_i назовем тесной, если M_i состоит из c_i дисков с дырами, общее число которых равно g_i.*

Если при этом для каждой седловой точки $\sigma \in \mathcal{O}_i$ пересечение $W^s_\sigma \cap M_i$ состоит в точности из одного интервала, то окрестность M_i будем называть канонической.

Предложение 1.17 ([56], Лемма 2.5)**.** *Каждый аттрактор A_i, $i = 1, \ldots, k_1$, обладает канонической окрестностью.*

Предложение 1.18 ([15], Lemma 7.1)**.** *Пусть $i \in \{1, \ldots, k_1\}$ и Q_i — захватывающая окрестность аттрактора A_i такая, что ∂Q_i — линия уровня энергетической функции $\varphi_{_{Q_i}} : Q_i \to \mathbb{R}$. Тогда для любой тесной окрестности P_i атрраактора A_i существует энергетическая функция $\varphi_{_{P_i}} : P_i \to \mathbb{R}$ для f с множеством уровня ∂P_i.*

Опираясь на факты, приведенные выше, можно построить энергетическую функцию Морса для диффеоморфизма $f \in G(M^2)$.

Предложение 1.19 ([56], Теорема 1)**.** *Для любого диффеоморфизма $f \in G(M^2)$ существует энергетическая функция, являющаяся функцией Морса.*

1.3.4 Диффеоморфизмы Морса-Смейла на 3-многообразиях

В этом разделе мы изложим результаты работ [12], [13] (см. также монографию [15]) и [43].

В разделе 1.3.2 мы упорядочили периодические орбиты диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ согласно отношению частичного порядка $\prec$:

$$\mathcal{O}_p \prec \mathcal{O}_r \iff W^s_{\mathcal{O}_p} \cap W^u_{\mathcal{O}_r} \neq \emptyset.$$

Более того, можно ввести порядок более тесно связанный с динамикой.

Определение 9. *Нумерацию периодических орбит $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_{k_f}$ диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ назовем динамической, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) если $\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j$, то $i \leqslant j$;

2) если $q_i < q_j$, то $i < j$.

Предложение 1.20 ([15], Proposition 2.6)**.** *Для любого диффеоморфизма $f \in G(M^n)$ существует динамическая нумерация периодических орбит.*

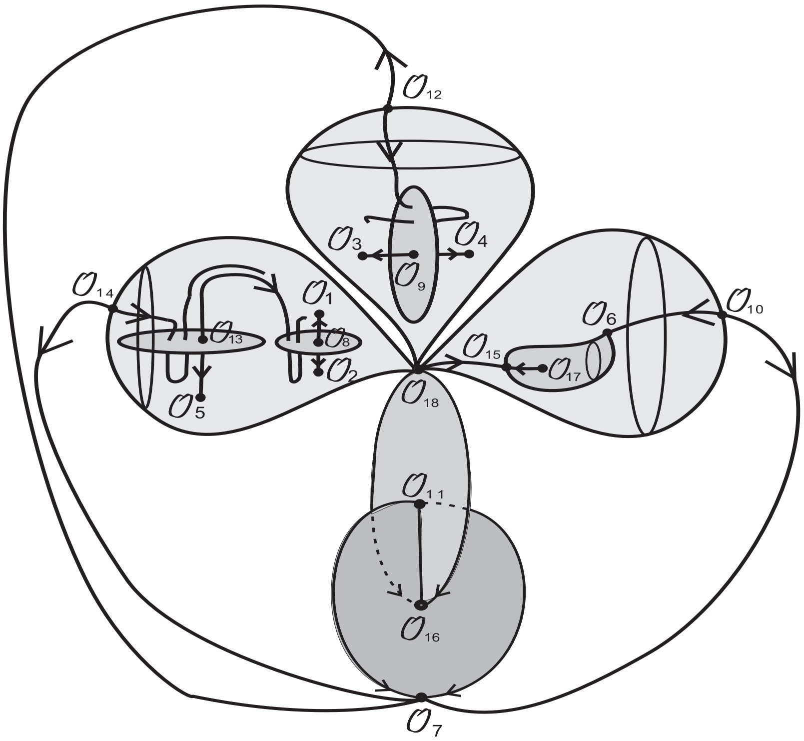

Рис. 1: Фазовый портрет диффеоморфизма Морса-Смейла $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ с динамически упорядоченным множеством периодических орбит

На рисунке 1 представлен фазовый портрет диффеоморфизма Морса-Смейла $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ с динамическим порядком периодических орбит, в предположении, что неблуждающее множество $NW(f)$ состоит из неподвижных точек.

Заметим, что существуют нумерации периодических орбит диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$, сохраняющие отношение частичного порядка $\prec$, отличные от динамической. Везде далее мы будем предполагать, что орбиты диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$ динамически упорядочены. Пусть Ω_f^q, $q \in \{0, 1, 2, 3\}$, — подмножество периодических точек r таких, что $\dim\ W_r^u = q$, k_q — число всех периодических орбит с индексом Морса меньшим или равным q.

Согласно Предложению 1.20 для диффеоморфизма f существует динамическая нумерация орбит $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_{k_f}$, используя которую, мы дадим следующее определение.

Определение 10. *Пусть орбиты диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$ имеют динамическую нумерацию $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_{k_f}$. Функцию Морса-Ляпунова φ для диффеоморфизма f назовем динамически упорядоченной, если $\varphi(\mathcal{O}_i) = i$ для $i \in \{1, \dots, k_f\}$.*

Далее мы исследуем условия существования динамически упорядоченной энергетической функции для диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности $n = 3$.

Пусть $f \in MS(M^3)$. Из Предложения 1.15 следует, что для каждого $i = 1, \dots, k_1$ множество $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{i} W^u_{\mathcal{O}_j}$ является аттрактором, то есть обладает захватывающей окрестностью M_i, где M_i компактное множество такое, что $f(M_i) \subset int\ M_i$ (M_i — f-сжимаема) и $\bigcap\limits_{k\geq 0} f^k(M_i) = A_i$. Обозначим через c_i число компонент связности аттрактора A_i, через r_i — число седловых точек и через s_i — число стоковых точек в A_i. Положим $g_i = c_i + r_i - s_i$.

Напомним, что гладкое компактное ориентируемое трехмерное многообразие с краем называется *ручечным телом рода* $g \geq 0$, если оно диффеоморфно многообразию, полученному из замкнутого 3-шара отождествлением g пар попарно непересекающихся замкнутых 2-дисков на границе шара посредством меняющего ориентацию диффеоморфизма. Границей ручечного тела является ориентируемая поверхность рода g.

Определение 11. *Захватывающая окрестность M_i аттрактора A_i называется ручечной, если M_i состоит из c_i компонент связности, каждая из которых является ручечным телом. Сумму g_{M_i} родов компонент связности M_i назовем родом ручечной окрестности.*

Заметим, что для каждого $i = 1, \dots, k_0$ число g_i равно нулю, аттрактор A_i является нульмерным (так как состоит из c_i стоковых точек) и обладает ручечной окрестностью M_i рода $g_i = 0$, состоящей из c_i попарно непересекающихся трехмерных шаров (это следует, например, из Предложения 1.13). Для каждого $i = k_0 + 1, \dots, k_1$ аттрактор A_i содержит одномерную компоненту связности, в силу чего (допуская некоторую вольность) мы будем далее называть его одномерным.

Предложение 1.21 ([15], Proposition 7.3)**.** *Каждый одномерный аттрактор A_i диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ обладает ручечной окрестностью M_i рода $g_{M_i} \geq g_i$.*

Определение 12. *Ручечную окрестность M_i одномерного аттрактора A_i назовем тесной, если:*

1) $g_{M_i} = g_i$;

2) для каждой точки $\sigma \in \mathcal{O}_i$ пересечение $W^s_\sigma \cap M_i$ состоит в точности из одного двумерного диска.

Одномерный аттрактор A_i, обладающий тесной окрестностью M_i назовем тесно вложенным.

По определению репеллер для диффеоморфизма f есть аттрактор для f^{-1}. Кроме того, динамическая нумерация орбит $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_{k_f}$ диффеоморфизма f индуцирует динамическую нумерацию орбит $\widetilde{\mathcal{O}}_1, \dots, \widetilde{\mathcal{O}}_{k_f}$ диффеоморфизма f^{-1} следующим образом: $\widetilde{\mathcal{O}}_i = \mathcal{O}_{k_f - i}$. Тогда одномерный репеллер называется *тесно вложенным*, если он является тесно вложенным одномерным аттрактором для f^{-1} относительно индуцированной динамической нумерации орбит.

Заметим, что свойство одномерного аттрактора (репеллера) быть тесно вложенным несет информацию о вложении неустойчивых многообразий его седловых точек. В примере Пикстона, где $\mathcal{O}_1 = \omega_1,\ \mathcal{O}_2 = \omega_2,\ \mathcal{O}_3 = \sigma,\ \mathcal{O}_4 = \alpha$, имеется единственный

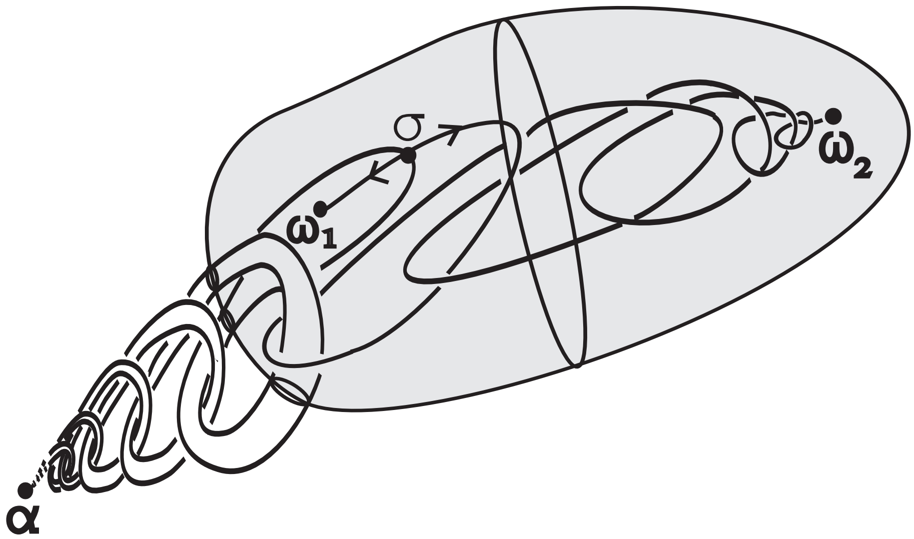

Рис. 2: Одномерный аттрактор в примере Пикстона не является тесно вложенным

одномерный аттрактор $A_3 = cl\ W^u_\sigma$, для которого $g_3 = 0$. При этом любой 3-шар, окружающий $cl\ W^u_\sigma$, пересекает W^s_σ более, чем по одному 2-диску (см. рисунок 2, где представлен фазовый портрет диффеоморфизма Пикстона и 3-шар). Следовательно этот одномерный аттрактор не является тесно вложенным.

Предложение 1.22 ([15], Theorem 7.2). *Если диффеоморфизм $f \in MS(M^3)$ обладает динамически упорядоченной энергетической функцией, то все его одномерные аттракторы и репеллеры являются тесно вложенными.*

Определение 13. *Тесная захватывающая окрестность M_i одномерного аттрактора A_i называется строго тесной, если $M_i \backslash A_i$ диффеоморфно $\partial M_i \times (0,1]$. Одномерный аттрактор A_i, обладающий строго тесной окрестностью M_i называется строго тесно вложенным.*

Предложение 1.23 ([15], Theorem 7.3). *Если все одномерные аттракторы и репеллеры диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ являются строго тесно вложенными, то f обладает динамически упорядоченной энергетической функцией.*

2 Формулировка основных результатов работы. Апробация результатов исследования

2.1 Формулировка основных результатов работы

Энергетическая функция для динамических систем является естественным обобщением функции энергии для диссипативных физических систем. Однако в случае дискретных динамических систем, в отличие от непрерывных, такая функция существует не всегда даже для систем с регулярной динамикой. Известные на сегодняшний день препятствия к существованию энергетической функции у многомерных ($n \geq 3$) систем Морса-Смейла связаны с диким вложением либо седловых сепаратрис, либо гетероклинических пересечений. Отсутствие подобных эффектов в малых размерностях приводит к существованию энергетической функции Морса у Ω-устойчивых диффеоморфизмов на поверхностях и окружности.

В настоящей диссертационной работе исследуется существование энергетической функции у Ω-устойчивых диффеоморфизмов с хаотическим поведением, обусловленным наличием нетривиальных (отличных от периодической орбиты) базисных множеств. Как оказалось, для некоторых содержательных классов 2- и 3-диффеоморфизмов положительная размерность базисных множеств позволяет построить для них энергетическую функцию, тогда как наличие нетривиальных нульмерных базисных множеств является препятствием к существованию такой функции даже для поверхностных диффеоморфизмов.

В главе 3 доказывается техническая теорема о сглаживании непрерывной функции, которая используется в дальнейшем для построения гладких энергетических функций рассматриваемых классов диффеоморфизмов.

Теорема 1 ([47]*, Лемма 2.1, [3]*, Lemma 5). *Пусть M^n — гладкое компактное n-многообразие, $K \subset M^n$ — замкнутое подмножество M и U — некоторая замкнутая окрестность множества K такая, что $K \subset int\, U$. Пусть задана непрерывная сюръективная функция $\varphi : U \to [0;1]$, гладкая на $U \setminus K$ и $\varphi^{-1}(0) = K$. Тогда для любого $\delta \in (0;1)$ существует гладкая функция $g : [0;1] \to [0;1]$, удовлетворяющая следующим свойствам:*

- $g'(0) = 0$ *и* $g'(c) > 0,\ \forall c \in (0;1]$*;*
- $g(c) = c,\ \forall c \in [\delta;1]$*;*
- *суперпозиция* $\psi = g \circ \varphi$ *— гладкая на всём множестве* U*.*

Идея доказательства Теоремы 1 основана на построении искомой функции g методом разбиения единицы с выполнением условий, необходимых для дифференцируемости композиции $g \circ \varphi$.

В главе 4 приводятся необходимые для построения энергетических функций свойства нетривиальных базисных множеств. Кроме того, в этой главе рассмотрен класс $S(M^2)$ Ω-устойчивых диффеоморфизмов, заданных на замкнутой ориентируемой поверхности M^2, все нетривиальные базисные множества которых являются аттракторами или репеллерами. Основным результатом главы является следующая теорема.

Теорема 2 ([45]*, Теорема 1). *Для любого диффеоморфизма $f \in S(M^2)$ существует гладкая энергетическая функция, являющаяся функцией Морса вне нетривиальных базисных множеств.*

Доказательство Теоремы 2 существенно опирается на существование канонического носителя у одномерных базисных множеств Ω-устойчивых диффеоморфизмов поверхностей. Идеи построения такого носителя лежат в основе фундаментальной теории поверхностных базисных множеств, построенной в работах А. Мэнинга, Ш. Ньюхауса, В.З. Гринеса, А.Ю. Жирова, Р.В. Плыкина. Вне носителей аттракторов и репеллеров диффеоморфизм имеет конечное гиперболическое цепно рекурентное множество. Построение энергетической функции для регулярных компонент диффеоморфизма основано на существовании энергетической функции Морса у диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях, доказанном Д. Пикстоном. Результирующая энергетическая функция является константой на одномерных аттракторах и репеллерах и является функцией Морса на дополнении к ним. Гладкость такой функции обеспечивается технической Теоремой 1.

В главе 5 рассмотрены Ω-устойчивые диффеоморфизмы, заданные на замкнутой ориентируемой поверхности M^2, чье неблуждающее множество содержит хотя бы одно нетривиальное нульмерное базисное множество без пар сопряженных точек. Как следует из приведенного ниже основного результаты этой главы, наличие такого базисного множества является препятствием к существованию энергетической функции у диффеоморфизма.

Теорема 3 ([1]*, Theorem 1). *Каждый Ω-устойчивый диффеоморфизм $f : M^2 \to M^2$, заданный на замкнутой ориентируемой поверхности M^2, неблуждающее множество которого содержит нульмерное нетривиальное базисное множество без пар сопряженных точек, не обладает энергетической функцией.*

Доказательство Теоремы 3 базируется на свойствах нульмерных нетривиальных базисных множеств без пар сопряженных точек. Идея изучения таких множеств с помощью универсального накрытия плоскостью Лобачевского развита в работах В.З. Гринеса и Х. Калая. Отсутствие пар сопряженных точек у нульмерного базисного множества позволяет выделить гирлянды из его граничных точек, чьи инвариантные многообразия разбиваются на пары, имеющие одинаковое асимтотической поведение на абсолюте. Множества, ограниченные двумя парами таких многообразий разной устойчивости, являются дисками, внутренность которых состоит из блуждающих точек диффеоморфизма. Свойства энергетической функции на таких дисках связаны с тем, что на неустойчивом многообразии она должна принимать значения строго меньшие, а на устойчивом строго большие своего значения на самом базисном множестве. С помощью технической леммы 5.1 доказывается, что любая функция с такими свойствами имеет критические блуждающие точки, а значит не является энергетической.

В главе 6 получено частичное решение проблемы Смейла, касающейся описания диаграмм (A, B)-диффеоморфизмов (удовлетворяющих аксиомам A и B), построенных на основе частичного порядка С. Смейла на множестве его базисных множеств. Диаграмма Смейла является частным случаем диаграммы Хассе частично упорядоченного множества $(X, \prec)$ и представляет из себя граф, вершинами которого являются элементы множества X, а пара (x, y) образует ребро, если $x \prec y$ и $\nexists z: \ x \prec z, \ z \prec y$. В лемме 6.1 установлено, что диаграмма Смейла любого Ω-устойчивого диффеоморфизма является связной диаграммой Хассе. С помощью хирургической операции Смейла конструируются модельные диффеоморфизмы двумерного тора. В лемме 6.6 получены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности модельных диффеоморфизмов. Далее вводится класс $\mathcal{H}$ Ω-устойчивых диффеоморфизмов поверхности, являющихся связной суммой модельных диффеоморфизмов. Основным результатом раздела является следующая теорема.

Теорема 4 ([39]*, Теорема). *Любая связная диаграмма Хассе реализуется некоторым диффеоморфизмом из класса $\mathcal{H}$.*

Размеченной диаграммой Смейла называется диаграмма Смейла, в которой около каждой вершины дополнительно указан класс топологической сопряженности ограничения диффеоморфизма на соответствующем базисном множестве. Для диффеоморфизмов $f, f' \in \mathcal{H}$ изоморфность их размеченных диаграмм Смейла является необходимым и достаточным условием их Ω-сопряженности. Однако сопрягающий гомеоморфизм в общем случае не продолжается с базисных множеств на несущую поверхность. В работе выделен подкласс $\mathcal{H}_* \subset \mathcal{H}$ диффеоморфизмов, у которых любые два модельных диффеоморфизма связаны не более, чем по одной орбите. Для таких диффеоморфизмов класс изоморфности размеченной диаграммы Смейла является полным инвариантом объемлющей Ω-сопряженности.

Теорема 5 ([2]*, Теорема). *Диффеоморфизмы $f, f' \in \mathcal{H}_*$ объемлюще Ω-сопряжены тогда и только тогда, когда их размеченные диаграммы изоморфны.*

В главе 7 рассматриваются Ω-устойчивые 3-диффеоморфизмы с двумерными нетривиальными множествами. Именно, для класса $T(M^3)$ структурно устойчивых диффеоморфизмов с двумерным растягивающимся аттрактором или сжимающимся репеллером из результатов В.З. Гринеса, Е.В. Жужомы и В.С. Медведева известно, что все остальные базисные множества таких диффеоморфизмов являются тривиальными, нетривиальное базисное множество имеет связки только степени два, а несущее многообразие всегда гомеоморфно трехмерному тору. Кроме того, нетривиальное базисное множество отделяется от множества с регулярной динамикой так называемой характеристической сферой. Этот факт позволяет доказать ручное вложение сепаратрис седловых точек и построить энергетическую функцию Морса для рассматриваемого диффеоморфизма вне растягивающегося аттрактора (сжимающегося репеллера), воспользовавшись результатами В.З. Гринса, Ф. Лауденбаха и О.В. Починки о существовании энергетической функции Морса для 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла. Теорема 1 позволяет гладко продолжить построенную функцию на нетривиальное базисное множество и, таким образом, доказать следующую теорему.

Теорема 6 ([46]*, Теорема 1). *Для любого диффеоморфизма $f \in T(M^3)$ существует гладкая энергетическая функция, являющаяся функцией Морса вне нетривиального базисного множества.*

Аналогичный результат получен для класса $Q(M^3)$ Ω-устойчивых 3-диффеоморфизмов с двумерным цепно рекуррентным множеством.

Теорема 7 ([47]*, Теорема 1.1). *Любой диффеоморфизм $f \in Q(M^3)$ обладает гладкой энергетической функцией.*

Идея доказательства теоремы 7 основана на том, что любое базисное множество рассматриваемого диффеоморфизма является тором, ручно вложенным[1] в M^3, а сам диффеоморфизм топологически сопряжен с косым произведением диффеоморфизма Аносова и грубого преобразования окружности. Этот факт, следующий из работ В.З. Гринеса, Е.В. Жужомы, Ю.А. Левченко и О.В. Починки, позволяет построить гладкую энергетическую функцию на блуждающем множестве такого диффеоморфизма. Для продолжения построенной функции на цепно рекуррентное множество используется теорема 1.

В главе 8 рассматриваются 3-диффеоморфизмы с динамикой одномерный источник-сток. Заметим, что подобная динамика на поверхности не является структурно устойчивой в силу результатов Р. Робинсона и Р. Вильямса. Построение 3-диффеоморфизмов с соленоидальными одномерными аттрактором и репеллером впервые было предложено Дж. Гиббонсом, но все примеры также не были структурно устойчивыми. Хр. Бонатти и И. Ши были построены структурно устойчивые примеры 3-диффеоморфизмов с одномерной динамикой аттрактор-репеллер. Но вложение базисных множеств в объемлющее многообразие является столь нетривиальным, что не позволяет решить проблему существования энергетической функции для таких диффеоморфизмов.

В настоящей работе построены примеры 3-диффеоморфизмов с канонически вложенными поверхностными одномерными аттрактором и репеллером, а именно, доказана следующая теорема.

Теорема 8 ([3]*, Theorem 1). *Существует бесконечное число попарно Ω-несопряженных 3-диффеоморфизмов, неблуждающие множества которых попарно гомеоморфны и каждое из них является объединением канонически вложенных одномерных поверхностных аттрактора и репеллера.*

Поверхностная динамика построенных диффеоморфизмов и результат теоремы 1

[1] Двумерный тор B называется *ручно вложенным* в многообразие M, если существует гомеоморфизм на образ $g : \mathbb{T}^2 \times [-1, 1] \to M^3$ такой, что $g(\mathbb{T}^2 \times \{0\}) = B$.

позволяют доказать для них существование гладкой энергетической функции.

Теорема 9 ([3]*, Theorem 2, [3]*, Theorem 1). *У каждого Ω-устойчивого диффеоморфизма, заданного на замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии M^3, неблуждающее множество которого состоит из объединения связных канонически вложенных одномерных поверхностных аттрактора и репеллера, существует гладкая энергетическая функция.*

2.2 Апробация результатов исследования

Результаты работы были представлены на следующих международных конференциях:

- *Realization of Hasse diagrams by means of A-diffeomorphisms of surfaces with non-trivial basis sets*, International Conference "Dynamics in Siberia", Новосибирск, 2021.
- *Конструкция структурно устойчивого 3-диффеоморфизма с одномерной динамикой источник-сток*, Международная конференция "КРОМШ", Крым, 2020.
- *On existing of energy function for 3- diffeomorphisms with one-dimentional surface attractor and repeller*, International Conference "Dynamics in Siberia", Новосибирск, 2019.
- *Energy function for 3-diffeomorphisms with one-dimensional surface attractor and repeller*, International Conference on the occasion of Prof. Yulij Ilyashenko's 75-th birthday, Москва, 2018.

По результатам исследований опубликовано девять статей:

- Barinova M., Gogulina E., Pochinka O. Omega-classification of Surface Diffeomorphisms Realizing Smale Diagrams // Russian journal of non-linear dynamics. 2021.
- Barinova M. Existence of an Energy Function for Surface Diffeomorphisms with Zero-Dimensional Non-Trivial Basic Sets // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Принято в печать.
- Barinova M., Grines V., Pochinka O., Yu B. Existence of an energy function for three-dimensional chaotic "sink-source" cascades // Chaos. 2021. Vol. 31. No. 6.
- Баринова М. К., Гогулина Е. Ю., Починка О. В. Реализация ациклической диаграммы Смейла омега-устойчивым диффеоморфизмом поверхности // Огарёв-Online. 2020. № 13. С. 1-10.
- Grines V., Pochinka O., Barinova M. On construction of axiom A 3-diffeomorphism with one-dimensional surface attractor-repeller dynamics // Динамические системы. 2018. Vol. 8. No. 4. P. 299-305.

- Гринес В. З., Носкова М.К., Починка О. В. Построение энергетической функции для А-диффеоморфизмов с двумерным неблуждающим множеством на 3-многообразиях // Труды Средневолжского математического общества. 2015. Т. 17. № 3. С. 12-17.

- Починка О. В., Гринес В. З., Носкова М.К. Построение энергетической функции для трёхмерных каскадов с двумерным растягивающимся аттрактором // Труды Московского математического общества. 2015. Т. 76. № 2. С. 271-286.

- Гринес В. З., Носкова М.К., Починка О. В. Энергетическая функция для А-диффеоморфизмов поверхностей с одномерными нетривиальными базисными множествами // Динамические системы. 2015. Т. 5. № 1-2. С. 31-37.

- Починка О. В., Носкова М.К., Гринес В. З. Энергетическая функция для структурно устойчивых 3-диффеоморфизмов с двумерным растягивающимся аттрактором // Журнал Средневолжского математического общества. 2014. Т. 16. № 2. С. 20-26.

3 Процедура сглаживания непрерывной функции

В этом разделе мы докажем основной технический результат, который будет использоваться в дальнейшем для построения энергетических функций диффеоморфизмов с хаотическим поведением.

Теорема 1 ([47]*, Лемма 2.1)**.** *Пусть M^n — гладкое компактное n-многообразие, $K \subset M^n$ — замкнутое подмножество M и U — некоторая замкнутая окрестность множества K такая, что $K \subset int\, U$. Пусть задана непрерывная сюръективная функция $\varphi : U \to [0;1]$, гладкая на $U \setminus K$ и $\varphi^{-1}(0) = K$. Тогда для любого $\delta \in (0;1)$ существует гладкая функция $g : [0;1] \to [0;1]$, удовлетворяющая следующим свойствам:*

- $g'(0) = 0$ *и* $g'(c) > 0,\ \forall c \in (0;1]$*;*
- $g(c) = c,\ \forall c \in [\delta;1]$*;*
- *суперпозиция* $\psi = g \circ \varphi$ *— гладкая на всём множестве* U*.*

Доказательство: Пусть d — метрика на многообразии M^n. Для любого компактного подмножества $C \subset (U \setminus K)$ под максимумом модуля градиента функции φ в точке $x \in C$ будем понимать наибольший из модулей градиентов этой функции, посчитанных в картах конечного покрытия множества C. Для $c \in (0;1]$ положим $\alpha(c) = \min\{1, d(\varphi^{-1}([c;1]), K)\}$ и $\beta(c) = \max\{1, \max\limits_{x \in \varphi^{-1}([c;1])} |grad\ \varphi(x)|\}$. По построению функции $\alpha(c)$ и $\beta(c)$ являются непрерывными, причем $\alpha(c)$ — неубывающая на $(0;1]$, а $\beta(c)$ — невозрастающая. Тогда функция $\gamma(c) = \frac{\alpha(c)}{\beta(c)}$ является непрерывной неубывающей на полуинтервале $(0;1]$ функцией и $\lim\limits_{c \to 0} \frac{\alpha(c)}{\beta(c)} = 0$, так как $\gamma(c) \leqslant \alpha(c)$.

Построим гладкую функцию $g : [0;1] \to [0;1]$, такую что

(a) $g'(c) > 0$ для любого $c \in (0;1)$;

(b) $g(c) \leqslant c\gamma(c)$ для любого $c \in (0; \frac{\delta}{4})$;

(c) $g'(c) \leqslant \gamma(c)$ для любого $c \in (0; \frac{\delta}{4})$;

(d) $g(c) = c$ для любого $c \in [\delta;1]$

и докажем, что такая функция удовлетворяет требованиям леммы.

Для построения такой функции будем использовать разбиение единицы. Возьмем открытое покрытие полуинтервала $(0;1]$ множествами $(a_1;b_1] = (\delta;1]$, $(a_2;b_2] = (\frac{\delta}{2};1]$, $(a_i;b_i) = \left(\frac{\delta}{2^{i-1}}; \frac{\delta}{2^{i-3}}\right)$, $i = 3,4,\ldots$. Пусть $\{\sigma_i\}$ — произвольное разбиение единицы, подчиненное данному покрытию, то есть для всех $i \in \mathbb{N}:\ \sigma_i : (0;1] \to [0;1]$ — гладкая функция такая, что $Supp(\sigma_i) \subset (a_i;b_i)$ и $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \sigma_i(c) = 1$ для всех $c \in (0;1]$. Построим $g'(c)$ как сумму $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(c)$, где ε_i — последовательность неотрицательных чисел.

Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_i = \gamma(a_i)$ для всех $i = 4,5,\ldots$, а ε_3 определим позднее таким образом, чтобы выполнялось условие (d). Поскольку каждая точка $c \in (0;1]$ принадлежит носителям не более, чем трех отображений из построенного выше разбиения единицы, то сумма $S(c)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(c)$ является гладкой на множестве $(0;1]$ функцией, которая по непрерывности доопределяется в нуле нулем, так как $\lim\limits_{c\to 0}\gamma(c)=0$. Определим функцию g формулой $g(c)=\int\limits_0^c S(x)dx$. Покажем, что она является искомой, проверив условия (a)-(d).

(a) Поскольку $g'(c)=S(c)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(c)$, то $g'(c)>0$ для любого $c\in(0;1)$.

(b) Для $i=4,5,\dots$ последовательность $\{\varepsilon_i\}$ невозрастающая. Заметим, что для любого $c\in(0;1]$ существует единственный номер i^* такой, что $c\in(a_{i^*};a_{i^*-1}]$. Тогда $\sigma_{i^*}(c)\neq 0$ и $\sigma_i(c)=0$ для всех $i\notin\{i^*,i^*+1\}$. Из выбора параметров ε_i для $c\in\left(0;\frac{\delta}{4}\right)$ получим цепочку неравенств: $g(c)=\int\limits_0^c S(x)dx=\int\limits_0^c\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x)\right)dx=\int\limits_0^c\left(\sum\limits_{i=i^*}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x)\right)dx\leqslant \int\limits_0^c\left(\sum\limits_{i=i^*}^{\infty}\varepsilon_{i^*}\sigma_i(x)\right)dx=\varepsilon_{i^*}\int\limits_0^c\left(\sum\limits_{i=i^*}^{\infty}\sigma_i(x)\right)dx\leqslant\varepsilon_{i^*}\int\limits_0^c\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sigma_i(x)\right)dx=\varepsilon_{i^*}\int\limits_0^c 1dx=\varepsilon_{i^*}c= c\gamma\left(a_{i^*}\right)\leqslant c\gamma(c)$.

(c) Для $g'(c)$, $c\in(0;\frac{\delta}{4})$ справедлива следующая оценка: $g'(c)=\sum\limits_{i=i^*}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(c)\leqslant \varepsilon_{i^*}\sum\limits_{i=i^*}^{\infty}\sigma_i(c)=\varepsilon_{i^*}<\gamma(c)$.

(d) При $c\in[\delta;1]$ верна цепочка равенств $g(c)=\int\limits_0^c\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x)\right)dx= \int\limits_0^{\delta}\left(\sum\limits_{i=4}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x)\right)dx+\int\limits_0^{\delta}\varepsilon_3\sigma_3(x)dx+\int\limits_0^{\delta}\varepsilon_2\sigma_2(x)dx+\int\limits_{\delta}^{c}(\varepsilon_1\sigma_1(x)+\varepsilon_2\sigma_2(x))dx= \int\limits_0^{\delta}\left(\sum\limits_{i=4}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x)\right)dx+\varepsilon_3\int\limits_0^{\delta}\sigma_3(x)dx+\int\limits_0^{\delta}\sigma_2(x)dx+\int\limits_{\delta}^{c}(\sigma_1(x)+\sigma_2(x))dx=\int\limits_0^{\delta}\left(\sum\limits_{i=4}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x)\right)dx+ \varepsilon_3\int\limits_0^{\delta}\sigma_3(x)dx+\int\limits_0^{\delta}\sigma_2(x)dx+(c-\delta)=c$. Положим $\varepsilon_3=\frac{\delta-\int\limits_0^{\delta}\left(\sum\limits_{i=4}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x)\right)dx-\int\limits_0^{\delta}\sigma_2(x)dx}{\int\limits_0^{\delta}\sigma_3(x)dx}$, тогда $g(c)=c$ для $c\in[\delta;1]$. Заметим, что $\varepsilon_3>0$, то есть подобранный таким образом параметр не нарушает условие (a).

Покажем, что функция g, построенная таким образом, удовлетворяет условиям леммы.

Так как $0<g(c)\leqslant c\gamma(c)$ для всех $c\in\left(0;\frac{\delta}{4}\right)$, то $\lim\limits_{c\to 0}g(c)=0=g(0)$, а значит $g(c)$ — непрерывная функция на отрезке $[0;1]$. Также $0<g'(c)\leqslant\gamma(c)$ для всех $c\in\left(0;\frac{\delta}{4}\right)$, а значит $g'(0)=0$ и $g(c)$ — гладкая функция на $[0;1]$. Осталось показать, что суперпозиция $\psi=g\circ\varphi$ — гладкая на множестве U.

Заметим, что $grad\,\psi=g'\cdot grad\,\varphi$, это нам пригодится для дальнейших рассуждений. Так как на множестве $U\setminus K$ функция ψ является гладкой как суперпозиция гладких функций, то нам осталось показать, что функция ψ — гладкая на множестве K.

Рассмотрим любую точку $a\in K$ и локальную карту (U_a,h_a), где окрестность выбрана таким образом, что $\varphi(w)<\frac{\delta}{4}$ для всех $w\in U_a$ и $h_a:U_a\to\mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм, отображающий некоторую окрестность $U_a\subset U$ точки a в $\mathbb{R}^n$, причем точка a переходит в начало координат O. Сначала покажем дифференцируемость.

Если функция $\psi_a = \psi(h_a^{-1}(s))$ дифференцируема в точке O, то функция ψ дифференцируема в точке a. При этом функция ψ_a дифференцируема в точке O и имеет частные производные, равные нулю в этой точке, тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{s\to O}\frac{\psi_a(s)}{\rho(s,O)} = 0$, где $s(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ и ρ евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$, определенная формулой $\rho(s^1,s^2) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^1-x_i^2)^2}$ для $s^1(x_1^1,\dots,x_n^1), s^2(x_1^2,\dots,x_n^2)\in\mathbb{R}^n$. Проверка равенства $\lim\limits_{s\to O}\frac{\psi_a(s)}{\rho(s,O)} = 0$ и завершит доказательство дифференцируемости.

Введем на $\mathbb{R}^n$ метрику d_a формулой $d_a(s^1,s^2) = d(h_a^{-1}(s^1), h_a^{-1}(s^2))$ для $s^1,s^2\in\mathbb{R}^n$. В силу [61] (лекция 15), метрики ρ и d_a эквивалентны в некоторой компактной окрестности $U(O)$ точки O, то есть существуют константы $0 < c_1 \leqslant c_2$ такие, что

$$\forall s^1,s^2\in U(O):\ c_1 d_a(s^1 s^2) \leqslant \rho(s^1,s^2) \leqslant c_2 d_a(s^1,s^2).$$

Для $s\in U(O)$ положим $w = h_a^{-1}(s)$ и $c = \varphi(h_a^{-1}(s)) = \varphi(w)$. Тогда $0 \leqslant \lim\limits_{s\to O}\frac{\psi_a(s)}{\rho(s,O)} \leqslant \lim\limits_{s\to O}\frac{\psi(h_a^{-1}(s))}{c_1 d(h_a^{-1}(s),a)} = \lim\limits_{w\to a}\frac{\psi(w)}{c_1 d(w,a)} = \lim\limits_{w\to a}\frac{g(\varphi(w))}{c_1 d(w,a)} = \lim\limits_{w\to a}\frac{g(c)}{c_1 d(w,a)} \leqslant \lim\limits_{w\to a}\frac{c\alpha(c)}{\beta(c)c_1 d(w,a)} \leqslant \lim\limits_{w\to a}\frac{\varphi(w)d(w,a)}{c_1 d(w,a)} = \lim\limits_{w\to a}\frac{\varphi(w)}{c_1} = 0$.

Теперь покажем, что частные производные $(\psi_a)'_{x_i}$, $i\in\{1,\dots,n\}$ непрерывны в точке O, то есть $\lim\limits_{s\to O}(\psi_a)'_{x_i}(s) = 0$, что эквивалентно $\lim\limits_{s\to O}|grad\ \psi_a(s)| = 0$. Обозначим через $J_{h_a^{-1}}$ якобиан отображения h_a^{-1}, через $||J_{h_a^{-1}}||$ — его норму, подчиненную евклидовой норме вектора в $\mathbb{R}^n$ и через B константу такую, что $||J_{h_a^{-1}}(s)|| \leqslant B$ для всех точек s в некоторой окрестности точки O. Тогда $\lim\limits_{s\to O}|grad\ \psi_a(s)| = \lim\limits_{s\to O}|J_{h_a^{-1}}(s)\cdot g'(c)\cdot grad\ \varphi(w)| \leqslant \lim\limits_{s\to O}||J_{h_a^{-1}}(s)||\cdot|g'(c)|\cdot|grad\ \varphi(w)| \leqslant \lim\limits_{w\to a}B\cdot\frac{\alpha(c)}{\beta(c)}\cdot|grad\ \varphi(w)| \leqslant \lim\limits_{w\to a}B\cdot\frac{d(w,a)}{|grad\ \varphi(w)|}\cdot|grad\ \varphi(w)| \leqslant \lim\limits_{w\to a}B\cdot d(w,a) = 0$.

Таким образом, функция ψ — гладкая на U. $\square$

4 Построение энергетической функции для Ω-устойчивых диффеоморфизмов поверхности с одномерными базисными множествами

Как упоминалось выше, факт наличия энергетической функции не имеет места для диффеоморфизмов даже в том случае, когда их цепно рекуррентное множество гиперболическое. Множество таких диффеоморфизмов совпадает с множеством Ω-устойчивых диффеоморфизмов, то есть тех, что сохраняют качественную структуру цепно рекуррентного множества при малых возмущениях. Цепная компонента такого диффеоморфизма совпадает с замыканием множества периодических точек Per_f (см., например, [23]), а цепные компоненты совпадают с так называемыми *базисными множествами* (см. [30]), число которых конечно:

$$R_f = cl(Per_f) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \cdots \cup \Lambda_m.$$

Начиная с размерности $n = 2$ базисное множество Ω-устойчивого диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ может быть *нетривиальным*, то есть отличным от периодической орбиты.

В этом разделе устанавливается факт существования гладкой энергетической функции у Ω-устойчивых диффеоморфизмов без нульмерных нетривиальных базисных множеств. Полученные в этом разделе результаты существенно опираются на следующие свойства нетривиальных базисных множеств Ω-устойчивых диффеоморфизмов.

4.1 Свойства нетривиальных базисных множеств Ω-устойчивых диффеоморфизмов

В этой части мы рассматриваем сохраняющие ориентацию Ω-устойчивые диффеоморфизмы f, заданные на ориентируемом компактном многообразии M^n (возможно с краем), имеющие нетривиальное базисное множество Λ, принадлежащее внутренности многообразия M^n. Результаты этой части опираются на информацию, изложенную в источниках [35], [36], [37], [38], [40], [20], [41], [57], [58], [59], [60], [23], [30].

4.1.1 Нетривиальные аттракторы и репеллеры

Согласно теореме о спектральном разложении, неблуждающее множество Ω-устойчивого диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ единственным образом представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся базисных множеств, каждое из которых является компактным, инвариантным и топологически транзитивным. В этом разделе приводится критерий того, что базисное множество Λ является аттрактором (репеллером) и описывается локальная топологическая структура аттрактора (репеллера).

Напомним, что диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ называется *диффеоморфизмом Аносова*, если он гиперболичен на всём многообразии M^n.

Предложение 4.1. *Пусть Ω-устойчивый диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ имеет n-мерное базисное множество Λ. Тогда $\Lambda = M^n$, M^n — многообразие без края и f — диффеоморфизм Аносов.*

Из предложения 4.1 следует, что n-мерное базисное множество является аттрактором и репеллером одновременно.

Предложение 4.2. *Базисное множество Λ диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ является аттрактором (репеллером) тогда и только тогда, когда $W^u_\Lambda = \Lambda$ ($W^s_\Lambda = \Lambda$).*

Предложение 4.3. *Пусть $f : M^n \to M^n$ — Ω-устойчивый диффеоморфизм. Тогда среди базисных множеств диффеоморфизма f найдется по крайней мере один аттрактор и по крайней мере один репеллер.*

Предложение 4.4. *Любое базисное множество Λ коразмерности 1 диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ является либо аттрактором, либо репеллером.*

Напомним, что нетривиальное базисное множество Λ, являющееся аттрактором диффеоморфизма f, называется *растягивающимся*, если топологическая размерность Λ равна размерности $W^u_x, x \in \Lambda$. Нетривиальное базисное множество Λ, являющееся репеллером диффеоморфизма f, называется *сжимающимся*, если оно является растягивающимся аттрактором для диффеоморфизма f^{-1}.

Предложение 4.5. *Любое одномерное базисное множество диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ является либо растягивающимся аттрактором, либо сжимающимся репеллером.*

Предложение 4.6. *Любой растягивающийся аттрактор (сжимающийся репеллер) Λ имеет локальную структуру прямого произведения k-мерного евклидова пространства и канторова множества, где k — топологическая размерность Λ.*

4.1.2 Базисные множества типов $(n-1,1)$ и $(1,n-1)$

Пара чисел (a,b), где $a = \dim\ W^u_x,\ b = \dim\ W^s_x,\ x \in \Lambda$ называется *типом базисного множества* Λ. В этом разделе мы изучаем свойства базисных множеств типа $(n-1,1)$ ($(1,n-1)$) Ω- устойчивого диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$. Заметим, что такой тип, а именно тип $(1,1)$ имеет любое нетривиальное базисное множество диффеоморфизма поверхности.

Определение 14. *Пусть Λ — базисное множество типа $(n-1,1)$ $((1,n-1))$ Ω-устойчивого диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$, $x \in \Lambda$ и Λ_x — периодическая компонента множества Λ, содержащая точку x.*

- *Компоненту связности множества $W^s_x \setminus x$ $(W^u_x \setminus x)$, которая содержит множество всюду плотное в Λ_x, назовем плотно расположенной в Λ_x.*
- *Точку x назовем s-плотной (u-плотной), если обе компоненты связности множества $W^s_x \setminus x$ $(W^u_x \setminus x)$ являются плотно расположенными в Λ_x.*
- *Точку x назовем s-граничной (u-граничной), если одна из компонент связности множества $W^s_x \setminus x$ $(W^u_x \setminus x)$ не пересекается с Λ.*

Предложение 4.7. (*Теорема о структуре базисного множества типа $(n-1,1)$ $((1,n-1))$*) *Пусть Λ — базисное множество типа $(n-1,1)$ $((1,n-1))$ A-диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$. Тогда*

1. *Если Λ имеет s-граничные (u-граничные) точки, то их конечное число и все они периодические.*
2. *Точка $x \in \Lambda$ является s-плотной (u-плотной) тогда и только тогда, когда многообразие W^s_x (W^u_x) не содержит s-граничных (u-граничных) точек.*
3. *Если W^u_x, (W^s_x) не содержит s-граничных (u-граничных) точек для некоторой точки $x \in \Lambda$, то для любого $\delta > 0$ обе компоненты связности множества $W^s_{x,\delta} \setminus x$ $(W^u_{x,\delta} \setminus x)$ пересекаются с Λ.*

Предложение 4.8. *Базисное множество Λ типа $(n-1,1)$ $((1,n-1))$ содержит хотя бы одну s-граничную (u-граничную) точку тогда и только тогда, когда оно не является репеллером (аттрактором).*

Сформулируем некоторые следствия из приведенных результатов.

Пусть $f : M^2 \to M^2$ — Ω-устойчивый диффеоморфизм поверхности, имеющий нетривиальное базисное множество Λ. Тогда Λ имеет тип $(1,1)$ и, следовательно, может иметь s-граничные, а также u-граничные точки, которых, в силу предложения 4.7 конечное число, и все они являются периодическими. Тогда ситуация с наличием s-граничных и u-граничных точек у множества Λ в зависимости от его размерности, которая может быть равна 0, 1 или 2, выглядит следующим образом.

Следствие 4.1. *Пусть $f : M^2 \to M^2$ — A-диффеоморфизм поверхности, имеющий нетривиальное базисное множество Λ. Тогда*

(0) Если $\dim\ \Lambda = 0$*, то по предложению 4.2, Λ не является ни аттрактором, ни репеллером. Поэтому, по предложению 4.8, Λ необходимо имеет s-граничные, а также u-граничные точки одновременно.*

(1) Если $\dim\ \Lambda = 1$*, то, согласно предложению 4.5, Λ является либо растягивающимся аттрактором, либо сжимающимся репеллером. Поэтому, по предложению 4.8, Λ имеет либо только s-граничные, либо только u-граничные точки, соответственно.*

(2) Если $\dim\ \Lambda = 2$*, то по предложению 4.1, $\Lambda = M^2$ и f — диффеоморфизм Аносова. В силу предложения 4.2, Λ является и аттрактором, и репеллером одновременно. Поэтому Λ не имеет ни s-граничных, ни u-граничных точек по предложению 4.8.*

Пусть $f : M^3 \to M^3$ — А-диффеоморфизм 3-многообразия, имеющий нетривиальное базисное множество Λ. Тогда Λ имеет тип либо $(1,2)$, либо $(2,1)$. Тогда Λ может иметь либо u-граничные, либо s-граничные точки, соответственно, которых, в силу предложения 4.7 конечное число, и все они являются периодическими. Положим для определенности, что Λ имеет тип $(2,1)$. Тогда ситуация с наличием s-граничных точек у множества Λ в зависимости от его размерности, которая может быть равна $0,\ 1,\ 2$ или 3, выглядит следующим образом.

Следствие 4.2. *Пусть $f : M^3 \to M^3$ — А-диффеоморфизм 3-многообразия, имеющий нетривиальное базисное множество Λ типа* $(2,1)$. *Тогда*

(0) Если $\dim\ \Lambda = 0$*, то по предложению 4.2, Λ не является репеллером. Поэтому, по предложению 4.8, Λ необходимо имеет s-граничные точки, которых в силу предложения 4.7 конечное число, и все они являются периодическими.*

(1) Если $\dim\ \Lambda = 1$*, то возможны два случая: a) Λ не является репеллером и b) Λ является сжимающимся репеллером. По предложению 4.8, в случае a) Λ имеет s-граничные точки, а в случае b) — не имеет.*

(2) Если $\dim\ \Lambda = 2$*, то по предложению 4.4, возможны два случая: a) Λ является растягивающимся аттрактором и b) Λ является репеллером. По предложению 4.8, в случае a) Λ имеет s-граничные точки, а в случае b) — не имеет.*

(3) Если $\dim\ \Lambda = 3$*, то по предложению 4.1, $\Lambda = M^3$ и f — диффеоморфизм Аносова. В силу предложения 4.2, Λ является репеллером, поэтому Λ не имеет s-граничных точек по теореме 4.8.*

Предложение 4.9. *Если Λ — базисное множество типа* $(n-1,1)$ $((1,n-1))$, *то для любой точки $x \in \Lambda$ по крайней мере одна из компонент связности множества $W^s_x \setminus x$ ($W^u_x \setminus x$) содержит множество, плотное в Λ_x.*

4.1.3 Одномерные базисные множества поверхностных диффеоморфизмов

В этом разделе мы рассматриваем одномерные базисные множества Λ Ω-устойчивого диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ и описываем построение канонических носителей для таких множеств.

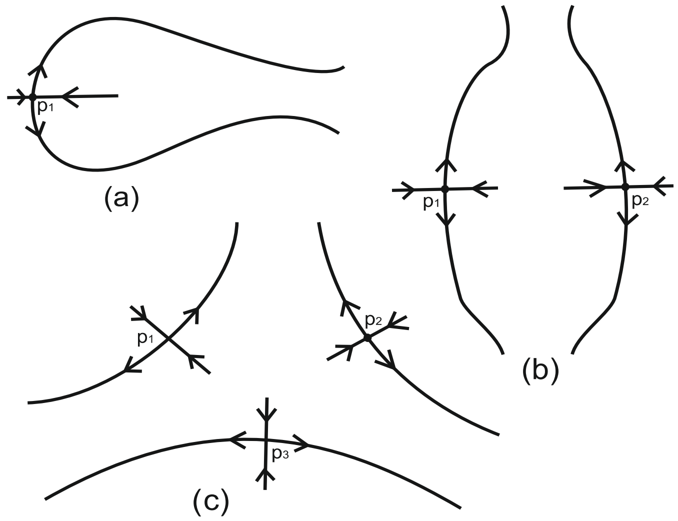

Рис. 3: Связки одномерных аттракторов

Согласно предложению 4.4, Λ является аттрактором или репеллером. Для определенности мы будем предполагать, что рассматриваемое одномерное базисное множество Λ является аттрактором (в случае репеллера достаточно рассмотреть диффеоморфизм f^{-1}). Из предложений 4.7 и 4.8 следует, что для одномерного аттрактора Λ достижимая изнутри граница[2] множества $M^2 \setminus \Lambda$ состоит из неустойчивых многообразий всех s-граничных точек (которых конечное число).

Определение 15. *Связкой b аттрактора Λ называется объединение максимального числа r_b неустойчивых многообразий $W^u_{p_1}, \dots, W^u_{p_{r_b}}$ s-граничных периодических точек $p_1, \dots, p_{r_b}$ множества Λ, достижимых из некоторой (общей для всех) точки $x \in (M^2 \setminus \Lambda)$.*

Число r_b называется степенью связки.

На рис. 3 (a), (b), (c) изображены связки степени 1, 2, 3, соответственно.

Для аттрактора Λ обозначим через $m_{_\Lambda}$ число его связок и через $r_{_\Lambda}$ сумму степеней этих связок. Пусть $\widetilde{m}_{_\Lambda}$ — число связок степеней меньше трех и $\widetilde{r}_{_\Lambda}$ — сумма степеней этих связок.

Предложение 4.10. *(Теорема о каноническом носителе) Для любого одномерного аттрактора Λ диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ существуют компактная ориентируемая поверхность N_Λ (канонический носитель) и диффеоморфизм $f_\Lambda : N_\Lambda \to N_\Lambda$ такие, что:*

1. *поверхность N_Λ содержит захватывающую окрестность U_Λ (см. рисунок 4) аттрактора Λ такую, что каждая компонента связности множества $L_\Lambda = cl(U_\Lambda \setminus f(U_\Lambda))$ является двумерным кольцом;*

[2]Пусть $G \subset M$ — открытое множество с границей ∂G ($\partial G = cl(G) \setminus int(G)$). Подмножество $\delta G \subset \partial G$ называется *достижимой изнутри границей* области G, если для любой точки $x \in \delta G$ найдется открытая дуга, полностью лежащая в G и такая, что x является одной из ее концевых точек.

2. *поверхность N_Λ имеет род $q_{_\Lambda} = 1 + \frac{r_{_\Lambda}}{4} - \frac{m_{_\Lambda}}{2}$, $\widetilde{m}_{_\Lambda}$ компонент края и отрицательную эйлерову характеристику;*

3. *$f_\Lambda|_{U_\Lambda} = f|_{U_\Lambda}$ и $NW(f_\Lambda) \cap (N_\Lambda \setminus \Lambda)$ состоит из гиперболических периодических точек: $(m_{_\Lambda} - \widetilde{m}_{_\Lambda})$ источников, принадлежащих внутренности поверхности N_Λ; $\widetilde{r}_{_\Lambda}$ седел и $\widetilde{r}_{_\Lambda}$ источников, принадлежащих краю поверхности N_Λ*[3].

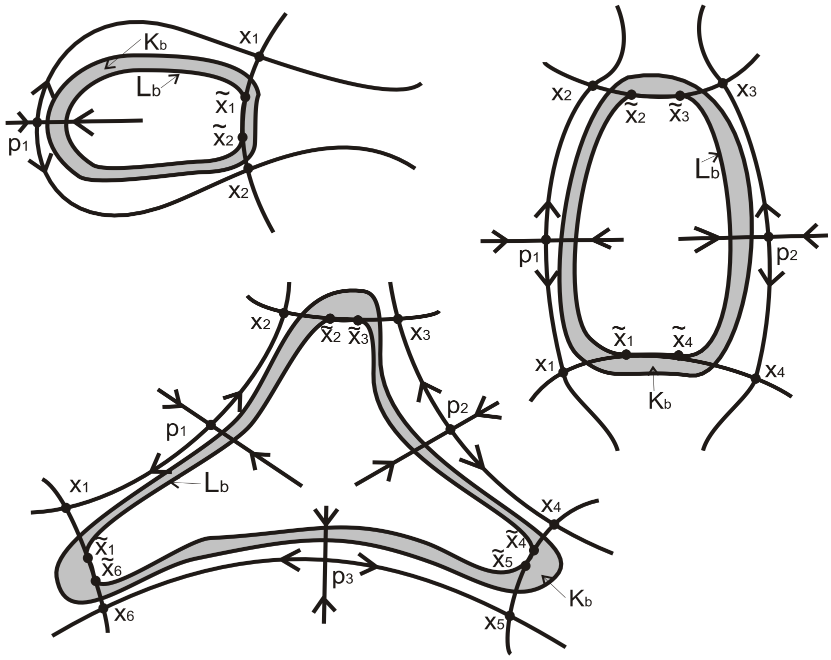

Рис. 4: Построение поверхности U_Λ

4.2 Построение энергетической функции

В настоящем разделе рассматривается множество $S(M^2)$, состоящее из Ω-устойчивых 2-диффеоморфизмов $f : M^2 \to M^2$, каждое нетривиальное базисное множество которого является одномерным. Основным результатом настоящего раздела является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2 ([45]*, Теорема 1)**.** *Для любого диффеоморфизма $f \in S(M^2)$ существует гладкая энергетическая функция, являющаяся функцией Морса вне нетривиальных базисных множеств.*

Доказательство: В силу предложения 4.4 все нетривиальные базисные множества диффеоморфизма $f \in S(M^2)$ являются либо аттракторами, либо репеллерами. Обозначим через $A_1, \dots, A_{k_A}$ ($R_1, \dots, R_{k_R}$) нетривиальные одномерные аттракторы

[3]Под седловой (источниковой, стоковой) точкой на крае многообразия понимается точка $x \in \partial N_\Lambda$, у которой существует карта $\psi : U \to \mathbb{R}^2_+$, такая, что ψ сопрягает диффеоморфизм $f_\Lambda^{per(x)}|_U$ с ограничением диффеоморфизма $g(x, y) = (\frac{1}{2}x, 2y)$ $(a(x, y) = (2x, 2y)$, $a^{-1}(x, y) = (2x, 2y))$ на $\mathbb{R}^2_+$.

(репеллеры) диффеоморфизма f. Пусть $U_{A_1},\dots,U_{A_{k_A}}$ $(U_{R_1},\dots,U_{R_{k_R}})$ захватывающие окрестности аттракторов (репеллеров), построенные в предложении 4.10 с помощью колец $K_{A_1},\dots,K_{A_{k_A}}$ $(K_{R_1},\dots,K_{R_{k_R}})$. Положим $A=A_1\cup\dots\cup A_{k_A}$, $R=R_1\cup\dots\cup R_{k_R}$, $U_A=U_{A_1}\cup\dots\cup U_{A_{k_A}}$, $U_R=U_{R_1}\cup\dots\cup U_{R_{k_R}}$, $K_A=K_{A_1}\cup\dots\cup K_{A_{k_A}}$, $K_R=K_{R_1}\cup\dots\cup K_{R_{k_R}}$ и $U=U_A\cup U_R$. Обозначим через D дизъюнктное объединение 2-дисков в числе, равном числу компонент связности множества ∂U. Положим $\check{M}=M^2\setminus U$ и $N=\check{M}\cup_q D$, где $q:\partial U\to\partial D$ — диффеоморфизм. Обозначим через $\pi:\check{M}\cup D\to N$ естественную проекцию.

По построению N — гладкая поверхность без края, допускающая Ω-устойчивый диффеоморфизм с конечным гиперболическим неблуждающим множеством $f_N:N\to N$, совпадающий с диффеоморфизмом $\pi f\pi^{-1}$ на множестве $\pi(\check{M})$ и имеющий по одной периодической точке (стоковой или источниковой) на каждой компоненте связности множества $\pi(D)$, обозначим через P множество этих точек. В силу предложения 1.19 для диффеоморфизма f_N существует энергетическая функция Морса $\varphi_N:N\to[0,2]$ такая, что $\varphi(\Omega^0_{f_N})=0$, $\varphi(\Omega^2_{f_N})=2$ и $\pi(\partial U_A)$, $\pi(\partial U_R)$ — множества уровня функции φ_N со значениями $\frac{1}{2},\frac{3}{2}$, соответственно. По построению диффеоморфизмы $f|_{M^2\setminus(A\cup R)}$ и $f_N|_{N\setminus P}$ гладко сопряжены посредством диффеоморфизма $h:M^2\setminus(A\cup R)\to N\setminus P$, совпадающего с π на $\check{M}$. Тогда $\varphi=\varphi_N h$ является гладкой функцией на $M^2\setminus(A\cup R)$, которая непрерывно продолжается на $A\cup R$ так, что $\varphi(A)=0$, $\varphi(R)=1$.

По построению функция $\varphi:M^2\to[0,2]$ является непрерывной функцией Ляпунова для диффеоморфизма f, которая является энергетической функцией Морса для f на $M^2\setminus(A\cup R)$. Положим $\varphi_{_A}=\varphi|_{U_A}$. По построению $\varphi_{_A}(U_A)=[0,\frac{1}{2}]$ и $\varphi_{_A}^{-1}(0)=A$. Из теоремы 1 следует, что существует функция $g_{_A}:[0,\frac{1}{2}]\to[0,\frac{1}{2}]$ такая, что функция $\psi_{_A}=g_{_A}\circ\varphi_{_A}$ является энергетической функцией на U_A для f. Положим $\varphi_{_R}=2-\varphi|_{U_R}$. По построению $\varphi_{_R}(U_R)=[0,\frac{1}{2}]$ и $\varphi_{_R}^{-1}(0)=R$. Из теоремы 1 следует, что существует функция $g_{_R}:[0,\frac{1}{2}]\to[0,\frac{1}{2}]$ такая, что функция $\psi_{_R}=g_{_R}\circ\varphi_{_R}$ является энергетической функцией на U_R для f^{-1}. Так как функции $g_{_A}$ и $g_{_R}$ являются тождественными на отрезке $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$, то функция

$$\psi(z)=\begin{cases}\varphi(z),\ \text{если}\ z\in(M^2\setminus(U_A\cup U_R));\\ \psi_{_A}(z),\ \text{если}\ z\in U_A;\\ 2-\psi_{_R}(z),\ \text{если}\ z\in U_R;\end{cases}$$

является искомой энергетической функцией на M^2 для диффеоморфизма f. $\square$

5 Отсутствие энергетической функции у поверхностного диффеоморфизма с нульмерными базисными множествами без пар сопряженных точек

В этом разделе мы докажем отсутствие энергетической функции у Ω-устойчивого диффеоморфизма поверхности, имеющего нульмерное базисное множество без пар сопряженных точек. Доказательство существенно опирается на свойства таких множеств, описанные в следующем разделе и на лемму 5.1 о линиях уровня непрерывной функции, заданной на квадрате.

5.1 Нульмерные базисные множества поверхностных диффеоморфизмов

Пусть $f : M^2 \to M^2$ — Ω-устойчивый диффеоморфизм, чьё неблуждающее множество содержит нульмерное нетривиальное базисное множество Λ. Ниже опишем свойства Λ следуя работам [51] и [15].

У любой точки $x \in \Lambda$ оба инвариантных многообразия W^s_x, W^u_x имеют размерность 1. Пусть $\sigma \in \{s, u\}$ и $\bar{\sigma} = s$, если $\sigma = u$, $\bar{\sigma} = u$, если $\sigma = s$. Для различных точек $a, b \in W^\sigma_x$, $x \in \Lambda$ обозначим через $[a, b]^\sigma$ отрезок из многообразия W^σ_x, ограниченный точками a, b, тогда $(a, b)^\sigma = [a, b]^\sigma \setminus (a \cup b)$. Две различные точки $x, y \in \Lambda$ называются *парой сопряженных точек*, если

$$x, y \in \left(W^s_x \cap W^u_y\right), \; (x, y)^s \cap \Lambda = (x, y)^u \cap \Lambda = \emptyset.$$

Для каждой точки $x \in \Lambda$ множество $W^\sigma_x \setminus x$ состоит из 2 компонент связности, причем хотя бы одна из них пересекается с множеством Λ. Точка $p \in \Lambda$ называется *σ-граничной*, если одна из компонент связности множества $W^\sigma_p \setminus p$ не пересекает Λ, будем называть эту компоненту *пустой*. Заметим, что точка может быть одновременно и s-, и u-граничной, в этом случае её называют *s, u-граничной*. Множество Γ_Λ граничных точек конечно и, следовательно, состоит из периодических точек. Если $p \in \Gamma_\Lambda$ и непустая компонента связности ℓ^σ_p множества $W^\sigma_p \setminus p$ f-инвариантна, то

$$cl(\ell^\sigma_p \cap \Lambda) = \Lambda. \tag{1}$$

Гирлянда b длины r_b — это последовательность точек $p_1, \dots, p_{r_b}$, $r_b \geq 2$ из множества Γ_Λ, для которых существует последовательность точек $x_1, \dots, x_{2r_b} \in (\Lambda \setminus \Gamma_\Lambda)$ со следующими свойствами:

1. точки x_{2i-1}, x_{2i} принадлежат различным сепаратрисам одно и того же седла p_i так, что: обе сепаратрисы устойчивые, если p_i — u-граничная точка; обе сепара-

трисы неустойчивые, если p_i — s-граничная точка; сепаратрисы имеют разную устойчивость, если p_i — s, u-граничная точка;

2. если $x_{2i} \in W^{\sigma}_{p_i}$, то $x_{2i+1} \in W^{\bar{\sigma}}_{x_{2i}}$ $(x_{2r_b+1} = x_1)$;

3. множество $L_b = \bigcup\limits_{i=1}^{r_b} L_{x_{2i},x_{2i+1}}$ — простая замкнутая кривая, где $L_{x_{2i},x_{2i+1}} = [p_i, x_{2i}]^{\sigma} \cup [x_{2i}, x_{2i+1}]^{\bar{\sigma}} \cup [x_{2i+1}, p_{i+1}]^{\sigma}$ для $x_{2i} \in W^{\sigma}_{p_i}$ $(p_{r_b+1} = p_1)$ (см. рисунок 5).

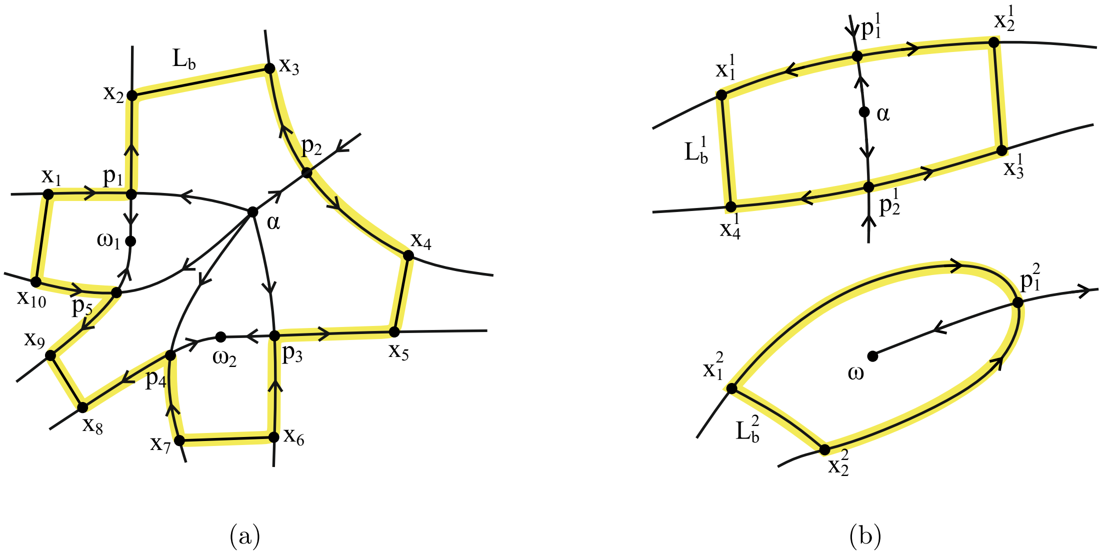

Рис. 5: Связывающие кривые

При этом кривая L_b называется *связывающей кривой гирлянды* b.

Предложение 5.1. *([51]) Пусть $f : M^2 \to M^2$ — Ω-устойчивый диффеоморфизм и Λ — его нульмерное нетривиальное базисное множество без пар сопряженных точек. Тогда множество Γ_Λ единственным образом распадается на гирлянды. Причем для каждой гирлянды $b : p_1, \ldots, p_{r_b}$ существует связывающая кривая, проходящая через произвольную точку $x_{2i} \in (W^{\sigma}_{p_i} \cap \Lambda)$ и несовпадающие дуги $L_{x_{2i},x_{2i+1}}$, $L_{x'_{2i},x'_{2i+1}}$ разных связывающих кривых ограничивают открытые двумерные диски, состоящие из блуждающих точек диффеоморфизма f (см. рисунок 6).*

5.2 Свойства непрерывной функции, заданной на квадрате

В этом разделе мы установим следующее свойство непрерывной функции, заданной на квадрате, которое используется в дальнейшем при доказательстве отсутствия энергетической функции у поверхностного диффеоморфизма с нульмерным базисным множеством без пар сопряженных точек.

Лемма 5.1 ([1]*, Lemma 1)**.** *Пусть Δ — замкнутый прямоугольник с вершинами $KLMN$ и $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция со следующими свойствами:*

- *$\varphi(K) = \varphi(L) = \varphi(M) = \varphi(N) = 0$;*

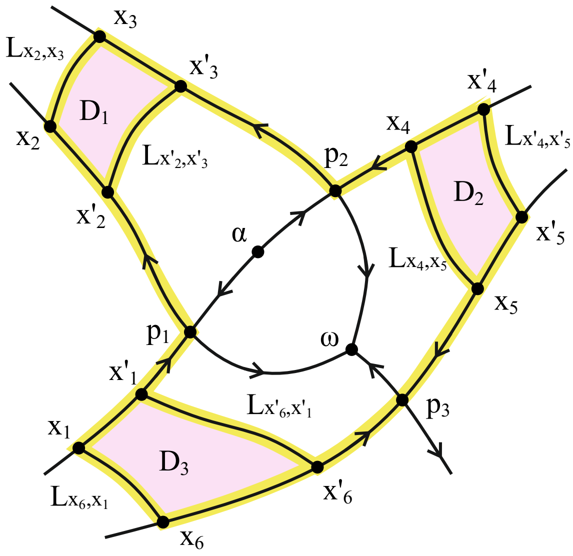

Рис. 6: Open discs bounded by different connecting curves

- $\varphi(x) < 0$ *для всех* $x \in int(KL \cup MN)$, $\varphi(x) > 0$ *для всех* $x \in int(LM \cup NK)$*;*
- φ *не имеет критических точек в* $int\,\Delta$*.*

Тогда $\varphi^{-1}(0) \cap int\,\Delta \neq \emptyset$ *и каждая компонента связности множества* $\varphi^{-1}(0) \cap int\,\Delta$ *является кривой, замыкание которой отделяет* KL *от* MN *и/или* LM *от* NK *(см. рисунок 7 (a), (b), (c)).*

Доказательство. Для начала заметим, что $\varphi^{-1}(0) \cap int\,\Delta \neq \emptyset$, так как φ имеет значения, различные по знаку на границе Δ. Пусть l — одна из компонент связности множества $\varphi^{-1}(0) \cap int\,\Delta$. Так как φ не имеет критических точек в $int\,\Delta$, то l — одномерное подмногообразие без границы, и следовательно l гомеоморфно либо $\mathbb{S}^1$, либо $\mathbb{R}$. В первом случае l ограничивает двумерный диск в $int\,\Delta$, который обязательно будет содержать критические точки функции φ, что противоречит условиям леммы. Таким образом, l — замкнутое подмножество в $int\,\Delta$, гомеоморфное $\mathbb{R}$.

По теореме Жордана (see, for example, [25]) $int\,\Delta \setminus l$ — объединение двух непересекающихся двумерных дисков D_1 и D_2, и l является границей каждого диска в $int\,\Delta$. Так как $\partial\Delta = KLMN$, то граница D_i, $i = 1, 2$ состоит из l и части кривой $KLMN$. φ — непрерывная функция, равная нулю на l и принимающая ненулевые значения на каждом из интервалов KL, LM, MN, NM, следовательно, каждый из этих интервалов полностью содержится либо в множестве ∂D_1, либо в ∂D_2. Если каждое из множеств ∂D_1 и ∂D_2 содержит хотя бы один интервал (см. рисунок 7 (a), (b), (c)), то лемма доказана. В противном случае φ принимает нулевое значение на $cl(l)$ и $cl(l)$ ограничивает двумерный диск в $int\,\Delta$ (см. рисунок 7 (d)), который обязательно содержит критическую точку функции φ, что противоречит условиям леммы. □

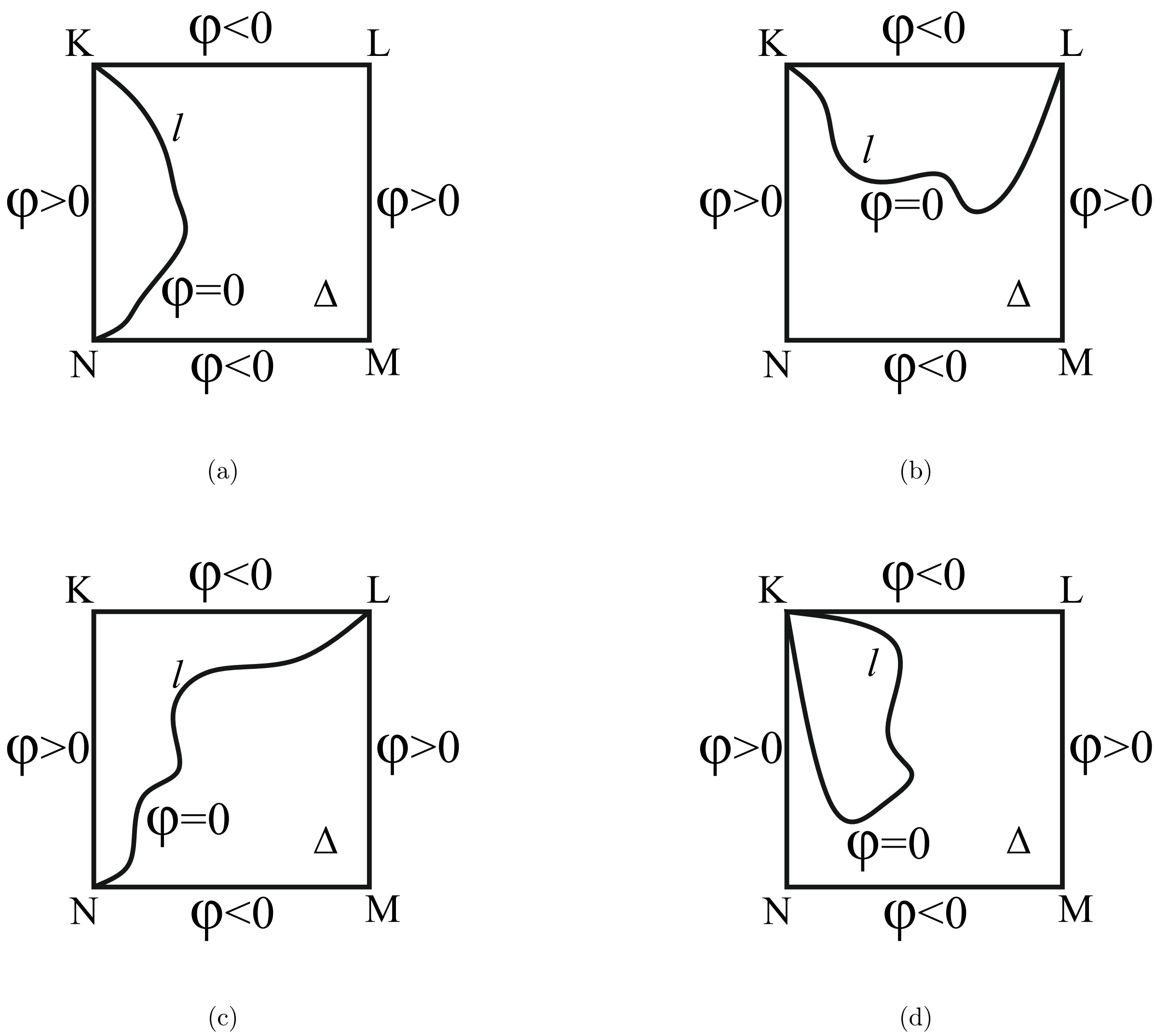

Рис. 7: Возможные варианты расположения кривой l

5.3 Отсутствие энергетической функции

Основным результатом данного раздела является доказательство следующего факта.

Теорема 3 ([1]*, Theorem 1)**.** *Каждый Ω-устойчивый диффеоморфизм $f : M^2 \to M^2$, заданный на замкнутой поверхности M^2, неблуждающее множество которого содержит нульмерное нетривиальное базисное множество без пар сопряженных точек, не обладает энергетической функцией.*

Доказательство. Пусть $f : M^2 \to M^2$ — Ω-устойчивый диффеоморфизм и Λ — его нульмерное нетривиальное базиское множество без пар сопряженных точек. Докажем теорему методом от противного. Пусть f обладает энергетической функцией $\varphi : M^2 \to \mathbb{R}$. Тогда φ — энергетическая функция и для f^k, для всех $k \in \mathbb{N}$ и не уменьшая общности будем считать, что все граничные точки из множества Γ_Λ и их сепаратрисы неподвижные. Более того, пусть $\varphi(x) = 0$ для всех точек $x \in \Lambda$.

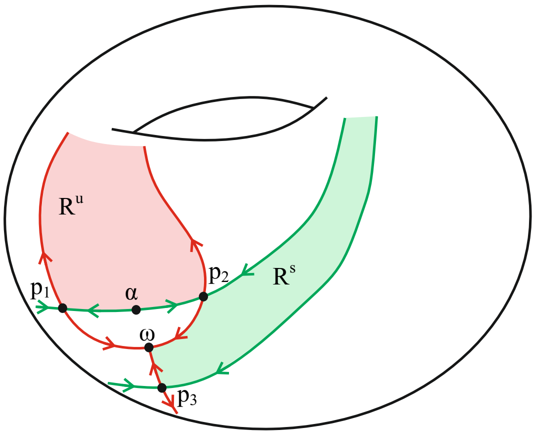

Рис. 8: Полосы R^s и R^u

Для каждой гирлянды b базисного множества Λ рассмотрим связывающую кривую L_b. По утверждению 5.1 кривые L_b и $f(L_b)$ ограничивают множество, состоящее из r_b открытых двумерных дисков, причем диски содержат только блуждающие точки диффеоморфизма f. Обозначим через D_b замыкание этого множества. Тогда $R_b = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} f^n(D_b)$ состоит из r_b полос. Так как Λ — нульмерное, то среди всех таких полос для всех гирлянд найдется полоса R^s, граница которой содержит две устойчивые сепаратрисы ℓ_1^s, ℓ_2^s некоторых u или s,u-граничных точек, и полоса R^u, граница которой содержит две неустойчивые сепаратрисы ℓ_1^u, ℓ_2^u некоторых s- или s,u-граничных точек (см. рисунок 8). Из уравнения (1) и гиперболичности базисного множества Λ следует, что $R^s \cap R^u \neq \emptyset$, и по утверждению 5.1 каждая компонетна связности этого пересечения — прямоугольник, ограниченный отрезками сепаратрис ℓ_1^u, ℓ_1^s, ℓ_2^u, ℓ_2^s. Пусть Δ — один из них, ограниченный отрезками KL, LM, MN, NK сепаратрис ℓ_1^u, ℓ_1^s, ℓ_2^u, ℓ_2^s соответственно (см. рисунок 9)

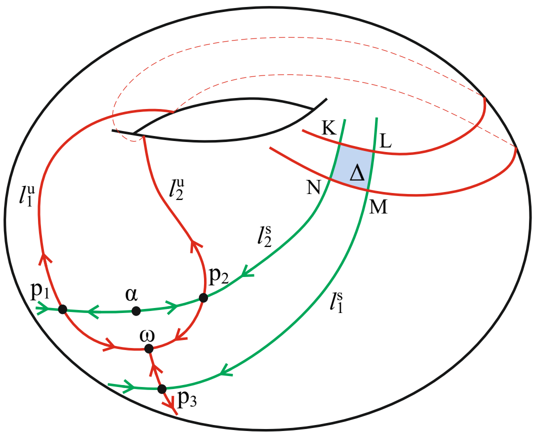

Рис. 9: Диск, ограниченный сепаратрисами

По определению энергетической функции и устойчивого и неустойчивого многообразий функция $\varphi|_\Delta$ удовлетворяет всем условиям леммы 5.1. Следовательно существует такая кривая l_0, что $\varphi(x) = 0$ для всех $x \in l_0$, причем замыкание этой кривой отделяет либо KL от MN, либо LM от NK. Таким же свойством обладает каждый прямоугольник $\Delta_n = f^n(\Delta)$, $n \in \mathbb{Z}$, то есть существует кривая l_n, $\varphi(x) = 0$ для всех $x \in l_n$, замыкание которой отделяет либо $f^n(KL)$ от $f^n(MN)$, либо $f^n(LM)$ от $f^n(NK)$. Таким образом, всегда найдутся две кривые l_{n_1}, l_{n_2}, $n_1 \neq n_2$ такие, что одна компонента связности либо множества $R^s \setminus cl(l_{n_1} \cup l_{n_2})$, либо множества $R^u \setminus cl(l_{n_1} \cup l_{n_2})$ — это двумерный диск.

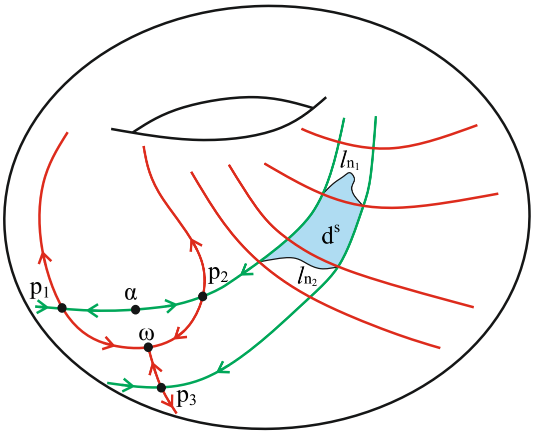

Рис. 10: Диск d^s

Для определенности будем считать, что найдется диск d^s как компонента связности множества $R^s \setminus cl(l_{n_1} \cup l_{n_2})$ (см. рисунок 10). Тогда $\varphi(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \partial d^s$. С другой стороны, по построению $int(d^s) \cap (\ell_1^u \cup \ell_2^u) \neq \emptyset$ и, следовательно, множество $int(d^s)$ содержит точку минимума функции $\varphi|_{cl(d^s)}$. Но это противоречит тому, что φ не имеет критических точек на множестве $int(R^s)$, так как по утверждению 5.1 $int(R^s)$ состоит из блуждающих точек диффеоморфизма f. $\square$

6 Реализация диаграмм Смейла Ω-устойчивыми диффеоморфизмами поверхностей

В настоящем разделе дается частичный ответ на вопрос С. Смейла о том, какие диаграммы могут соотвествовать Ω-устойчивым диффеоморфизмам. С помощью хирургической операции Смейла мы конструируем модельные диффеоморфизмы двумерного тора и приводим необходимые и достаточные условия их топологической сопряженности. Вводим класс $\mathcal{H}$ Ω-устойчивых диффеоморфизмов поверхности, являющихся связной суммой модельных диффеоморфизмов. Приводим необходимые и достаточные условия топологической сопряженности модельных диффеоморфизмов. Диффеоморфизмы класса $\mathcal{H}$ реализуют любые связные диаграммы Хассе. Мы строим примеры диффеоморфизмов этого класса с изоморфными размеченными диаграммами Смейла, не являющихся объемлюще Ω-сопряженными. Выделяем подмножество $\mathcal{H}_* \subset \mathcal{H}$ диффеоморфизмов, для которых класс изоморфности размеченной диаграммы Смейла является полным инвариантом объемлющей Ω-сопряженности.

6.1 Диаграмма Смейла – связная диаграмма Хассе

В этом разделе мы вводим понятие диаграммы Смейла и доказываем, что любая диаграмма Смейла Ω-устойчивого диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ является связной диаграммой Хассе. Для этого на множестве базисных множеств любого Ω-устойчивого диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ можно ввести отношение $\prec$ С. Смейла [30], аналогичный порядку на множестве орбит из раздела 1.3.2. Именно, пусть Λ_i, Λ_j — базисные множества (A, B)-диффеоморфизма f. Говорят, что Λ_i, Λ_j *находятся в отношении* $\prec$ ($\Lambda_i \prec \Lambda_j$), если $W^s_{\Lambda_i} \cap W^u_{\Lambda_j} \neq \emptyset$. В силу [30] отношение $\prec$ для Ω-устойчивых диффеоморфизмов является отношением частичного порядка. Последовательность, состоящая из попарно различных базисных множеств $\Lambda_i = \Lambda_{i_0}, \Lambda_{i_1}, ..., \Lambda_{i_m} = \Lambda_j$ ($m \geqslant 1$), такая что $\Lambda_{i_0} \prec \Lambda_{i_1} \prec \ldots \prec \Lambda_{i_m}$ называется *цепью длины* $m \in \mathbb{N}$*, соединяющей базисные множества* Λ_i *и* Λ_j. Такая цепь называется *максимальной*, если в нее нельзя добавить ни одного нового базисного множества.

Диаграммой Смейла Δ_f Ω-устойчивого диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ называется граф, вершины которого соответствуют базисным множествам, а ориентированные ребра последовательно соединяют вершины максимальных цепей. В действительности диаграмма Смейла является частным случаем диаграмм Хассе.

Диаграммой Хассе частично упорядоченного множества $(X, \prec)$ называется граф, вершинами которого являются элементы множества X, а пара (x, y) образует ребро, если $x \prec y$ и $\nexists z : \ x \prec z, \ z \prec y$. Впервые такого рода визуализация была описана систематически Биркгофом [4] в 1940 году, им же дано название в честь использовавшего подобные диаграммы Хельмута Хассе, однако подобные рисунки встречаются и в более ранних трудах, например, в учебнике французского математика Анри Фохта (нем. Henri Vogt) [32] 1895 года издания.

Лемма 6.1. *Диаграмма Смейла любого Ω-устойчивого диффеоморфизма является связной диаграммой Хассе.*

Доказательство. Пусть f — (A, B)-диффеоморфизм, заданный на связном замкнутом многообразии M^n, и $NW(f)$ — его неблуждающее множество. Пусть $\prec$ — отношение частичного порядка Смейла, заданное на множестве $NW(f)$. Предположим противное: пусть диаграмма Хассе $(NW(f), \prec) = \Gamma$ не связна, тогда существует связная компонента Γ_i, отличная от Γ. Пусть $L_i = \{\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_m}\}$ — базисные множества, соответствующие вершинам компоненты Γ_i. Так как Γ_i — связная компонента графа Γ, то $\bigcup\limits_{j=1}^{m} W^s_{\Lambda_{i_j}} = \bigcup\limits_{j=1}^{m} W^u_{\Lambda_{i_j}}$. Пусть $M^n_i = \bigcup\limits_{j=1}^{m} W^s_{\Lambda_{i_j}} = \bigcup\limits_{j=1}^{m} W^u_{\Lambda_{i_j}}$. Покажем, что M^n_i — открытое подмножество многообразия M^n.

Для этого необходимо доказать, что для каждая точка $x \in M^n_i$ имеет открытую окрестность $U_x \subset M^n$ такую, что каждая точка $y \in U_x$ принадлежит пересечению $W^s_{\Lambda_{i_{m_1}}}$ и $W^u_{\Lambda_{i_{m_2}}}$ для некоторых номеров $m_1(y)$, $m_2(y) \in \{1, \dots, m\}$. Действительно, если предположить противное, то существует базисное множество Λ_*, которое не принадлежит множеству L_i и замыкание инвариантных многообразий которого содержит инвариантное многообразие некоторого базисного множества из L_i. Согласно аксиоме (A, B), Λ_* связано отношением порядка $\prec$ с некоторым базисным множеством из L_i и, следовательно, принадлежит L_i, что противоречит предположению.

Аналогичным способом доказывается, что дополнение к M^n_i в M^n также открыто. Следовательно, многообразие M^n_i открыто и замкнуто одновременно, а значит совпадает с объемлющим многообразием M^n. Следовательно, связная компонента Γ_i совпадает с Γ, что противоречит предположению. $\square$

6.2 Модельные диффеоморфизмы на торе

В работе [30], в качестве проблемы (Проблема 6.6a) сформулирован следующий вопрос: какие диаграммы могут соотвествовать Ω-устойчивым диффеоморфизмам? В настоящем разделе с помощью хирургической операции Смейла мы конструируем модельные диффеоморфизмы двумерного тора, взятием связной суммы которых реализуется любая связная диаграмма Хассе.

6.2.1 Описание конструкции

Пусть $C \in SL(2, \mathbb{Z})$ – гиперболическая матрица с собственными значениями $\lambda_1 = \lambda > 1$ и $\lambda_2 = 1/\lambda$. Матрица C имеет определитель, равный 1, а значит она индуцирует гиперболический автоморфизм $\widehat{C} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ с неподвижной точкой O. Этот диффеоморфизм является диффеоморфизмом Аносова и обладает двумя трансверсальными инвариантными слоениями (устойчивым и неустойчивым), любой слой каждого из которых всюду плотен на торе. Кроме того, множество периодических точек диффеоморфизма $\widehat{C}$ также плотно на $\mathbb{T}^2$.

В 1967 году С. Смейл [30] предложил так называемую “хирургическую операцию”, с помощью которой из диффеоморфизма Аносова на двумерном торе удается получить диффеоморфизм с одномерным аттрактором и неподвижной источниковой точкой. Идея состоит в раздувании некоторой окрестности неподвижной точки, при этом область вне этой окрестности не меняется.

Пусть (x, y) – локальные координаты в некоторой окрестности $U(O)$ точки $O \in \mathbb{T}^2$ такие, что $\widehat{C}(x, y) = (x/\lambda, \lambda y)$. Тогда $Ox \subset W^s_O$, $Oy \subset W^u_O$ и $\{y = const\}$ и $\{x = const\}$ являются устойчивым и неустойчивым слоениями. Пусть $\mu : \mathbb{R} \to [0, 1]$ — C^∞-функция, заданная формулой

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant \lambda^{-3}, \\ \widetilde{\mu}(x), & \lambda^{-3} < x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

где $\widetilde{\mu}(x) : (\lambda^{-3}, 1) \to (0, 1)$ строго монотонно возрастает (см. рисунок 11 a)).

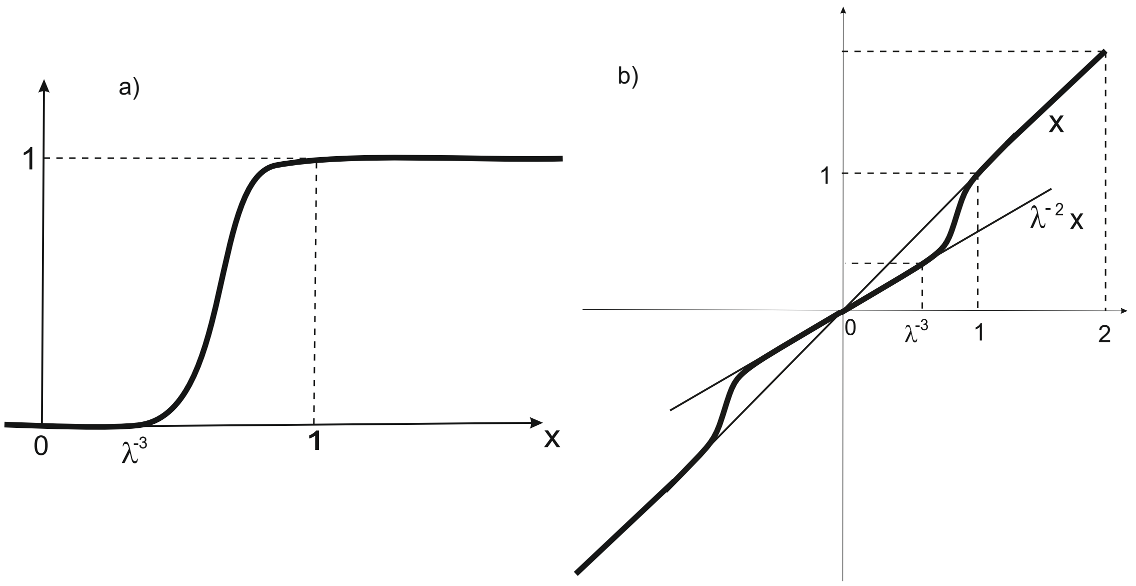

Рис. 11: a) График функции $\mu(x)$; b) График функции $\nu(x)$

Определим функцию $\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулой $\nu(x) = \lambda^{-2(1-\mu(|x|))}x$ (см. Рис. 11 b)). Положим $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 4\}$. Определим диффеоморфизм $B_{C,O^s} : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ формулой

$$B_{C,O^s}(x, y) = (\nu^{-1}(x), y).$$

По построению, $B_{C,O^s}(x, y) = (\lambda^2 x, y)$, если $x^2 + y^2 \leqslant \lambda^{-6}$, и является тождественным на $\partial\mathbb{D}^2$.

Определим диффеоморфизм $\widehat{B}_{C,O^s} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, совпадающий с диффеоморфизмом B_{C,O^s} внутри окрестности $U(0)$ и тождественный вне этой окрестности. Тогда согласно [33], диффеоморфизм $F_{C,O^s} = \widehat{B}_{C,O^s} \circ \widehat{C}$ является DA-диффеоморфизмом, неблуждающее множество которого состоит из одномерного аттрактора Λ_{C,O^s}, обладающего единственной связкой степени 2 с двумя различными граничными неподвижными p_{O^s} и q_{O^s}, и источниковой неподвижной точкой α_{O^s} (см. Рис. 12).

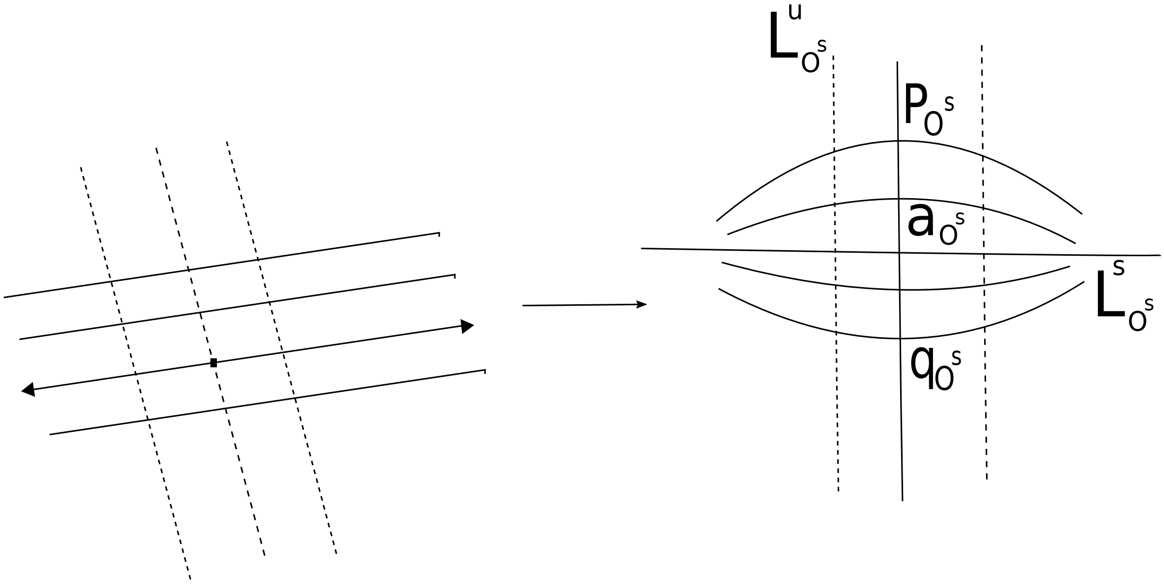

Рис. 12: DA-diffeomorphism F_{C,O^s}

Описанная конструкция называется *хирургической операцией Смейла* вдоль устойчивого многообразия неподвижной точки. Поскольку в окрестности источниковой точки в локальных координатах x, y диффеоморфизм F_{C,O^s} является линейным растяжением, то в бассейне $W^u_{\alpha_{O^s}}$ существует пара трансверсальных F_{C,O^s}-инвариантных слоений, имеющих вид $\{y = const\}$ и $\{x = const\}$ в локальных координатах x, y. Таким образом, диффеоморфизм F_{C,O^s} обладает парой трансверсальных инвариантных слоений L^s_{C,O^s}, L^u_{C,O^s}, содержащих, как слои, компоненты связности многообразий $W^s_{\Lambda_{C,O^s}}$, $W^u_{\Lambda_{C,O^s}}$, соответственно (см. Рис. 12).

Описанная хирургическая операция аналогичным образом делается в окрестности любой периодической точки диффеоморфизма Аносова $\widehat{C}$. Также она естественно обобщается на хирургическую операцию вдоль неустойчивого многообразия периодической точки.

Назовем *модельным диффеоморфизмом тора*, диффеоморфизм $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, полученный из алгебраического диффеоморфизма Аносова $\widehat{C}$ хирургической операцией Смейла вдоль инвариантных многообразий конечного (возможно пустого) множества попарно не пересекающихся периодических орбит: вдоль устойчивых многообразий орбит $\mathcal{O}^s = \{O^s_1, \dots, O^s_k\}$ периодов $m_1, \dots, m_k$, соответственно, (*s-орбиты*) и вдоль неустойчивых многообразий периодических орбит $\mathcal{O}^u = \{O^u_1, \dots, O^u_l\}$ периодов $n_1, \dots, n_l$, соответственно, (*u-орбиты*).

По построению неблуждающее множество $NW(F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u})$ содержит единственное нетривиальное базисное множество $\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ и диффеоморфизм $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ обладает парой трансверсальных инвариантных слоений $L^s_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $L^u_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, содержащих, как слои, компоненты связности многообразий $W^s_{\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}}$, $W^u_{\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}}$, соответственно. $\alpha_{\mathcal{O}^s}=\{\alpha_{\mathcal{O}^s_1},\dots,\alpha_{\mathcal{O}^s_k}\}$ — множество источниковых периодических орбит и $\omega_{\mathcal{O}^u}=\{\omega_{\mathcal{O}^u_1},\dots,\omega_{\mathcal{O}^u_l}\}$ — множество стоковых периодических орбит диффеоморфизма $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$. Множества $p_{\mathcal{O}^s}=\{p_{\mathcal{O}^s_1},\dots,p_{\mathcal{O}^s_k}\}$, $q_{\mathcal{O}^s}=\{q_{\mathcal{O}^s_1},\dots,q_{\mathcal{O}^s_k}\}$, $p_{\mathcal{O}^u}=\{p_{\mathcal{O}^u_1},\dots,p_{\mathcal{O}^u_l}\}$, $q_{\mathcal{O}^u}=\{q_{\mathcal{O}^u_1},\dots,q_{\mathcal{O}^u_l}\}$ состоят из граничных периодических точек, так что для всех $i\in\{1,\dots,k\}$ существуют устойчивые сепаратрисы $l^{\emptyset}_{p_{\mathcal{O}^s_i}}$ и $l^{\emptyset}_{q_{\mathcal{O}^s_i}}$ орбит $p_{\mathcal{O}^s_j}$ и $q_{\mathcal{O}^s_j}$, принадлежащие бассейну одной и той же источниковой периодической орбиты $\alpha_{\mathcal{O}^s_i}$ и для всех $j\in\{1,\dots,l\}$ существуют неустойчивые сепаратрисы $l^{\emptyset}_{p_{\mathcal{O}^u_j}}$ и $l^{\emptyset}_{q_{\mathcal{O}^u_j}}$ орбит $p_{\mathcal{O}^u_j}$ и $q_{\mathcal{O}^u_j}$, принадлежащие бассейну одной и той же стовой периодической орбиты $\omega_{\mathcal{O}^u_j}$.

При этом, базисное множество $\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ имеет одну из следующих возможных структур:

- имеет топологическую размерность два и является аттрактором и репеллером одновременно, если $\mathcal{O}^s=\mathcal{O}^u=\emptyset$;

- имеет топологическую размерность один (см. Рис. 13) и является аттрактором (репеллером), если $\mathcal{O}^s\neq\emptyset,\mathcal{O}^u=\emptyset$ ($\mathcal{O}^s=\emptyset,\mathcal{O}^u\neq\emptyset$);

- имеет топологическую размерность ноль (см. Рис. 14) и является седловым базисным множеством, если $\mathcal{O}^s\neq\emptyset$ и $\mathcal{O}^u\neq\emptyset$.

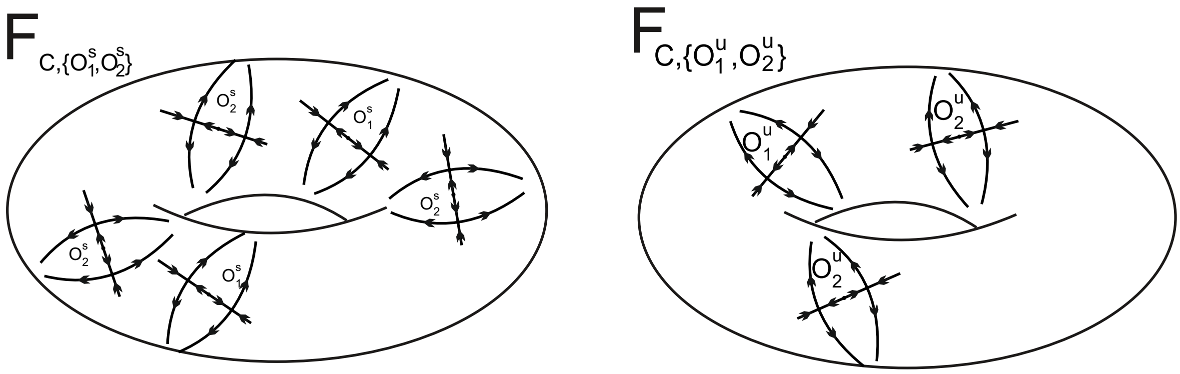

Рис. 13: Диффеоморфизм $F_{C,\{O^s_1,O^s_2\}}$ с s-орбитами с периодами 2, 3 и аттрактором $\Lambda_{C,\{O^s_1,O^s_2\}}$; диффеоморфизм $F_{C,\{O^u_1,O^u_2\}}$ с u-орбитами с периодами 1, 2 и репеллером $\Lambda_{C,\{O^u_1,O^u_2\}}$

6.2.2 Топологическая сопряженность модельных диффеоморфизмов тора

В настоящем разделе мы докажем необходимые и достаточные условия топологической сопряженности модельных диффеоморфизмов тора (лемма 6.6). Вначале заметим, что необходимые и достаточные условия для модельных диффеоморфизмов Аносова следуют из работ [27, 8, 20]. Для случая, когда в точности одно из множеств $\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u$ пусто, лемма 6.6 следует из [8].

В силу вышеизложенного, везде ниже будем предполагать, что оба множества $\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u$ непустые и, следовательно, $\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ — нульмерное базисное множество. Прежде всего, приведем необходимую информацию и докажем вспомогательные леммы, используя методы из статьи [42] и книги [15].

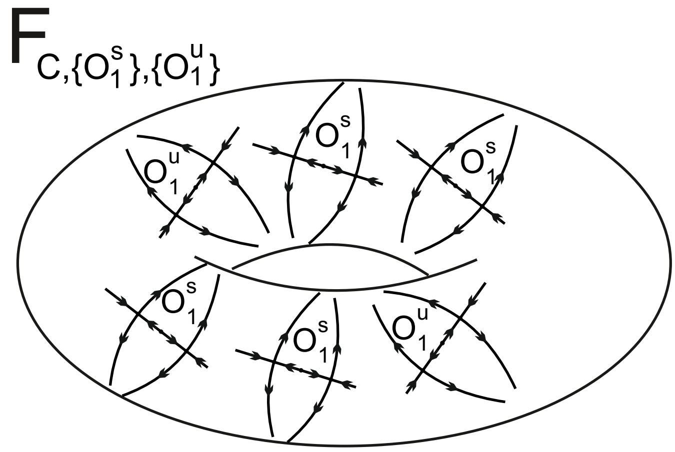

Рис. 14: Диффеоморфизм $F_{C,\{O_1^s\},\{O_1^u\}}$ с s-орбитой периода 4, u-орбитой периода 2 а седловым базисным множеством $\Lambda_{C,\{O_1^s\},\{O_1^u\}}$

Каждый модельный диффеоморфизм $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ соответствует гиперболической матрице C и по построению этот диффеоморфизм имеет форму $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u} = \widehat{B}_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u} \circ \widehat{C}$, где диффеоморфизм $\widehat{B}_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ изотопен тождественному. Следовательно, диффеоморфизм $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ изотопен диффеоморфизму $\widehat{C}$.

Предложение 6.1 ([15] Lemma 9.8). *Пусть $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такой диффеоморфизм, что индуцированный изоморфизм $f_* : \pi_1(\mathbb{T}^2) \to \pi_1(\mathbb{T}^2)$ — гиперболический и пусть C — матрица, определяющая изоморфизм f_*. Тогда существует единственное непрерывное отображение h тора $\mathbb{T}^2$ на себя, гомотопное тождественному и полусопрягающее диффеоморфизм f с алгебраическим автоморфизмом $\widehat{C}$.*

Пусть $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ — универсальное накрытие, $\pi^{-1}(\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}) = \bar{\Lambda}_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$. Для $x \in \mathbb{T}^2$ обозначим через $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ точку из прообраза $\pi^{-1}(x)$. Обозначим через $w^\delta_{\bar{x}}$, $\delta \in \{s, u\}$, дугу на плоскости $\mathbb{R}^2$, содержащую $\bar{x}$, такую, что $\pi(w^\delta_{\bar{x}}) = W^\delta_x$, $x \in \Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$. Для точек $\bar{y}, \bar{z} \in w^\delta_{\bar{x}}$ ($\bar{y} \neq \bar{z}$) пусть $[\bar{y}, \bar{z}]^\delta$, $[\bar{y}; \bar{z})^\delta$, $(\bar{y}; \bar{z}]^\delta$, $(\bar{y}; \bar{z})^\delta$ — связные дуги на многообразии $w^\delta_{\bar{x}}$ с граничными точками $\bar{y}$, $\bar{z}$.

Из предложения 6.1 следует, что существует единственное непрерывное отображение $h : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, гомотопное тождественному и такое, что $hF_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u} = \widehat{C}h$. Пусть $\bar{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — поднятие отображения h. Для всех $x \in \mathbb{T}^2$ пусть $\widehat{W}^s_x$ ($\widehat{W}^u_x$) — устойчивое (неустойчивое) многообразие точки x по отношению к автоморфизму $\widehat{C}$ и пусть $\widehat{w}^\delta_{\bar{x}}$ — связная компонента прообраза многообразия $\widehat{W}^\delta_x$ автоморфизма $\widehat{C}$, проходящая через точку $\bar{x}$.

Лемма 6.2. *Пусть $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Lambda}_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $w^s_{\bar{x}} = w^s_{\bar{y}}$ ($w^u_{\bar{x}} = w^u_{\bar{y}}$) и $(\bar{x}, \bar{y})^s \cap \bar{\Lambda}_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u} \neq \emptyset$ ($(\bar{x}, \bar{y})^u \cap \bar{\Lambda}_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u} \neq \emptyset$). Тогда $\bar{h}(\bar{x}) \neq \bar{h}(\bar{y})$.*

Доказательство. Будем преполагать случай $w^s_{\bar{x}} = w^s_{\bar{y}}$ (случай, когда $w^u_{\bar{x}} = w^u_{\bar{y}}$, аналогичен). По [15][Lemma 9.10] существует $r > 0$ такое, что $d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < r$ для любых двух точек $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \bar{\Lambda}_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, для которых $\bar{h}(\bar{x}_1) = \bar{h}(\bar{x}_2)$, где d — евклидова метрина на $\mathbb{R}^2$. Пусть $p \in \Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ — s-плотная периодическая точка и пусть m — натуральное число, для которого $F^m_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}(p) = p$. Тогда существуют точки $x_*, y_* \in (x,y)^s$ такие, что $x_*, y_* \in W^{u+}_p$, где W^{u+}_p — одна из компонент связности множества $W^u_p \setminus p$. Пусть $\bar{p} \in \bar{\Lambda}_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ — точка из множества $\pi^{-1}(p)$ и пусть ϕ, $\phi_{\widehat{C}}$ — поднятия диффеоморфизмов $F^m_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $\widehat{C}^m$ такие, что $\phi(\bar{p}) = \bar{p}$, $\bar{h}\phi = \phi_{\widehat{C}}\bar{h}$. Обозначим через $\bar{y}_*$, $\bar{x}_*$ прообразы точек y_*, x_*, принадлежащих кривым $w^{u+}_{\bar{p}}$, $w^s_{\bar{y}_*}$ соответственно. На кривой $w^s_{\bar{y}_*}$ существуют точки $\bar{x}'$, $\bar{y}'$, конгруэнтные точкам $\bar{x}$, $\bar{y}$ соответственно по отношению к целочисленным сдвигам плоскости. Так как дуга $(\bar{x}', \bar{y}')^s \subset w^s_{\bar{y}_*}$ содержит дугу $(\bar{x}_*, \bar{y}_*)^s \subset w^s_{\bar{y}_*}$, точки $\bar{x}'$, $\bar{y}'$ отделены кривой $w^u_{\bar{p}}$ на $\mathbb{R}^2$. По λ-лемме (см., например, [21][λ-lemma]) существует $N > 0$ такое, что $d(\phi^{-N}(x'), \phi^{-N}(\bar{y}')) > r$. Предположим противное к утверждению леммы: $\bar{h}(\bar{x}) = \bar{h}(\bar{y})$. Тогда $\bar{h}(\bar{x}') = \bar{h}(\bar{y}')$, $\bar{h}(\phi^{-N}(\bar{x}')) = \phi^{-N}_{\widehat{C}}(\bar{h}(\bar{x}')) = \phi^{-N}_{\widehat{C}}(\bar{h}(\bar{y}')) = \bar{h}(\phi^{-N}(\bar{y}'))$ и, следовательно, $d(\phi^{-N}(\bar{x}'), \phi^{-N}(\bar{y}')) < r$, что невозможно.

□

Лемма 6.3. *Если для точки $x \in \Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ ее многообразие $W^\delta_x \setminus x$ не содержит δ-граничных точек, то $\bar{h}(w^\delta_{\bar{x}}) = \widehat{w}^\delta_{\bar{h}(\bar{x})}$.*

Доказательство. Проведем доказательство для случая, когда $\delta = u$ (доказательство для $\delta = s$ аналогично). Сначала покажем, что $\bar{h}(w^u_{\bar{x}}) \subset \widehat{w}^u_{\bar{h}(\bar{x})}$. Пусть $\bar{y}$ ($\bar{y} \neq \bar{x}$) — произвольная точка на кривой $w^u_{\bar{x}}$. Из определение неустойчивого многообразия следует, что $\lim\limits_{n\to-\infty} \rho(F^n_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}(x), F^n_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}(y)) = 0$ для $x = p(\bar{x})$, $y = p(\bar{y})$, где ρ — метрика на торе. В силу непрерывности h $\lim\limits_{n\to-\infty} \rho(h(F^n_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}(x)), h(F^n_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}(y))) = \lim\limits_{n\to-\infty} \rho(\widehat{C}^n(h(x)), \widehat{C}^n(h(y))) = 0$, следовательно $h(y) \in \widehat{W}^u_{h(x)}$, то есть $h(W^u_x) \subset \widehat{W}^u_{h(x)}$. Так как $\bar{h}$ — поднятие h, то $\bar{h}(w^u_{\bar{x}}) \subset \widehat{w}^u_{\bar{h}(\bar{x})}$. Кривая $\bar{h}(w^u_{\bar{x}})$ — связное множество на кривой $\widehat{w}^u_{\bar{h}(\bar{x})}$ и содержит точки $\bar{h}(\bar{x})$.

Теперь покажем, что $\bar{h}(w^u_{\bar{x}}) = \widehat{w}^u_{\bar{h}(\bar{x})}$. Предположим противное, $\bar{h}(w^u_{\bar{x}}) \neq \widehat{w}^u_{\bar{h}(\bar{x})}$. Тогда по лемме 6.2 образ одной из компонент связности множества $w^u_{\bar{x}} \setminus \bar{x}$ под действием отображения $\bar{h}$ — связное множество на прямой $\widehat{w}^u_{\bar{h}(\bar{x})}$. Но по лемме [15][Lemma 9.9] отображение $\bar{h}$ собственное, то есть прообраз каждого компактного множества компактен. Противоречие.

□

Лемма 6.4. *Пусть точки $p, q \in \Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ — δ-граничные периодические точки из одной и той же связки. Тогда*

1. *кривые $w^{\bar{\delta}}_{\bar{p}}$, $w^{\bar{\delta}}_{\bar{q}}$ ограничивают на $\mathbb{R}^2$ область $Q_{\bar{p},\bar{q}}$, не пересекающуюся с множеством $\bar{\Lambda}_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, причем $\pi(Q_{\bar{p},\bar{q}})$ — инъективная иммерсия открытого диска в $\mathbb{T}^2$;*

2. *$\bar{h}(\bar{p}) = \bar{h}(\bar{q})$;*

3. *$\bar{h}(Q_{\bar{p},\bar{q}}) \subset \bar{h}(w^{\bar{\delta}}_{\bar{p}})$.*

Доказательство. Проведем доказательство для случая, когда $\delta = s$. Другой случай аналогичен. Заметим, что все кривые $w^u_{\bar{x}}$, где $\bar{x} \in \bar{\Lambda}_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ и x — u-плотная точка, имеют одинаковые асимптотические направления[4] ([15][Corollary 9.5]). Так как область $Q_{\bar{p},\bar{q}}$ не пересекается с множеством $\bar{\Lambda}_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ и так как не существует конгруэнтных точек на кривых $w^u_{\bar{p}}$, $w^u_{\bar{q}}$, то и эта область не содержит конгруэнтных точек. Следовательно, $\pi(Q_{\bar{p},\bar{q}})$ — иммерсия открытого диска в $\mathbb{T}^2$.

Теперь приступим к доказательству пунктов 2 и 3. Пусть m — период точки p. Так как q и p — из одной и той же связки и $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, то их периоды совпадают. Пусть $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — поднятие диффеоморфизма $F^m_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ такое, что $\phi(\bar{p}) = \bar{p}$ и $\phi(\bar{q}) = \bar{q}$. Так как $hF_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u} = \widehat{C}h$, то $hF^m_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u} = \widehat{C}^m h$, следовательно, существует поднятие $\phi_{\widehat{C}}$ диффеоморфизма $\widehat{C}^m$ такое, что $\bar{h}\phi = \phi_{\widehat{C}}\bar{h}$. Предположим, что $\bar{h}(\bar{p}) \neq \bar{h}(\bar{q})$. Тогда точки $\bar{h}(\bar{p})$, $\bar{h}(\bar{q})$ — различные неподвижные точки диффеоморфизма $\phi_{\widehat{C}}$, что невозможно.

Покажем, что $\bar{h}(Q_{\bar{p},\bar{q}}) \subset \bar{h}(w^u_{\bar{p}})$. Предположим противное: существует точка $\bar{y} \in Q_{\bar{p},\bar{q}}$ такая, что $\bar{h}(\bar{y}) \notin \bar{h}(w^u_{\bar{p}})$. Из леммы 6.3 следует, что $\bar{h}(\bar{y}) \notin w^u_{\bar{h}(\bar{p})}$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi^{-n}_{\widehat{C}}(\bar{h}(\bar{y})), \phi^{-n}_{\widehat{C}}(\bar{h}(\bar{p}))) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(\bar{h}(\phi^{-n}(\bar{y})), \bar{h}(\phi^{-n}(\bar{p}))) = +\infty$, но $d(\phi^{-n}(\bar{y}), \phi^{-n}(\bar{p})) < r_0$ для всех $n > 0$, где r_0 — некоторый положительный номер, так как y принадлежит бассейну некоторого источника. Это противоречие и завершает доказательство леммы.

$\square$

Лемма 6.5. *Образ множества $\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ под действием h — весь тор $\mathbb{T}^2$. Множество $E_{F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}} = \{x \in \mathbb{T}^2 : h^{-1}(x)$ состоит из более, чем из одной точки$\}$ — это объединение неустойчивых многообразий точек из $\mathcal{O}^s$ и устойчивых многообразий точек из $\mathcal{O}^u$ алгебраического автоморфизма $\widehat{C}$. Более того, $h^{-1}(W^u_{O^s_i}) = W^u_{\alpha_{O^s_i}} \cup W^u_{p_{O^s_i}} \cup W^u_{q_{O^s_i}}$ и $h^{-1}(W^s_{O^u_j}) = W^s_{\omega_{O^u_j}} \cup W^s_{p_{O^u_j}} \cup W^s_{q_{O^u_j}}$.*

Доказательство. Докажем, что образ множества $\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ под действием отображения h — это весь тор $\mathbb{T}^2$. Пусть x — u-плотная точка из $\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$. По лемме 6.3 $h(W^u_x) = \widehat{W}^u_{h(x)}$. Так как автоморфизм $\widehat{C}$ — гиперболический, то многообразие $\widehat{W}^u_{h(x)}$ плотно в $\mathbb{T}^2$. Из этих фактов и непрерывности h следует, что $h(\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}) = \mathbb{T}^2$.

Пусть $\bar{x}$ — произвольная точка из $\bar{\Lambda}_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$. Возможны 2 варианта: 1) $w^u_{\bar{x}}$ не пересекается с прообразами s-граничных периодических точек и $w^s_{\bar{x}}$ не пересекается с прообразами u-граничных периодических точек множества $\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, 2) $w^u_{\bar{x}}$ ($w^s_{\bar{x}}$) пересекается с прообразом s-граничной (u-граничной) периодической точки p множества $\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ в точке $\bar{p}$.

В первом случае не существует точки $\bar{y}$ ($\bar{y} \neq \bar{x}$) из $\bar{\Lambda}_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ такой, что $\bar{h}(\bar{x}) = \bar{h}(\bar{y})$. Действительно, предположим противное. Во-первых, пусть $\bar{y} \in w^u_{\bar{x}}$. Но для всех $y \in$

[4]Пусть $x \in \Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $t \in \mathbb{R}$ — параметр на кривой $w^\delta_{\bar{x}}$ такой, что $w^\delta_{\bar{x}}(0) = \bar{x}$. Кривая $w^{\delta+}_{\bar{x}}$ ($w^{\delta-}_{\bar{x}}$) имеет асимптотическое направление $\delta^+_{\bar{x}}$ ($\delta^-_{\bar{x}}$) $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), если существует конечный предел $\delta^+_{\bar{x}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{y^\delta(t)}{x^\delta(t)}$ ($\delta^-_{\bar{x}} = \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{y^\delta(t)}{x^\delta(t)}$), где $x^\delta(t)$, $y^\delta(t)$ — декартовы координаты точки $w^\delta_{\bar{x}}(t)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$.

W^u_x, $(x,y)^u \cap \Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u} \neq \emptyset$, таким образом $\bar y \neq \bar x$ по лемме 6.2. Пусть тогда $\bar y \notin w^u_{\bar x}$. Рассмотрим область $Q_{\bar x,\bar y}$ на $\mathbb{R}^2$, ограниченную кривыми $w^u_{\bar x}$, $w^u_{\bar y}$. Выберем точку $\bar z$ на кривой $w^u_{\bar x}$ так, что кривая $w^s_{\bar z}$ бесконечна в обе стороны на $\mathbb{R}^2$, тогда из [15][Corollary 9.5] следует, что $w^s_{\bar z} \cap w^u_{\bar y} \neq \emptyset$. Пусть $z' = w^s_{\bar z} \cap w^u_{\bar y}$. По предложению 4.7 $\bar\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u} \cap Q_{\bar x,\bar y} \neq \emptyset$, следовательно, открытая дуга $(\bar z, \bar z')^u$ пересекает $\bar\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ и по лемме 6.2 $\bar h(\bar z) \neq \bar h(\bar z')$. С другой стороны, $\bar z \in w^u_{\bar x}$, $\bar z' \in w^u_{\bar y}$, по следствию [15][Corollary 9.5] $\bar h(w^u_{\bar x}) = \bar h(w^u_{\bar y})$, получаем, что $\bar h(\bar z) = \bar h(\bar z')$, а это противоречит предположению.

Рассмотрим оставшийся случай. Предположим, что $w^u_{\bar x}$ пересекает прообраз s-граничной периодической точки p множества $\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ в точке $\bar p$ (случай с u-граничной точкой доказывается аналогично). Пусть $Q_{\bar p,\bar q}$ — область на $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющая пункту 1) леммы 6.4. Если $\bar x = \bar p$, то из пункта 2) леммы 6.4 следует, что $\bar h(\bar x) = \bar h(\bar y)$, где $\bar y = \bar q$. Для всех $y \in W^u_p$ $(x,y)^u \cap \Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u} \neq \emptyset$, таким образом по лемме 6.2 $\bar y$ — единственная точка на $\mathbb{R}^2$, для которой $\bar x = \bar y$. Если $\bar x \neq \bar p$, то по [15][Corollary 9.5] $w^s_{\bar x} \cap w^u_{\bar q} \neq \emptyset$. Пусть $\bar y = w^s_{\bar x} \cap w^u_{\bar q}$, тогда так как $\bar h(w^u_{\bar x}) = \bar h(w^u_{\bar y})$, то $\bar h(\bar x) = \bar h(\bar y)$. Если к тому же $w^s_{\bar x}$ пересекает прообраз u-граничной периодической точки p' множества $\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$ в точке $\bar p'$, то существует другая точка $\bar y' = w^u_{\bar x} \cap w^s_{\bar q'}$, где q' — u-граничная периодическая точка из той же связки, как и p', такая, что $\bar y' = \bar x'$. В этом случае существует 4 точки на $\mathbb{R}^2$ с одинаковыми значениями функции $\bar h$. Если $w^s_{\bar x}$ не пересекает прообраз какой-либо u-граничной периодической точки, то $\bar y$ — единственная точка такая, что $\bar h(\bar y) = \bar h(\bar x)$ по лемме 6.2.

Так как $\bar h$ — поднятие h, то $E_{F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}}$ — объединение неустойчивых многообразий точек из $\mathcal{O}^s$ и устойчивых многообразий точек из $\mathcal{O}^u$ алгебраического автоморфизма $\widehat C$ и $h^{-1}(W^u_{O^s_i}) = W^u_{\alpha_{O^s_i}} \cup W^u_{p_{O^s_i}} \cup W^u_{q_{O^s_i}}$, $h^{-1}(W^s_{O^u_j}) = W^s_{\omega_{O^u_j}} \cup W^s_{p_{O^u_j}} \cup W^s_{q_{O^u_j}}$. □

Теперь докажем лемму 6.6.

Лемма 6.6. *Модельные диффеоморфизмы $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $F_{C',\mathcal{O}'^s,\mathcal{O}'^u} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда существует матрица $H \in GL(2,\mathbb{Z})$ такая, что $HC = C'H$ и $\widehat H(\mathcal{O}^s) = \mathcal{O}'^s$, $\widehat H(\mathcal{O}^u) = \mathcal{O}'^u$, где $\widehat H$ — индуцированный автоморфизм 2-тора.*

Доказательство. Для простоты обозначений положим $F = F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $F' = F_{C',\mathcal{O}'^s,\mathcal{O}'^u}$, $\Lambda = \Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $\Lambda' = \Lambda_{C',\mathcal{O}'^s,\mathcal{O}'^u}$, $L^u = L^u_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $L'^u = L^u_{C',\mathcal{O}'^s,\mathcal{O}'^u}$, $L^s = L^s_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $L'^s = L^s_{C',\mathcal{O}'^s,\mathcal{O}'^u}$.

Необходимость. Пусть диффеоморфизмы $F, F' : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ топологически сопряжены посредством гомеоморфизма $h : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$. Индуцированный изоморфизм $h_* : \pi_1(\mathbb{T}^2) \to \pi_1(\mathbb{T}^2)$ однозначно определяется матрицей $H \in GL(2,\mathbb{Z})$, которая в силу сопряжения удовлетворяет условию $HC = C'H$ и, следовательно, условию $\widehat H \widehat C = \widehat C' \widehat H$.

Поскольку h — сопрягающий гомеоморфизм, то $h(W^u_{\alpha_{\mathcal{O}^s_i}}) = W^u_{\alpha_{\mathcal{O}'^s_i}}$, $i \in \{1,\dots,k\}$ и $h(W^s_{\omega_{\mathcal{O}^u_j}}) = W^s_{\omega_{\mathcal{O}'^u_j}}$, $j \in \{1,\dots,l\}$. Из предложения 6.1 и леммы 6.5 следует, что существуют отображения h_F и $h_{F'}$ такие, что $h_F F = \widehat C h_F$, $h_{F'} F' = \widehat C' h_{F'}$ и $h_F(W^u_{\alpha_{\mathcal{O}^s_i}}) = \mathcal{O}^u_i$,

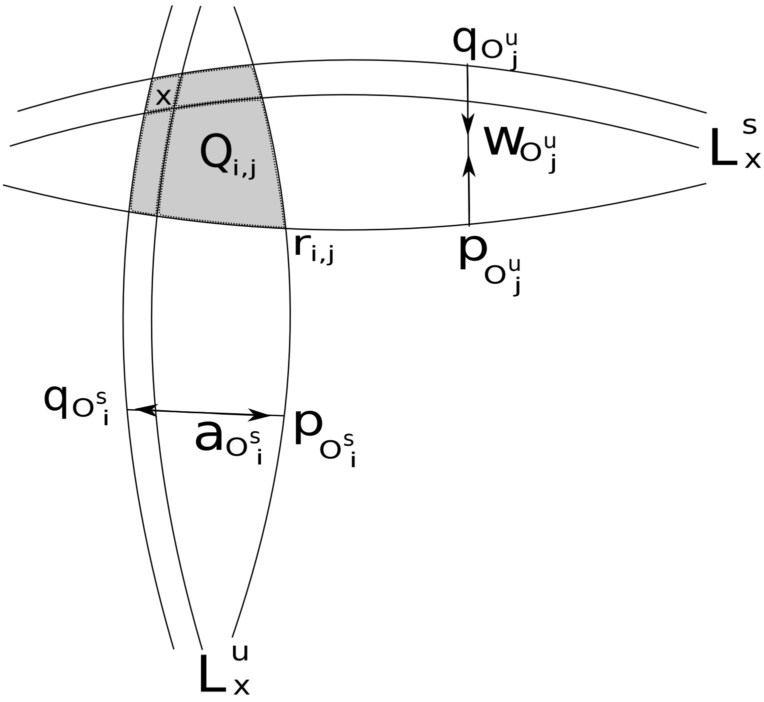

Рис. 15: Построение сопрягающего гомеоморфизма

$h_F(W^s_{\omega_{\mathcal{O}^u_j}}) = \mathcal{O}^s_j$, $h_{F'}(W^u_{\alpha_{\mathcal{O}'^s_i}}) = \mathcal{O}'^u_i$, $h_{F'}(W^s_{\omega_{\mathcal{O}'^u_j}}) = \mathcal{O}'^u_j$. Из единственности отображения $h_{F'}$ и равенств $hF = F'h$, $\widehat{H}\widehat{C} = \widehat{C}'\widehat{H}$ следует, что $h_{F'} = \widehat{H}h_F h^{-1}$. Тогда $h_{F'}h(W^u_{\alpha_{\mathcal{O}^s_i}}) = \widehat{H}h_F(W^u_{\alpha_{\mathcal{O}^s_i}})$, следовательно $h_{F'}(W^u_{\alpha_{\mathcal{O}'^s_i}}) = \widehat{H}(\mathcal{O}^u_i)$. Таким образом, $\mathcal{O}'^u_i = \widehat{H}(\mathcal{O}^u_i)$. Аналогично можно показать, что $\mathcal{O}'^s_j = \widehat{H}(\mathcal{O}^s_j)$.

Достаточность. Пусть существует матрица $H \in GL(2,\mathbb{Z})$ такая, что $HC = C'H$ и $\widehat{H}(\mathcal{O}^s) = \mathcal{O}'^s$, $\widehat{H}(\mathcal{O}^u) = \mathcal{O}'^u$. Построим гомеоморфизм $h : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, сопрягающий диффеоморфизмы F и F'. Сопряжение будем строить по шагам.

Положим $\widetilde{W} = W^u_{p_{\mathcal{O}^s}} \cup W^u_{q_{\mathcal{O}^s}} \cup W^s_{p_{\mathcal{O}^u}} \cup W^s_{q_{\mathcal{O}^u}}$, $\widetilde{W}' = W^u_{p_{\mathcal{O}'^s}} \cup W^u_{q_{\mathcal{O}'^s}} \cup W^s_{p_{\mathcal{O}'^u}} \cup W^s_{q_{\mathcal{O}'^u}}$ и $\widetilde{\Lambda} = \Lambda \setminus \widetilde{W}$, $\widetilde{\Lambda}' = \Lambda' \setminus \widetilde{W}'$. Из леммы 6.5 следует, что отображения $\widetilde{h}_F = h_F|_{\widetilde{\Lambda}} : \widetilde{\Lambda} \to \mathbb{T}^2 \setminus (W^u_{\mathcal{O}^s} \cup W^s_{\mathcal{O}^u})$, $\widetilde{h}_{F'} = h_{F'}|_{\widetilde{\Lambda}'} : \widetilde{\Lambda}' \to \mathbb{T}^2 \setminus (W^u_{\mathcal{O}'^s} \cup W^s_{\mathcal{O}'^u})$ являются взаимнооднозначными, более того, так как $\widehat{H}$ — алгебраический автоморфизм тора, удовлетворяющий условиям теоремы, то $\widehat{H}(W^u_{\mathcal{O}^s} \cup W^s_{\mathcal{O}^u}) = W^u_{\mathcal{O}'^s} \cup W^s_{\mathcal{O}'^u}$. Отсюда следует, что отображение

$$\widetilde{h} = \widetilde{h}^{-1}_{F'}\widehat{H}\widetilde{h}_F : \widetilde{\Lambda} \to \widetilde{\Lambda}'$$

является гомеоморфизмом, сопрягающим $F|_{\widetilde{\Lambda}}$ и $F'|_{\widetilde{\Lambda}'}$. Более того, из инвариантности устойчивого и неустойчивого слоений следует, что гомеоморфизм $\widetilde{h}$ можно продолжить на всё множество Λ так, что $\widetilde{h}(p_{\mathcal{O}^s_i}) = p_{\mathcal{O}'^s_i}$ и $\widetilde{h}(p_{\mathcal{O}^u_j}) = p_{\mathcal{O}'^u_j}$ для всех $i \in \{1,\dots,k\}$, $j \in \{1,\dots,l\}$. Покажем, как продолжить $\widetilde{h}$ до гомеоморфизма $h : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, сопрягающего F и F'.

Для этого обозначим через W^s_i объединение замыканий устойчивых сепаратрис седловых точек множества $l^{\emptyset}_{p_{\mathcal{O}^s_i}}$ и $l^{\emptyset}_{q_{\mathcal{O}^s_i}}$, лежащих в $W^u_{\alpha_{\mathcal{O}^s_i}}$ и через W^u_j объединение замыканий неустойчивых сепаратрис седловых точек множеств $l^{\emptyset}_{p_{\mathcal{O}^u_i}}$ и $l^{\emptyset}_{q_{\mathcal{O}^u_i}}$, лежащих в $W^s_{\omega_{\mathcal{O}^u_j}}$. Введем аналогичные обозначения $W_i'^s$, $W_j'^u$ для диффеоморфизма F'. Продолжим произвольным образом гомеоморфизм $\widetilde{h}|_{p_{O_i^s}}$ до гомеоморфизма $h_i^s : W_i^s \to W_i'^s$, сопрягающего $F|_{W_i^s}$ с $F'|_{W_i'^s}$ и гомеоморфизм $\widetilde{h}|_{p_{O_j^u}}$ до гомеоморфизма $h_j^u : W_j^u \to W_j'^u$ сопрягающего $F|_{W_j^u}$ с $F'|_{W_j'^u}$. Положим $W^s = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W_i^s$, $W'^s = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W_i'^s$, $W^u = \bigcup\limits_{j=1}^{l} W_j^u$, $W'^u = \bigcup\limits_{j=1}^{l} W_j'^u$. Обозначим через $h^s : W^s \to W'^s$ гомеоморфизм, составленный из h_i^s и через $h^u : W^u \to W'^u$ гомеоморфизм, составленный из h_j^u.

Пусть $r_{i,j}$ произвольная точка, принадлежащая множеству $W^u_{p_{O_i^s}} \cap W^s_{p_{O_j^u}}$. Тогда (см. Рис. 15) существует единственная компонента линейной связности множества $W^u_{\alpha_{O_i^s}} \cap W^s_{\omega_{O_j^u}}$, содержащая $r_{i,j}$ в своем замыкании, обозначим через $Q_{r_{i,j}}$ ее замыкание. Замыкание аналогичной компоненты для точки $r'_{i,j} = \widetilde{h}(r_{i,j})$ обозначим через $Q_{r'_{i,j}}$. Покажем, как продолжить гомеоморфизм $\widetilde{h}$ на множество $Q_{r_{i,j}}$, что и завершит доказательство леммы.

Любая точка $x \in Q_{r_{i,j}}$ является точкой пересечения слоев $L_x^u \in L^u$ и $L_x^s \in L^s$. Определим гомеоморфизм $h : Q_{r_{i,j}} \to Q_{r'_{i,j}}$ формулой $h(x) = \widehat{h}^s(L_x^u) \cap \widehat{h}^u(L_x^s) \cap Q_{r'_{i,j}}$, где $\widehat{h}^s : L^u \to L'^u$, $\widehat{h}^u : L^s \to L'^s$ — отображения слоев, индуцированные отображениями h^s, h^u, соответственно. $\square$

6.3 Реализация связной диаграммы Хассе связной суммой модельных диффеоморфизмов

Рассмотрим модельные диффеоморфизмы $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $F'_{C',\mathcal{O}'^s,\mathcal{O}'^u} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такие, что $\mathcal{O}^u \neq \emptyset$, $\mathcal{O}'^s \neq \emptyset$ и периодические орбиты $O^u \in \mathcal{O}^u$, $O^s \in \mathcal{O}'^s$ имеют одинаковый период. Поскольку O^u – стоковая орбита, а O^s – источниковая орбита, то существуют диффеоморфизм $\varphi : W^s_{O^u} \setminus O^u \to W^u_{O^s} \setminus O^s$ такой, что

$$\varphi \circ F^{-1}_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}|_{W^s_{O^u} \setminus O^u} = F'_{C',\mathcal{O}'^s,\mathcal{O}'^u} \circ \varphi|_{W^s_{O^u} \setminus O^u}.$$

Положим

$$Q = (\mathbb{T}^2 \setminus O^u) \sqcup (\mathbb{T}^2 \setminus O^s),\ \widehat{Q} = (\mathbb{T}^2 \setminus O^u) \cup_\varphi (\mathbb{T}^2 \setminus O^s)$$

и обозначим через $p : Q \to \widehat{Q}$ естественную проекцию.

Связной суммой модельных диффеоморфизмов $F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, $F'_{C',\mathcal{O}'^s,\mathcal{O}'^u}$ *вдоль орбит* O^u, O^s назовем диффеоморфизм $\phi : \widehat{Q} \to \widehat{Q}$, совпадающий с диффеоморфизмом $pF_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}p^{-1}|_{p(\mathbb{T}^2 \setminus O^u)}$ на $p(\mathbb{T}^2 \setminus O^u)$ и с диффеоморфизмом $pF'_{C',\mathcal{O}'^s,\mathcal{O}'^u}p^{-1}|_{p(\mathbb{T}^2 \setminus O^s)}$ на $p(\mathbb{T}^2 \setminus O^s)$.

На рисунке 16 изображена связная сумма модельных диффеоморфизмов. Здесь $\widehat{Q}$ – ориентируемая поверхность рода два (крендель). Операция связной суммы естественным образом обобщается на случай нескольких модельных диффеоморфизмов и

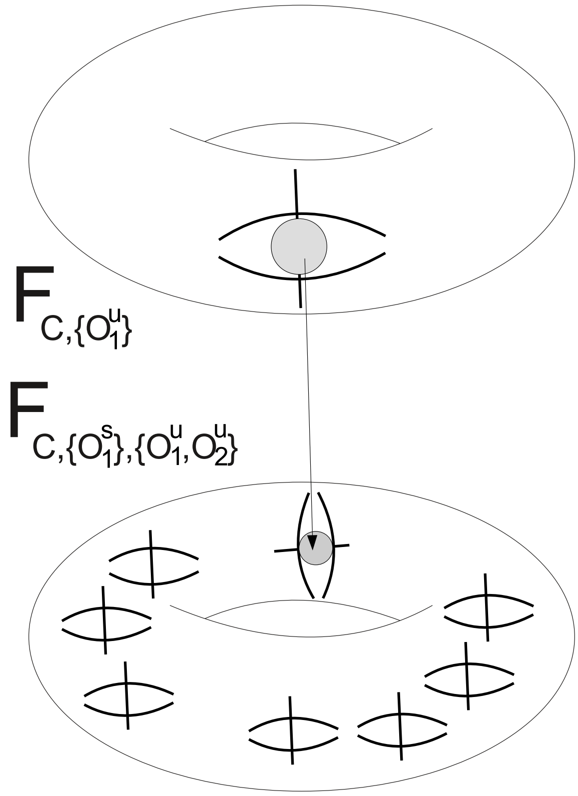

Рис. 16: Связная сумма модельных диффеоморфизмов

нескольких периодических орбит.

Обозначим через $\mathcal{H}$ класс диффеоморфизмов, являющихся связной суммой модельных диффеоморфизмов тора.

Теорема 4. *Любая связная диаграмма Хассе реализуется некоторым диффеоморфизмом из класса* $\mathcal{H}$.

Доказательство. Пусть Γ — связная диаграмма Хассе с вершинами $v_1, v_2, \dots, v_r$ и множеством ориентированных ребер вида (v_i, v_j), $i \neq j$. Перенумеруем все ребра произвольным образом так, что для каждому ребру (v_i, v_j) соответветствует натуральное число $k_{i,j}$, таким образом, каждое ребро определяется тройкой $e_{i,j} = (v_i, v_j, k_{i,j})$ (см. рисунок 17).

Пусть v_i — вершина, у которой l_i входящих ребер $e^{in}_{i,j} = (v_i, v^{in}_j, k^{in}_{i,j})$, $j \in \{1, \dots, l_i\}$ и m_i выходящих ребер $e^{out}_{i,j} = (v_i, v^{out}_j, k^{out}_{i,j})$, $j \in \{1, \dots, m_i\}$ (l_i и m_i могут быть нулевыми). Рассмотрим модельный диффеоморфизм $F_{v_i} = F_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$, у которого множества $\mathcal{O}^s$ и $\mathcal{O}^u$ состоят из l_i периодических орбит периодов $k^{in}_{i,1}, \dots, k^{in}_{i,l_i}$ и m_i периодических орбит периодов $k^{out}_{i,1}, \dots, k^{out}_{i,m_i}$, соответственно.

Результирующий диффеоморфизм $f \in g$, реализующий диаграмму Γ, — связная сумма диффеоморфизмов F_{v_i}. Именно, если $e^{in}_{i,j} = (v_i, v^{in}_j, k^{in}_{i,j})$ — ребро, которое одновременно является ребром $e^{out}_{j,i} = (v_j, v^{out}_i, k^{out}_{j,i})$, то диффеоморфизм F_{v_i} соединяется с F_{v_j} вдоль s- и u-орбит одного периода $k^{in}_{i,j} = k^{out}_{j,i}$. $\square$

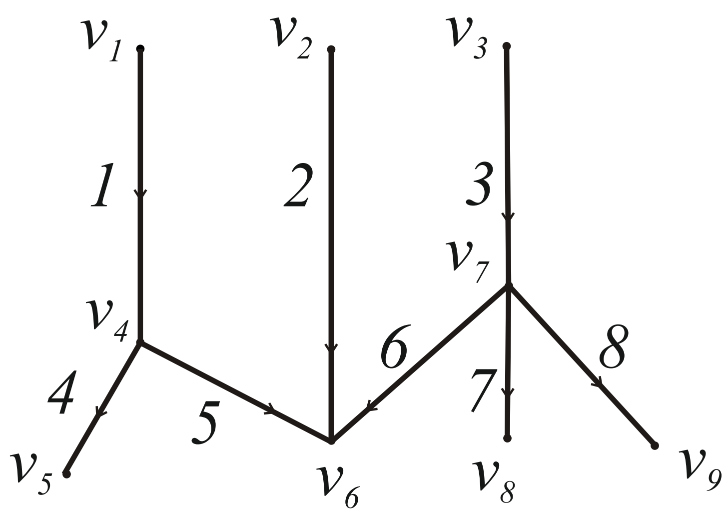

Рис. 17: Диаграмма Хассе с перенумерованными ребрами

6.4 Размеченная диаграмма – полный инвариант Ω-сопряженности

В этом разделе мы приведем диффеоморфизмы из класса $\mathcal{H}$ с изоморфными размеченными диаграммами Смейла, не являющиеся объемлюще Ω-сопряженными. Выделим подкласс $\mathcal{H}_* \subset \mathcal{H}$ диффеоморфизмов, у которых любые два модельных диффеоморфизма связаны не более, чем по одной орбите. Для таких диффеоморфизмов класс изоморфности размеченной диаграммы Смейла является полным инвариантом объемлющей Ω-сопряженности.

Напомним, что *размеченная диаграмма* – это диаграмма Смейла, в которой около каждой вершины дополнительно указан класс топологической сопряженности ограничения диффеоморфизма на соответствующем базисном множестве. Две размеченные диаграммы называются *изоморфными*, если существует изоморфизм соответствующих графов, сохраняющий инцидентность, ориентацию ребер и классы топологической сопряженности вершин. Из свойств Ω-сопряженных диффеоморфизмов следует, что размеченная диаграмма не меняет класс изоморфности при малых возмущениях.

Назовем диффеоморфизмы $f : M^n \to M^n$, $g : M'^n \to M'^n$ *объемлюще Ω-сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h : M^n \to M'^n$ такой, что $hf|_{NW(f)} = gh|_{NW(f)}$.

В силу леммы 6.6, размеченная диаграмма Смейла для диффеоморфизма $f \in \mathcal{H}$ состоит из диаграммы Хассе, соответствующей порядку базисных множеств диффеоморфизма f, где каждая вершина оснащена набором $C, \mathcal{O}^s, \mathcal{O}^u$, соответствующим модельному базисному множеству $\Lambda_{C,\mathcal{O}^s,\mathcal{O}^u}$. Для диффеоморфизмов f, $f' \in \mathcal{H}$ изоморфность их графов Хассе и выполнение условий леммы 6.6 на изоморфных размеченных вершинах является необходимым и достаточным условием их Ω-сопряженности. Однако сопрягающий гомеоморфизм в общем случае не продолжается с базисных множеств на несущую поверхность. Демонстрирующий этот эффект пример приведен на рисунке

18.

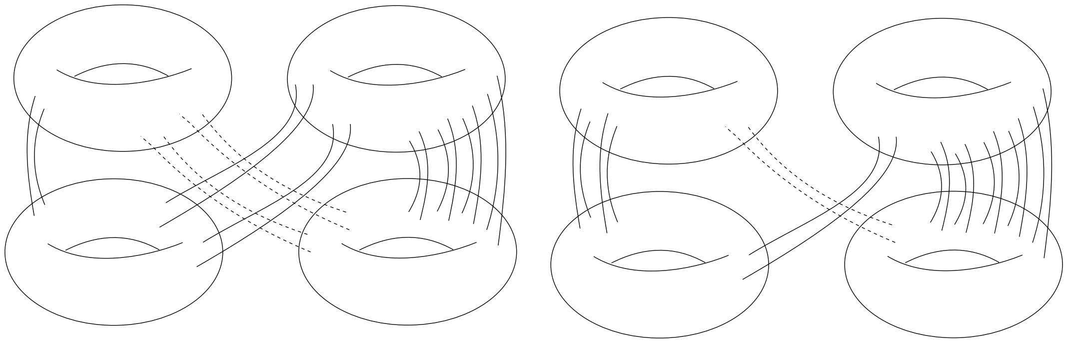

Рис. 18: Diffeomorphisms f and f' that are not ambiently Ω-conjugate

Выделим подкласс $\mathcal{H}_* \subset \mathcal{H}$ диффеоморфизмов, у которых любые два модельных диффеоморфизма склеены не более, чем по одной орбите.

Теорема 5. *Диффеоморфизмы $f, f' \in \mathcal{H}_*$ объемлюще Ω-сопряжены тогда и только тогда, когда их размеченные диаграммы изоморфны.*

Доказательство.

Необходимость. Поскольку любые два модельных диффеоморфизма в связной сумме диффеоморфизма из класса $\mathcal{H}_*$ склеены не более, чем по одной орбите, то из объемлющей Ω-сопряженности диффеоморфизмов $f, f' \in \mathcal{H}_*$ следует изоморфность их размеченных диаграмм Смейла.

Достаточность. Из изоморфности размеченных диаграмм диффеоморфизмов $f, f' \in \mathcal{H}_*$ и леммы 6.6 следует существование гомеоморфизмов, сопрягающих модельных диффеоморфизмы, соответствующие изоморфным вершинам. Составленное из этих гомеоморфизмов отображение определено на несущей поверхности всюду, кроме колец, связывающих две модели. Продолжив произвольным образом отображение на кольца, мы получим искомый гомеоморфизм, осуществляющий объемлющую Ω-сопряженность диффеоморфизмов f, f'. $\square$

7 Построение энергетической функции для Ω-устойчивых 3-диффеоморфизмов с двумерными базисными множествами

В настоящем разделе строится энергетическая функция для содержательных классов Ω-устойчивых 3-диффеоморфизмов с двумерными базисными множествами. В силу [6][Theorem 1.3] и [52][Теорема 18.3.1], если Ω-устойчивый 3-диффеоморфизм имеет двумерный связный аттрактор Λ, то имеют место только 2 случая:

- если $dim\, W^u_\Lambda = 1$, то Λ гомеоморфен двумерному тору и диффеоморфизм $f|_\Lambda$ топологически сопряжен с гиперболическим автоморфизмом тора;
- если $dim\, W^u_\Lambda = 2$, то Λ — растягивающийся аттрактор коразмерности 1.

7.1 Структурно устойчивые диффеоморфизмы с двумерным растягивающимся аттрактором

Рассмотрим класс $T(M^3)$ структурно устойчивых диффеоморфизмов на 3-многообразии $f : M^3 \to M^3$, неблуждающее множество которых содержит двумерный растягивающийся аттрактор A (случай растягивающегося репеллера полностью аналогичен). Изложим необходимую для построения энергетической функции информацию о динамике диффеоморфизма $f \in T(M^3)$, следуя работе [48]. Заметим, что все результаты работы [48] сформулированы для многообразия размерности $n \geq 3$ и случая, когда A является ориентируемым базисным множеством[5]. Однако, в работе [53] доказано, что в случае нечетного n базисное множество A является ориентируемым. Поэтому везде ниже, формулируя выжимку результатов работы [48] для случая $n = 3$, мы не требуем от A дополнительно быть ориентируемым.

Пусть $f \in T(M^3)$ и A — двумерный растягивающийся аттрактор диффеоморфизма f. Тогда $\dim\ W^s_x = 1$ для любой точки $x \in A$, что позволяет ввести обозначение $(z, y)^s$ ($[z, y]^s$) для открытой (замкнутой) дуги устойчивого многообразия W^s_x, ограниченной точками $y, z \in W^s_x$.

Пусть $x \in A$ — s-граничная точка. Обозначим через $W^{s\emptyset}_x$ компоненту связности множества $W^s_x \setminus x$, которая не пересекается с A. Множество Γ_A граничных точек множества A не пусто и состоит из конечного числа периодических точек, которые разбиваются на *ассоциированные* пары (p, q) точек одинакового периода так, что 2-*связка* $B_{pq} = W^u_p \cup W^u_q$ является достижимой изнутри границей компоненты связности множества $M^3 \setminus A$.

[5]Базисное множество Λ называется *ориентируемым*, если для любой точки $x \in \Lambda$ и любых фиксированных чисел $\alpha > 0$, $\beta > 0$ индекс пересечения $W^s_\alpha(x) \cap W^u_\beta(x)$ во всех точках пересечения один и тот же (+1, либо -1). В противном случае, базисное множество Λ называется *неориентируемым* (см., например, [16], с. 622).

Для каждой пары (p, q) ассоциированных граничных точек множества A построим, так называемую, *характеристическую сферу.*

Пусть B_{pq} — 2-связка аттрактора A, состоящая из двух неустойчивых многообразий W^u_p и W^u_q ассоциированных граничных точек p и q соответственно, и m_{pq} — период точек p, q. Тогда для любой точки $x \in W^u_p \backslash p$ существует единственная точка $y \in (W^u_q \cap W^s_x)$ такая, что дуга $(x, y)^s$ не пересекается с множеством A. Определим отображение

$$\xi_{pq} : B_{pq} \setminus \{p, q\} \to B_{pq} \setminus \{p, q\},$$

положив $\xi_{pq}(x) = y$ и $\xi_{pq}(y) = x$. Тогда $\xi_{pq}(W^u_p \setminus p) = W^u_q \setminus q$ и $\xi_{pq}(W^u_q \setminus q) = W^u_p \setminus p$, т.е. отображение ξ_{pq} переводит проколотые неустойчивые многообразия 2-связки друг в друга и является инволюцией ($\xi^2_{pq} = id$). В силу теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий на компактных множествах отображение ξ_{pq} является гомеоморфизмом.

Ограничение $f^{m_{pq}}|_{W^u_p}$ имеет ровно одну гиперболическую отталкивающую неподвижную точку p, поэтому существует гладкий замкнутый 2-диск $D_p \subset W^u_p$ такой, что $p \in D_p \subset int(f^{m_{pq}}(D_p))$. Тогда множество $C_{pq} = \bigcup\limits_{x \in \partial D_p} (x, \xi_{pq}(x))^s$ гомеоморфно замкнутому двумерному цилиндру $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. Множество C_{pq} называют *связывающим цилиндром.* Окружность $\xi_{pq}(\partial D_p)$ ограничивает в W^u_q двумерный 2-диск D_q такой, что $q \in D_q \subset int(f^{m_{pq}}(D_q))$. Множество $S_{pq} = D_p \cup C_{pq} \cup D_q$ гомеоморфно двумерной сфере, которую называют *характеристической сферой*, соответствующей связке B_{pq} (см. рисунок 19).

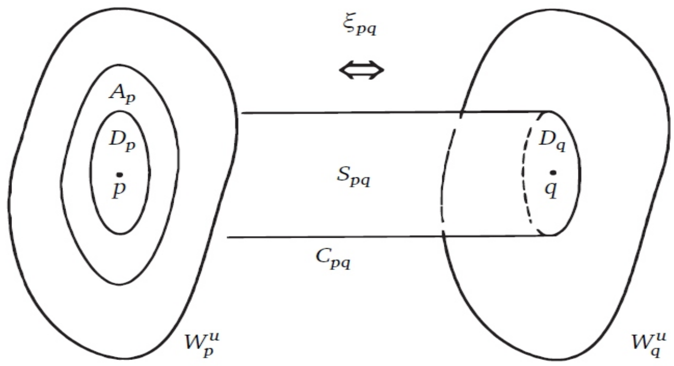

Рис. 19: Характеристическая сфера

Положим $T(f) = R_f \setminus A$ и основные динамические свойства диффеоморфизма $f \in T(M^3)$ сформулируем в виде предложения (см. рисунок 20 для лучшего понимания).

Предложение 7.1. *Пусть $f : M^3 \to M^3$ диффеоморфизм из класса $T(M^3)$. Тогда имеют место следующие факты:*

1. *объемлющее многообразие M^3 гомеоморфно трехмерному тору $\mathbb{T}^3$ ([48], Теорема 5.1);*

2. *каждая характеристическая сфера S_{pq} ограничивает 3-шар Q_{pq} такой, что $(R_f \setminus A) \subset \bigcup\limits_{(p,q)\subset\Gamma_A} Q_{pq}$ ([48], Теорема 5.1);*

3. *для каждой ассоциированной пары (p,q) граничных точек существует натуральное число k_{pq} такое, что $(R_f \setminus A) \cap Q_{pq}$ состоит из k_{pq} периодических источников $\alpha_1,\dots,\alpha_{k_{pq}}$ и $k_{pq}-1$ седловых периодических точек $\sigma_1,\dots,\sigma_{k_{pq}-1}$, чередующихся на простой дуге $l_{pq} = W^{s\emptyset}_p \cup \bigcup\limits_{i=1}^{k_{pq}-1} W^s_{\sigma_i} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^s_{\alpha_i} \cup W^{s\emptyset}_q$ ([48], Следствие 5.2);*

4. *пересечение $W^u_{\sigma_i} \cap Q_{pq}, i=1,\dots,k_{pq}-1$ состоит в точности из одного двумерного диска ([48], Теорема 4.1).*

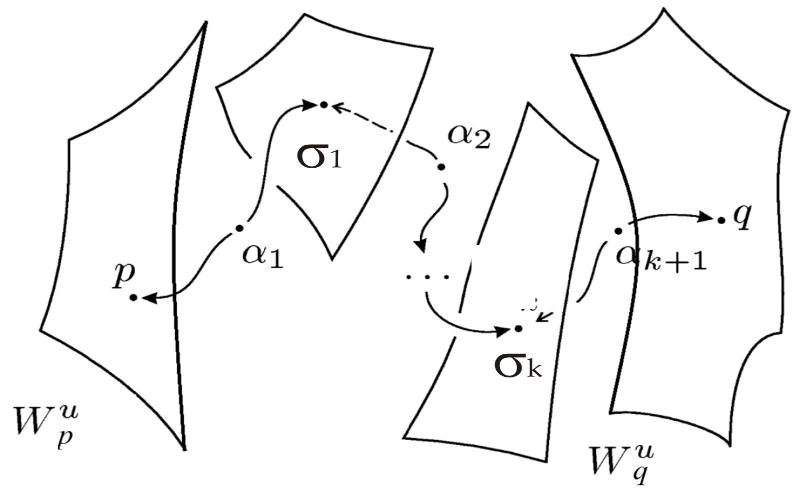

Рис. 20: Дуга l_{pq}

Теорема 6 ([46]*, Теорема 1)**.** *Для любого диффеоморфизма $f \in T(M^3)$ существует гладкая энергетическая функция, являющаяся функцией Морса вне нетривиального базисного множества.*

Доказательство: Пусть (p,q) пара ассоциированных граничных точек периода m_{pq} базисного множества A. Положим $A^-_{pq} = \bigcup\limits_{j=0}^{m_{pq}-1} f^j(\bigcup\limits_{i=1}^{k_{pq}-1} W^s_{\sigma_i} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{k_{pq}-1} W^s_{\alpha_i})$. По построению множество A^-_{pq} является репеллером диффеоморфизма f. Покажем, что он является тесно вложенным. Для этого достаточно показать, что существует 3-шар P^-_{pq} такой, что $f^{-m_{pq}}(P^-_{pq}) \subset int\ P^-_{pq}$ и пересечение $P^-_{pq} \cap W^u_{\sigma_j}$ состоит в точности из одного двумерного диска для каждого седла $\sigma_j, j \in \{1,\dots,k_{pq}-1\}$.

В силу Предложения 7.1, 3-шар Q_{pq} пересекает двумерное неустойчивое многообразие седла $\sigma_j, j \in \{1,\dots,k_{pq}-1\}$ в точности по одному двумерному диску. Искомый

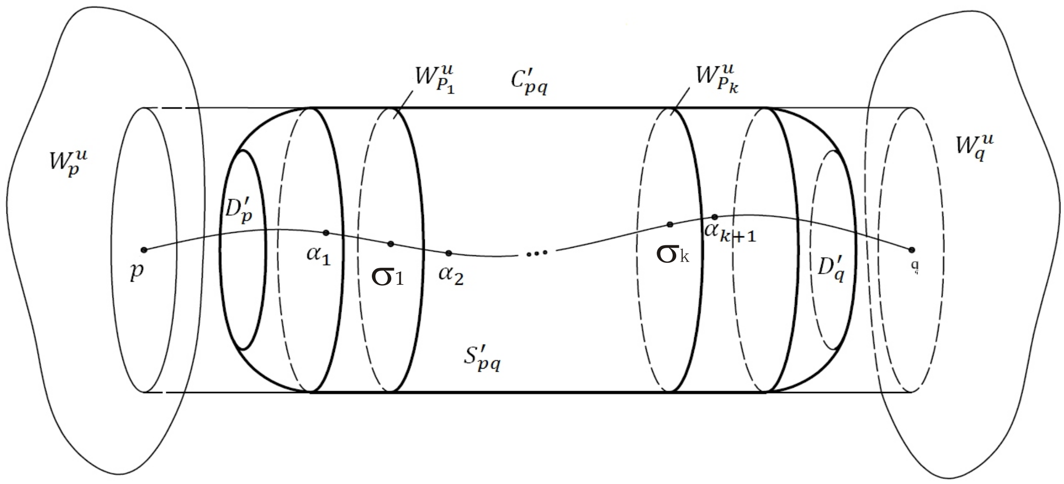

Рис. 21: Окрестность P^-_{pq}

3-шар P^-_{pq} получатся из Q_{pq} вдавливанием внутрь дисков D_p, D_q и сглаживанием углов (см. рисунок 21).

Обозначим через D дизъюнктное объединение 3-шаров в числе, равном числу пар ассоциированных точек аттрактора A. Положим $\check{M} = \bigcup\limits_{(p,q)\subset\Gamma_A} P^-_{pq}$ и $N = \check{M} \cup_q D$, где $q : \partial\check{M} \to \partial D$ — диффеоморфизм. Обозначим через $\pi : \check{M} \cup D \to N$ естественную проекцию.

По построению N — гладкое 3-многообразие, каждая компонента связности которого диффеоморфна $\mathbb{S}^3$, допускающее диффеоморфизм Морса-Смейла $f_N : N \to N$, совпадающий с диффеоморфизмом $\pi f \pi^{-1}$ на множестве $\pi(\check{M})$ и имеющий по одной стоковой точке на каждой компоненте связности множества $\pi(D)$, обозначим через P множество этих точек. Кроме того, все одномерные репеллеры диффеоморфизма f строго тесно вложены. В силу Теоремы 1.23 для диффеоморфизма f_N существует энергетическая функция Морса $\varphi_N : N \to [0,3]$ такая, что $\varphi(\Omega^0_{f_N}) = 0$, $\varphi(\Omega^3_{f_N}) = 3$ и $\pi(\partial\check{M})$ — множество уровня функции φ_N со значением 1. По построению диффеоморфизмы $f|_{M^3\setminus A}$ и $f_N|_{N\setminus P}$ гладко сопряжены посредством диффеоморфизма $h : M^3 \setminus A \to N \setminus P$, совпадающего с π на $\check{M}$. Тогда $\varphi = \varphi_N h$ является гладкой функцией на $M^3\setminus A$, которая непрерывно продолжается на A так, что $\varphi(A) = 0$.

По построению функция $\varphi : M^3 \to [0,3]$ является непрерывной функцией Ляпунова для диффеоморфизма f, которая является энергетической функцией Морса для f на $M^3 \setminus A$. Положим $U_A = M^3 \setminus \check{M}$ и $\varphi_{_A} = \varphi|_{U_A}$. По построению $\varphi_{_A}(U_A) = [0,1]$ и $\varphi^{-1}_{_A}(0) = A$. Из теоремы 1 следует, что существует функция $g_{_A} : [0,1] \to [0,1]$, такая что функция $\psi_{_A} = g_{_A} \circ \varphi_{_A}$ является энергетической функцией на U_A для f. Тогда функция

$$\psi(z)=\begin{cases}\varphi(z), \text{ если } z\in(M^3\setminus U_A);\\ \psi_{_A}(z), \text{ если } z\in U_A\end{cases}$$

является искомой энергетической функцией на M^3 для диффеоморфизма f. $\square$

7.2 Ω-устойчивые 3-диффеоморфизмы с двумерным неблуждающим множеством

В этом разделе рассматривается множество $Q(M^3)$, состоящее из Ω-устойчивых диффеоморфизмов на замкнутом ориентируемом 3-многообразии, все базисные множества которых имеют топологическую размерность два. Опишем динамику таких диффеоморфизмов, следуя работам [14], [44] и [50].

В силу [44], каждая компонента связности каждого базисного множества диффеоморфизма $f\in Q(M^3)$ является двумерным тором ручно вложенным в M^3 и все компоненты связности имеют один и тот же период $k_f\geq 1$, а отображение $f^{k_f}|_B$ топологически сопряжено с *гиперболическим автоморфизмом тора*. Напомним, *алгебраическим автоморфизмом* тора $\mathbb{T}^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ называется диффеоморфизм $\widehat{C}$, задаваемый матрицей $C=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ из множества $GL(2,\mathbb{Z})$ целочисленных матриц с определителем ±1. То есть $\widehat{C}(x,y)=(ax+by,cx+dy)$ $(mod\ 1)$. Алгебраический автоморфизм $\widehat{C}$ называется *гиперболическим*, если собственные значения λ_1,λ_2 матрицы C удовлетворяют условиям $|\lambda_1|<1<|\lambda_2|$. При этом матрица C также называется *гиперболической*.

Обозначим через $\mathcal{A}$ ($\mathcal{R}$) объединение всех гиперболических аттракторов (репеллеров) диффеоморфизма f. Множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ не пусты и граница каждой компоненты связности V множества $M^3\setminus(\mathcal{A}\cup\mathcal{R})$ состоит в точности из одной периодической компоненты $A\subset\mathcal{A}$ и одной периодической компоненты $R\subset\mathcal{R}$. При этом замыкание $cl\ V$ гомеоморфно многообразию $\mathbb{T}^2\times[0,1]$. Таким образом, объемлющее многообразие M^3, допускающее диффеоморфизмы рассматриваемого класса, является объединением конечного числа копий $\mathbb{T}^2\times[0,1]$ таким, что каждое базисное множество является тором, по которому пересекаются в точности две копии (см. рисунок 22). Однако, базисное множество диффеоморфизма f, будучи ручным тором, тем не менее может не быть гладким ни в одной точке (см., например, [18]).

В следующей теореме устанавливается факт существования энергетической функции у любого такого диффеоморфизма.

Теорема 7 ([47]*, Теорема 1.1)**.** *Любой диффеоморфизм $f\in Q(M^3)$ обладает гладкой энергетической функцией.*

Доказательство:

Пусть V — компонента связности множества $M^3\setminus(\mathcal{A}\cup\mathcal{R})$ такая, что $\partial V=A\cup R$, где $A\in\mathcal{A}$, $R\in\mathcal{R}$. Пусть число k_f такое, что множество V является f^{k_f}-инвариантным.

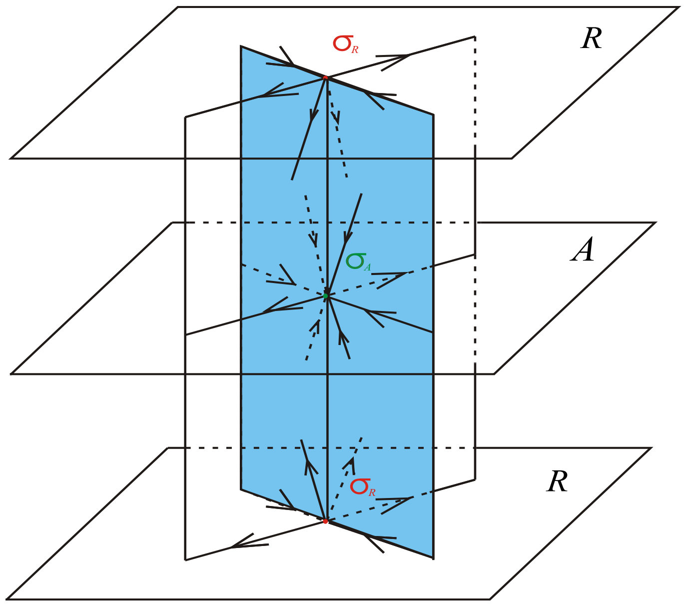

Рис. 22: Фазовый портрет диффеоморфизма $f \in Q(M^3)$

Построим сначала энергетическую функцию $\varphi : cl\ V \to [0,1]$ для f^{k_f}.

Пусть V — компонента связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ такая, что $\partial V = A \cup R$, где $A \in \mathcal{A}$, $R \in \mathcal{R}$. Для доказательства теоремы достаточно построить энергетическую функцию $\varphi : cl\ V \to [0,1]$ для f^{k_f}.

Согласно работе [14] существует диффеоморфизм $\chi : \mathbb{T}^2 \times (0,1) \to V$ такой, что расслоение на двумерные торы $\{T_t = \chi(\mathbb{T}^2 \times \{t\}), t \in (0,1)\}$ является f^{k_f}-инвариантным. Определим функцию $\varphi : cl\ V \to [0,1]$ следующим образом:

$$\varphi(z) = \begin{cases} t, \text{ если } z \in T_t; \\ 0, \text{ если } z \in A; \\ 1, \text{ если } z \in R; \end{cases}$$

По построению функция φ является гладкой на V, непрерывной на $cl\ V$, убывающей вдоль траекторий системы, а также не имеет критических точек на множестве M.

Продолжим функцию φ на все итерации множества V под действием диффеоморфизма f, то есть на множество $\widehat{V} = \bigcup\limits_{i=0}^{k_f-1} f^i(V)$. Пусть $V_i = f^i(V)$, где $i = 1, \ldots, k_f - 1$. Заметим, что расслоение $\{T_t\}$ индуцирует f^{k_f}-инвариантное расслоение на двумерные торы $T_{t_i} = f^i(T_t)$ каждого множества V_i. Пусть $T_{t_{k_f}} = f^{k_f}(T_t) \subset V$.

Определим функцию φ на множестве $cl\ V_i$, $i = 1, \ldots, k_f - 1$ следующим образом:

$$\varphi(z) = \begin{cases} t + \frac{i(t_{k_f} - t)}{k_f}, \text{ если } z \in T_{t_i}; \\ 0, \text{ если } z \in f^i(A); \\ 2, \text{ если } z \in f^i(R); \end{cases}$$

Проводя аналогичные рассуждения, можно продолжить функцию φ на всё многообразие M^3. Полученная таким образом функция $\varphi : M^3 \to [0,1]$ будет функцией Ляпунова для f, гладкой на $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$, непрерывной на M^3 и не имеющей блуждающих критических точек.

Из теоремы 1 следует, что существуют функции $g_A : [0,1] \to [0,1]$ и $g_R : [0,1] \to [0,1]$ такие, что функция $\psi = (1 - g_R) \circ g_A \circ \varphi$ является энергетической функцией для диффеоморфизма f. $\square$

8 Построение энергетической функции для Ω-устойчивых 3-диффеоморфизмов с динамикой одномерный источник-сток

Динамика в захватывающей окрестности одномерного базисного множества на поверхности естественным образом может быть продолжена в техмерное пространство следующим образом.

Определение 16. *Связный одномерный аттрактор A A-диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ называется* канонически вложенным поверхностным аттрактором*, если:*

- *A имеет захватывающую окрестность U_A вида $S_A \times [-1, 1]$, где $S_A = S_A \times \{0\}$ — поверхность с краем и $A \subset int\, S_A$;*
- *S_A — захватывающая окрестность A как аттрактора для диффеоморфизма $g = f|_{S_A} : S_A \to f(S_A)$;*
- *диффеоморфизм $f|_{U_A} : U_A \to f(U_A)$ топологически сопряжен с диффеоморфизмом $\phi(w, z) = (g(w), z/2) : S_A \times [-1, 1] \to f(S_A) \times [-1/2, 1/2]$.*

Одномерный репеллер называется *канонически вложенным поверхностным репеллером*, если он является канонически вложенным поверхностным аттрактором для диффеоморфизма f^{-1}.

Естественно предположить, что существуют 3-диффеоморфизмы, имеющие в точности один аттрактор и один репеллер, канонически вложенные в поверхность. В этом разделе мы приведем конструкцию таких диффеоморфизмов с аттрактором и репеллером, полученными с помощью хирургической операции Смейла из одного и того же диффеоморфизма Аносова. Очевидно, что конструкция допускает обобщения на аттрактор и репеллер, полученные с помощью DPA-операций из одного и того же псевдоаносовского диффеоморфизма. Кроме того, мы покажем, что все построенные примеры не являются структурно устойчивыми.

Заметим, что подобная динамика "одномерный аттрактор-репеллер" на поверхности также всегда не является структурно устойчивой в силу результатов работы [24]. Построение 3-диффеоморфизмов с одномерной динамикой аттрактор-репеллер (не поверхностные) впервые было предложено в статье [11], но все примеры также не были структурно устойчивыми. В работах [5], [26] были построены структурно устойчивые примеры с одномерной динамикой аттрактор-репеллер. Но, вопрос о канонической вложенности базисных множеств в поверхность остается открытым для них, поскольку конструкция сильно отличается от предложенной ниже. Поверхностная динамика позволяет нам доказать существование энергетической функции для построенных в этом разделе примеров.

8.1 Конструкция 3-диффеоморфизма с одномерными аттрактором и репеллером, канонически вложенными в поверхность

Пусть $C \in SL(2, \mathbb{Z})$ — гиперболическая матрица с собственными числами λ_1, λ_2 такими, что $\lambda = |\lambda_1| > 1$ и $|\lambda_2| = 1/\lambda$. Так как матрица C имеет определитель, равный 1, то она индуцирует гиперболический автоморфизм $\widehat{C} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ с неподвижной точкой O. Этот автоморфизм — диффеоморфизм Аносова, обладающий двумя трансверсальными слоениями (устойчивым и неустойчивым), слои которых являются иррациональными обмотками тора. Более того, множество периодических точек диффеоморфизма $\widehat{C}$ всюду плотно на $\mathbb{T}^2$.

С. Смейл предложил так называемую "хирургическую операцию" для получения диффеоморфизма с одномерным аттрактором и неподвижным источником из диффеоморфизма Аносова. Идея состоит в том, чтобы взять композицию диффеоморфизма $\widehat{C}$ с другим диффеоморфизмом, который является растяжением вблизи его неподвижной точки и продолжается до тождественного вне малой окрестности этой точки. В этом разделе мы проведем подобную "хирургическую операцию" с некоторыми специфическими свойствами, чтобы иметь возможность использовать их для будущих построений.

Пусть (x, y) — локальные координаты в окрестности $U(O)$ точки O на торе $\mathbb{T}^2$ такие, что диффеоморфизм $\widehat{C}$ в этих координатах имеет форму

$$\widehat{C}(x, y) = (x/\lambda, \lambda y)\,.$$

Тогда $Ox \subset W^s_O$ и $Oy \subset W^u_O$, то есть $\{y = const\}$ and $\{x = const\}$ — устойчивое и неустойчивое слоения диффеоморфизма $\widehat{C}$. Пусть

$$V(O) = \{(x, y) \in U(O) : x^2 + y^2 \leqslant \lambda^{-6}\}.$$

Лемма 8.1 ([3]*, Lemma 1)**.** *Существует диффеоморфизм $\widehat{B}_R : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ со следующими свойствами:*

- *$\widehat{B}_R$ тождественный на множестве $\mathbb{T}^2 \setminus U(O)$;*
- *$\widehat{B}_R$ сохраняет неустойчивое слоение диффеоморфизма $\widehat{C}$;*
- *$\widehat{B}_R \circ \widehat{C}(x, y) = \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right)$ на множестве $V(O)$.*

Доказательство: Пусть функция $\sigma : \mathbb{R} \to [0,1]$ — сигмоид, заданный формулой

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \frac{1}{1+\exp\left(\frac{\frac{1}{2}-x}{x^2(x-1)^2}\right)}, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

и $\beta_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — линейная функция $\beta_{a,b}(x) = \frac{x-a}{b-a}$ для действительных чисел $a < b$. Композицию этих функций

$$\mathcal{T}_{a,b} = \sigma \circ \beta_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

, которая отображает $[a,b]$ в $[0,1]$, будем использовать для дальнейших построений (см. рисунок 23 для $a = \lambda^{-3}$, $b = 1$). Пусть $\mu(x) = \mathcal{T}_{\lambda^{-3},1}(x)$. Определим диффеоморфизм

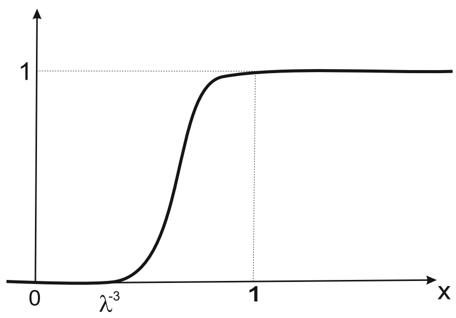

Рис. 23: График функции $\mu(x)$

$\nu_{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (см. рисунок 24) с помощью формулы

$$\nu_{R}(x) = \lambda^{-2(1-\mu(|x|))}x.$$

Пусть $\mathbb{D}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 4\}$. Определим диффеоморфизм $B_R : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ с

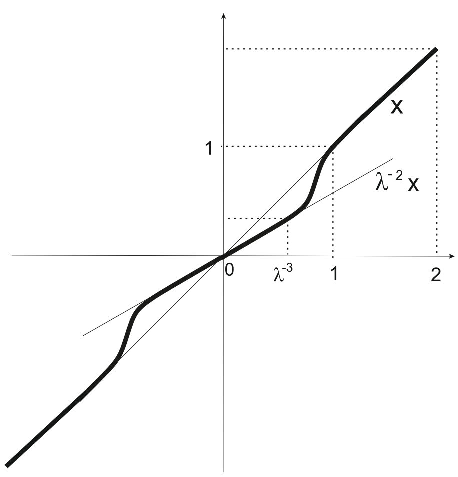

Рис. 24: График функции $\nu_{R}(x)$

помощью формулы

$$B_R(x,y) = (x, \nu_{_R}(y)).$$

По построению $B_R(x,y) = (x, \lambda^{-2}y)$ if $x^2{+}y^2 \leqslant \lambda^{-6}$ и тождественный на $\partial\mathbb{D}^2$. Пусть $\widehat{B}_R : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ — диффеоморфизм, совпадающий с B_R на множестве $U(O)$ и тождественный вне множества $U(O)$. $\square$

Согласно [33], диффеоморфизм

$$\widehat{\Psi}_R = \widehat{B}_R \circ \widehat{C}$$

— DA-диффеоморфизм, неблуждающее множество которого состоит из одномерного репеллера R с единственной связкой степени 2 и неподвижного стока O.

Лемма 8.2 ([3]*, Lemma 2)**.** *Существует диффеоморфизм $\widehat{B}_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ со следующими свойствами:*

- *$\widehat{B}_A$ тождественный на множестве $\mathbb{T}^2 \setminus U(O)$;*
- *$\widehat{B}_A$ сохраняет устойчивое слоение диффеоморфизма $\widehat{C}$;*
- *$\widehat{B}_A \circ \widehat{C}(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$ на множестве $V(O)$.*

Доказательство: Пусть $\nu_{_A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция, обратная к $\nu_{_R}$. Определим диффеоморфизм $B_A : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$, с помощью формулы

$$B_A(x,y) = (\nu_{_A}(x), y).$$

По построению, $B_A(x,y) = (\lambda^2 x, y)$ if $x^2{+}y^2 \leqslant \lambda^{-6}$ и тождественный на множестве $\partial\mathbb{D}^2$. Определим диффеоморфизм $\widehat{B}_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, совпадающий с B_A на множестве $U(O)$ и тождественный вне $U(O)$. $\square$

Согласно [33], диффеоморфизм

$$\widehat{\Psi}_A = \widehat{B}_A \circ \widehat{C}$$

— DA-диффеоморфизм, неблуждающее множество которого состоит из одномерного аттрактора с единственной связкой степени 2 и неподвижным источником O.

Рассмотрим гладкую функцию $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенную с помощью формулы $\varphi(z) = \frac{z}{\lambda}$. Определим диффеоморфизм Φ_A на множестве $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ с помощью формулы

$$\Phi_A(w,z) = (\widehat{\Psi}_A(w), \varphi(z)).$$

Диффеоморфизм Φ_A — A-диффеоморфизм, неблуждающее множество которого состоит из одной неподвижной седловой точки $O \times \{0\}$ и одномерного связного аттрактора A, расположенного на торе $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ так, что $W^s_A = (\mathbb{T}^2 \setminus O) \times \mathbb{R}$. Покажем, что поверхностный аттрактор A является канонически вложенным.

Пусть $W(O) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant \lambda^{-8}\}$ на множестве $U(O)$, $S_A = \mathbb{T}^2 \setminus int\, W(O)$ и $U_A = S_A \times [-\lambda^{-3}, \lambda^{-3}]$. Тогда $\Phi_A(U_A) = (\mathbb{T}^2 \setminus int\, V(O)) \times [-\lambda^{-4}, \lambda^4]$ и, более того, $\Phi_A(U_A) \subset int\, U_A$, и $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Phi_A^n(U_A) = A$. Это означает, что U_A — захватывающая окрестность для аттрактора A (см. рисунок 25).

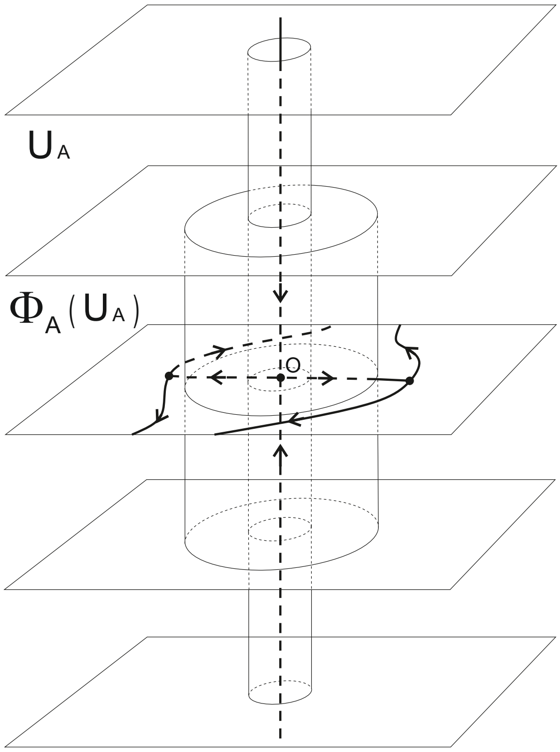

Рис. 25: Захватывающая окрестность аттрактора A

Рассмотрим диффеоморфизм $\Phi_R : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, заданный с помощью формулы

$$\Phi_R(w,z) = (\widehat{\Psi}_R(w), \varphi^{-1}(z)).$$

Тогда Φ_R — A-диффеоморфизм, неблуждающее множество которого состоит из седловой точки $O \times \{0\}$ и одномерного поверхностного репеллера R, расположенного на двумерном торе $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ так, что $W_A^u = (\mathbb{T}^2 \setminus O) \times \mathbb{R}$. Захватывающая окрестность U_R репеллера R в точности такая же, как для аттрактора A и, следовательно, поверхностный репеллер R является канонически вложенным.

Реализуем следующую схему конструкции диффеоморфизма f.

- для множества $(\mathbb{T}^2 \setminus O) \times \mathbb{R}$ построим его гладкое подмножество вида $K \cong G \times [0,1]$, где G — замкнутая ориентируемая поверхность рода 2, такое, что $\Phi_A(G \times \{0\}) = G \times \{1\}$, $\Phi_R(G \times \{1\}) = G \times \{0\}$ и K — фундаментальная область ограничения диффеоморфизма Φ_A на множество $W_A^s \setminus A$ и одновременно фундаментальная область ограничения диффеоморфизма Φ_R на множество $W_R^u \setminus R$;

- построим диффеоморфизм $H : K \to K$ такой, что $H(G \times \{0\}) = G \times \{1\}$, $H(G \times$

$\{1\}) = G \times \{0\}$,

$$H \circ \Phi_A|_{G\times\{0\}} = \Phi_R \circ H|_{G\times\{0\}}$$

и H может быть продолжен до диффеоморфизма $H : W^s_A \setminus A \to W^u_R \setminus R$, который сопрягает Φ_A с Φ_R;

- обозначим через M^3 трехмерное замкнутое ориентируемое многообразие, полученное в результате склейки W^s_A и W^u_R с помощью H, и через $p : W^s_A \sqcup W^u_R \to M^3$ естественную проекцию. Тогда искомый диффеоморфизм $f : M^3 \to M^3$ совпадает с диффеоморфизмом $p\Phi_A p^{-1}|_{p(W^s_A)}$ на $p(W^s_A)$ и с диффеоморфизмом $p\Phi_R p^{-1}|_{p(W^u_R)}$ на $p(W^u_R)$.

Лемма 8.3 ([3]*, Lemma 3)**.** *Существует гладкое подмногообразие K многообразия $(\mathbb{T}^2 \setminus O) \times \mathbb{R}$ и диффеоморфизм $H : K \to K$ такой, что*

- *$K \cong G \times [0,1]$, где G — замкнутая ориентируемая поверхность рода 2, $\Phi_A(G \times \{0\}) = G \times \{1\}$, $\Phi_R(G \times \{1\}) = G \times \{0\}$, причем K является фундаментальной областью ограничения диффеоморфизма Φ_A на множество $W^s_A \setminus A$ и одновременно фундаментальной областью ограничения диффеоморфизма Φ_R на множество $W^u_R \setminus R$.*
- *$H(G \times \{0\}) = G \times \{1\}$, $H(G \times \{1\}) = G \times \{0\}$ и*

$$H \circ \Phi_A|_{G\times\{0\}} = \Phi_R \circ H|_{G\times\{0\}}.$$

- *H может быть продолжен до диффеоморфизма $H : W^s_A \setminus A \to W^u_R \setminus R$, сопрягающего Φ_A с Φ_R.*

Доказательство: Пусть $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ в локальных координатах (x, y) в окрестности $U(O)$. Пусть $a_0 = \lambda^{-4}$, $b_0 = \lambda^{-5} - \lambda^{-6}$ и

$$L_0 = \left\{(r, z) : r = \lambda^{-5} - \frac{b_0}{a_0}\sqrt{a_0^2 - z^2}, \lambda^{-6} \leqslant r \leqslant \lambda^{-5}\right\}.$$

Пусть $G_0 \subset (\mathbb{T}^2 \setminus O) \times \mathbb{R}$ совпадает с L_0 для $\lambda^{-6} \leqslant r \leqslant \lambda^{-5}$ и с $M_0 = \mathbb{T}^2 \times \{\lambda^{-4}, \lambda^{-4}\}$ вне множества $\{(r, z) : r < \lambda^{-5}\}$ (см. рисунок 26). По построению, $G_0 \cong G$ для замкнутой ориентируемой поверхности G рода 2.

Определим функцию $\widehat{\mu} : \mathbb{T}^2 \to [0, 1]$ с помощью формулы $\widehat{\mu}(w) = \mu(r)$ в окрестности $U(O)$ и пусть $\widehat{\mu}(w)$ равна 1 вне $U(O)$. Для всех $t \in [0, 1]$ пусть $E_t : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ — диффеоморфизм, заданный с помощью формулы

$$E_t(w, z) = \left(\lambda^{t(1-\widehat{\mu}(w))}w, \lambda^{-t}z\right).$$

По построению, $\{G_t = E_t(G_0),\ t \in [0, 1]\}$ — семейство попарно непересекающихся поверхностей, каждая из которых диффеоморфна G. Тогда $K = \bigcup\limits_{t\in[0,1]} G_t$ диффеоморфна

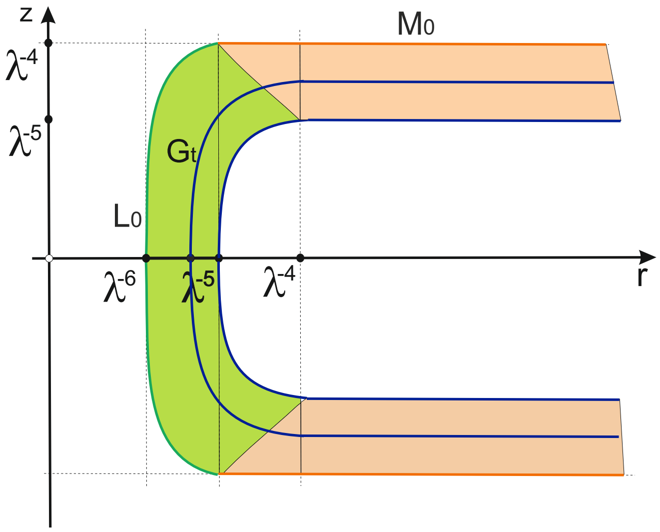

Рис. 26: Построение области K и диффеоморфизма H

$G \times [0,1]$. Так как $\Phi_A(x,y,z) = \left(\lambda x, \lambda y, \frac{z}{\lambda}\right)$ для всех $(x,y,z) \in L_0$, то $\Phi_A(L_0) = E_1(L_0)$. Так как $\Phi_A(w,z) = \left(\widehat{\Psi}_A(w), \frac{z}{\lambda}\right)$ для всех $(w,z) \in M_0$, то $\Phi_A(M_0) = E_1(M_0)$. Следовательно $\Phi_A(G_0) = G_1$. Более того, $\Phi_A(int\, K) \cap K = \emptyset$ и $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \Phi_A^n(K) = W_A^s \setminus A$. Тогда K — фундаментальная область ограничения диффеоморфизма Φ_A на множество $W_A^s \setminus A$.

Аналогично можно показать, что $\Phi_R(G_1) = G_0$ и K — фундаментальная область ограничения диффеоморфизма Φ_R на множество $W_R^u \setminus R$.

Теперь построим диффеоморфизм $H : K \to K$. Пусть диффеоморфизм $\widehat{B}_t : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $t \in [0,1]$ совпадает с

$$B_t(x,y) = (1-\sigma(t))B_A(x,y) + \sigma(t)B_R(x,y)$$

в окрестности $U(0)$ и тождественный вне $U(0)$. Пусть

$$\widehat{\Psi}_t = \widehat{B}_t \circ \widehat{C} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2.$$

Тогда $\widehat{\Psi}_0 = \widehat{\Psi}_A$ and $\widehat{\Psi}_1 = \widehat{\Psi}_R$. Определим диффеоморфизм $H : G \times [0,1] \to G \times [0,1]$ с помощью формулы

$$H(w,z,t) = \left(\widehat{\Psi}_t(w), \lambda^{2\sigma(t)-1}z, 1-\sigma(t)\right).$$

Заметим, что $H|_{G\times\{0\}} = \Phi_A|_{G\times\{0\}}$ и $H|_{G\times\{1\}} = \Phi_R|_{G\times\{1\}}$, тогда $H(G\times\{0\}) = G\times\{1\}$, $H(G\times\{1\}) = G\times\{0\}$ и $H\circ\Phi_A|_{G\times\{0\}} = \Phi_R \circ H|_{G\times\{0\}}$.

Так как $B_1 = B_R B_0 B_A^{-1}$, то H может быть продолжен до диффеоморфизма $H : W_A^s \setminus A \to W_R^u \setminus R$ с помощью формулы $H(w,z) = \Phi_R^k H \Phi_A^{-k}(w,z)$, где $(w,z) \in W_A^s \setminus A$ и $\Phi_A^{-k}(w,z) \in K$. Тогда H сопрягает Φ_A с Φ_R $\square$

8.2 Структурная неустойчивость построенных моделей

Построенные выше диффеоморфизмы являются Ω-устойчивыми, поэтому для исследования их структурной устойчивости необходимо описать поведение инвариантных двумерных многообразий диффеоморфизма f. Положим $L = \bigcup\limits_{t\in[0,1]} L^t$. Обозначим через L_+ четверть области L, заданную условием $x, y \geqslant 0$. На рисунке 27 представлены двумерные слоения аттрактора (зеленые поверхности) и репеллера (красные поверхности)диффеоморфизма f в области $p(L_+)$. Передняя и задняя границы куба — это $p(L_+ \cap Oxz)$ и $p(L_+ \cap Oyz)$, соответственно. Двумерные слоения в данной области имеют единственную кривую касания. Из соображений симметричности модели, диффеоморфизм f имеет в точности 4 кривые, вдоль которых касаются двумерные слоения. Таким образом, построенный диффеоморфизм не является структурно устойчивым.

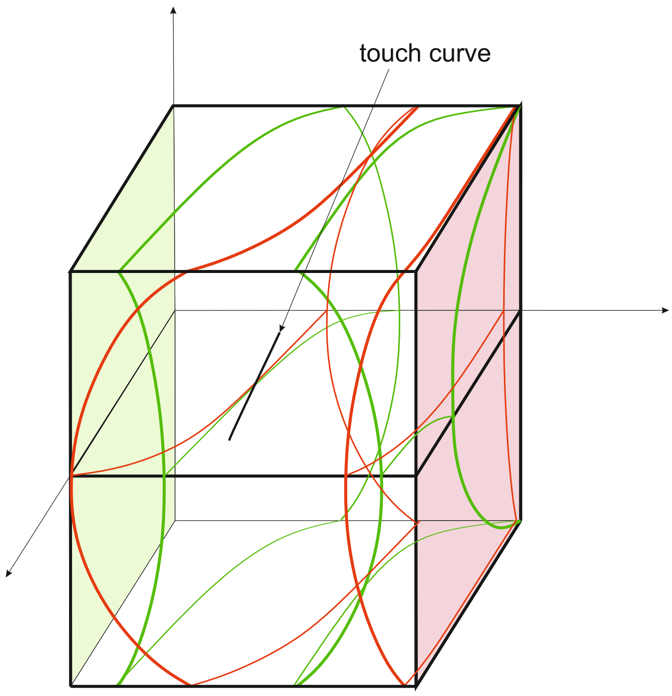

Рис. 27: Слои двумерных слоений диффеоморфизма f

8.3 Существование бесконечного множества попарно Ω-несопряженных диффеоморфизмов

Пусть f — Ω-устойчивый диффеоморфизм замкнутого ориентируемого трехмерного многообразия такой, что $R_f = A \cup R$, где A и R — связные канонически вложенные одномерные поверхностные аттрактор и репеллер.

Теорема 8 ([3]*, Theorem 1)**.** *Существует бесконечное число попарно Ω-несопряженных 3-диффеоморфизмов, неблуждающие множества которых попарно гомеоморфны и каждое из них является объединением канонически вложенных одномерных поверхностных аттрактора и репеллера.*

Доказательство теоремы 8 непосредственно следует из леммы 8.4 ниже.

Лемма 8.4. *Пусть Λ — связное нетривиальное базисное множество A-диффеоморфизма f, тогда Λ — базисное множество диффеоморфизма f^m для всех $m \in \mathbb{N}$. Более того, существует последовательность натуральных чисел $m_1 < m_2 < \dots < m_n < \dots$ таких, что диффеоморфизмы $f^{m_1}, f^{m_2}, \dots, f^{m_n}, \dots$ являются попарно Ω-несопряженными.*

Доказательство: Так как $\Lambda = W^u_\Lambda \cap W^s_\Lambda$ и $f(W^u_\Lambda) = W^u_\Lambda$, $f(W^s_\Lambda) = W^s_\Lambda$, то Λ — базисное множество для диффеоморфизма f^m для всех $m \in \mathbb{N}$. Более того, из аксиомы A следует, что периодические точки диффеоморфизма $f^m|_\Lambda$ всюду плотны в Λ, а значит их бесконечно много. Но среди них лишь конечное число точек заданного периода. Действительн, предположим противное: $f^m|_\Lambda$ имеет бесконечное число точек периода k. Тогда, в силу компактности Λ, $f^{mk}|_\Lambda$ имеет бесконечное число неподвижных точек, из которых можно выделить последовательность $\{p_n\} \subset \Lambda$, сходящуюся к неподвижной точке $p \in \Lambda$. А это противоречит тому факту, что у любой гиперболической точки существует окрестноть, внутри которой нет других неподвижных точек, кроме неё самой.

Следовательно, f^m имеет периодические точки бесконечного числа различных периодов и только конечное число точек заданного периода. Обозначим через $r_m \geqslant 0$ число неподвижных точек диффеоморфизма f^m. Пусть $m_1 = 1$ и $k_2 > 1$ — период некоторой периодической точки диффеоморфизма f^{m_1} и $m_2 = m_1 k_2$. Тогда $r_{m_2} > r_{m_1}$. Делая аналогичные выкладки для диффеоморфизма f^{m_2} получим m_3 такое, что $r_{m_3} > r_{m_2}$. Таким образом, найдется последовательность натуральных чисел $m_1 < m_2 < \dots < m_n < \dots$ таких, что $r_{m_1} < r_{m_2} < \dots < r_{m_n} < \dots$,а значит диффеоморфизмы $f^{m_1}|\Lambda, f^{m_2}|_\Lambda, \dots, f^{m_n}|_\Lambda, \dots$ не сопряжены. $\square$

8.4 Построение энергетической функции

Теорема 9 ([3]*, Theorem 2[[3]*, Theorem 1)**.** *] У каждого Ω-устойчивого диффеоморфизма, заданного на замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии M^3, неблуждающее множество которого состоит из объединения связных канонически вложенных одномерных поверхностных аттрактора и репеллера, существует гладкая энергетическая функция.*

Доказательство. Пусть f — Ω-устойчивый диффеоморфизм замкнутого ориентируемого 3-многообразия и $R_f = A \cup R$, где A и R — связные канонически вложенные одномерные поверхностные аттрактор и репеллер соответственно. По определению канонически вложенного аттрактора, существует захватывающая окрестность U_A такая, что $U_A \setminus int(f(U_A)) = S_g \times [0,1] = K^A$, и K^A — фундаментальная область бассейна аттрактора. Так как неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит только из аттрактора A и репеллера R, и они являются канонически вложенными, то блуждающее множество может быть представлено в виде:

$$M^3 \setminus (A \cup R) = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(K^A) = S_g \times (-\infty, +\infty)$$

так, что $\lim\limits_{t \to -\infty} S_g \times \{t\} = R$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} S_g \times \{t\} = A$. Таким образом, блуждающее множество расслаивается поверхностями S_g.

Тогда определим функцию $\varphi : M^3 \to [0, 1]$ следующим образом:

$$\varphi(w) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\text{arctg}\ t + \frac{1}{2}, & \text{если } w \in S_g \times \{t\}; \\ 1, & \text{если } w \in R; \\ 0, & \text{если } w \in A; \end{cases}$$

По построению, функция φ — непрерывная функция Ляпунова для f. Искомая энергетическая функция может быть получена в результате сглаживания функции φ на A и на R с помощью теоремы 1. $\square$

Заключение

Значительная часть настоящей диссертационной работы посвящена построению энергетических функций для Ω-устойчивых диффеоморфизмов с хаотической динамикой, заданных на 2- и 3-многообразиях. Основным результатом работы является конструктивное доказательство существования гладкой энергетической функции для следующих классов диффеоморфизмов:

- Ω-устойчивые диффеоморфизмы поверхности, все нетривиальные базисные множества которых являются одномерными (Теорема 2);
- структурно устойчивые 3-диффеоморфизмы с двумерным растягивающимся аттрактором или сжимающимся репеллером (Теорема 6);
- Ω-устойчивые 3-диффеоморфизмы с двумерным цепно рекуррентным множеством (Теорема 7);
- Ω-устойчивые 3-диффеоморфизмы с динамикой одномерный канонически вложенный поверхностный аттрактор-репеллер (Теорема 9).

Конструкция гладкой энергетической функции существенно опирается на динамические свойства рассматриваемых диффеоморфизмов и техническую

- теорему о сглаживании непрерывной функции (Теорема 1)

В классе Ω-устойчивых 3-диффеоморфизмов с динамикой одномерный канонически вложенный поверхностный аттрактор-репеллер диссертаном построено

- бесконечное множество попарно Ω не сопряженных диффеоморфизмов (Теорема 8).

Кроме того, в диссертационной работе доказан удивительный

- факт отсутствия энергетической функции (даже в непрерывной категории) у Ω-устойчивых диффеоморфизмов поверхности с нульмерным нетривиальным базисным множеством без пар сопряженных точек (Теорема 3).

Так же в работе частично решена проблема Смейла, касающаяся описания диаграмм Ω-устойчивых диффеоморфизмов, построенных на основе частичного порядка С. Смейла на множестве его базисных множеств. С помощью хирургической операции Смейла построены модельные диффеоморфизмы на двумерном торе и доказано, что

- любая диаграмма Смейла может быть реализована Ω-устойчивым диффеоморфизмом поверхности, являющимся связной суммой модельных диффеоморфизмов (Теорема 4);
- выделен подкласс связных сумм модельных диффеоморфизмов, для которых класс изоморфности размеченной диаграммы Смейла является полным инвариантом объемлющей Ω-сопряженности (Теорема 5).

Список литературы

[1] *Barinova M.* Existence of an Energy Function for Surface Diffeomorphisms with Zero-Dimensional Non-Trivial Basic Sets // Lobachevskii Journal of Mathematics. —2021. —Принято в печать.

[2] *Barinova M., Gogulina E., Pochinka O.* Omega-classification of Surface Diffeomorphisms Realizing Smale Diagrams // Russian journal of non-linear dynamics. —2021. —Принято в печать.

[3] *Barinova M., Grines V., Pochinka O., Yu B.* Existence of an energy function for three-dimensional chaotic "sink-source" cascades // Chaos. —2021. —*31*, No. 6.

[4] *Birkhoff, G.* Lattice Theory, volume 25 of American Mathematical Society colloquium publications, 3rd Revised ed., American Mathematical Society, 1940.

[5] *Guelman N., Bonatti Ch.* Axiom A diffeomorphisms derived from Anosov flows // Journal of Modern Dynamics. —2010. —*4*. —P. 1–63.

[6] *Brown A.* Nonexpanding Attractors: Conjugacy to Algebraic Models and Classification in 3-Manifolds // Journal of Modern Dynamics. —2010. —*4(3)*. —P. 517–548. 3-MANIFOLDS

[7] *Conley C.* Isolated Invariant Sets and Morse Index // CBMS Regional Conference Series in Math. —1978. V. 38.

[8] *Franks J.* Anosov Diffeomorphisms // Global Analysis: Proc. Simp. in Pure Math. 14. AMS, Providence, R.I. —1970. —P. 61–94.

[9] *Franks J.* Nonsingular Smale Flow on S^3 // Topology. —1985. — *24*, No 3. — P. 265–282.

[10] *Franks J.* A variation on the Poincare-Birkhoff theorem // Hamiltonian dynamical systems, Proc. AMS-INS-SIAM, Meyer Ed. AMS. Contemporary Math. —1988. —*81*. —P. 111–117.

[11] *Gibbons J.* One-Dimensional Basic Sets in the Three-Sphere // Transactions of the American Mathematical Society. —1972. —*164*. —P. 163–178.

[12] *Grines V., Laudenbach F., Pochinka O.* Self-indexing energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds // Moscow Math. Journal. —2009. — *9*, No 4. —P. 801–821.

[13] *Grines V., Laudenbach F., Pochinka O.* Dynamically ordered energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. —2012. —*278*, No 1. —P. 27–40.

[14] *Grines V., Levchenko Y., Medvedev V., Pochinka O.* The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets // Nonlinearity. — 2015. —V. 28, No 11, 4081-4102.

[15] *Grines V., Medvedev T., Pochinka O.* Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. — Springer International Publishing Switzerland. —2016. —364 P.

[16] *Grines V., Zhuzhoma E.* On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors // Trans. Amer. Math. Soc. —2005. — *357*, No 2. —P. 617–667.

[17] *Harary F.* Graph Theory. Addison-Wesley, Reading, MA —1969.

[18] *Kaplan J., Mallet-Paret J. Yorke J.* The Lapunov dimension of nonwhere difffernetiable attracting torus // Ergodic theory and Dynam. Systems. —1984. — *2*. —P. 261–281.

[19] *Medvedev T., Pochinka O.* The wild Fox-Artin arc in invariant sets of dynamical systems // Dynamical Systems. —2018. — *33*, No 4. —P. 660–666.

[20] *Newhouse, S.* On codimension one Anosov diffeomorphisms // Amer. J. Math. —1970 — *92*. No. 3. —P. 761–770.

[21] *Palis, J. and De Melo, W.* Geometric theory of dynamical systems. Springer —1982.

[22] *Pixton D.* Wild unstable manifolds // Topology. —1977. — *16*. —P. 167–172.

[23] *Robinson C.* Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos // Studies in Adv. Math., Sec. edition. CRC Press. —1999. —506 P.

[24] *Robinson R., Williams R.* Finite Stability is not generic // Academic Press, New York. —1973. —P. 451–462.

[25] *Rolfsen D.* Knots and Links. Mathematics lecture series. —Publish or Perish. —1976.

[26] *Shi Y.* Partially hyperbolic diffeomorphisms on Heisenberg nilmanifolds and holonomy maps // Comptes Rendus Mathematique. —2014. —*352*, No. 9. —P. 743-747.

[27] *Sinai, Ya.* Markov partitions and C-diffeomorphisms // Funct. Anal. Appl. —1968. — *2:1*. —P. 61–82.

[28] *Smale S.* Morse inequalities for a dynamical system // Bull. Amer. Math. Soc. — 1960. *66*. —P. 43–49.

[29] *Smale S.* On gradient dynamical systems // Annals Math. —1961. — *74*. —P.199–206.

[30] *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. —1967. —*73*. — P. 747–817. Имеется перевод: Успехи мат. наук. —1970. —*25*. —P. 113–185.

[31] *Smale S.* The Ω-stability theorem // same Proceedings. —1970. —*14*. —P. 289–297.

[32] *Vogt H. G.* Leeons sur la resolution algebrique des equations. —Nony. —1895.

[33] *Williams R.* The DA maps of Smale and Structural Stability // Proc. Amer. Math. Soc. —1970. —*14.* —P. 329–334.

[34] *Wilson W.* Smoothing derivatives of functions and applications// Trans. Amer. Math. Soc. —1969. —*139.* —P. 413–428.

[35] *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. —1967. —*90.* —С. 1–210.

[36] *Аносов Д.В.* Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических ситем // Труды пятой международной конференции по нелинейным колебаниям. Качественные методы. Ин-т математики АН УССР. —1970. —*2.* —С. 39–45.

[37] *Арансон С.Х., Гринес В.З.* Топологическая классификация каскадов на замкнутых двумерных многообразиях // УМН. —1990. —*45*, вып. 4. —С. 3–32.

[38] *Арансон С.Х., Гринес В.З.* Каскады на поверхностях. Глава 3 в кн. "Динамические системы с гиперболическим поведением". Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. —М.: ВИНИТИ РАН. —1991. —*66.* —С. 148–187.

[39] *Баринова М. К., Гогулина Е. Ю., Починка О. В.* Реализация ациклической диаграммы Смейла омега-устойчивым диффеоморфизмом поверхности // Огарёв-Online. —2020. —No. 13. —С. 1–10.

[40] Гладкие динамические системы. —М.: Мир. —1977. —267 с.

[41] *Гринес В.З.* О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах I // Труды ММО. —1975. —*32.* —С. 35–61.

[42] *Гринес. В. З.* О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах II // Тр. ММО. —1977. —*34.* —С. 243–252.

[43] *Гринес В.З., Лауденбах Ф., Починка О.В.* Квази-энергетическая функция для диффеоморфизмов с дикими сепаратрисами // Математические заметки. —2009. — *86*, No 2. — С. 175–183.

[44] *Гринес В.З., Медведев В.С., Жужома Е.В.* О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях // Мат. зам. —2005. — *78*, No 6. —С. 813 – 826.

[45] *Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О.В.* Энергетическая функция для А-диффеоморфизмов поверхностей с одномерными нетривиальными базисными множествами // Динамические системы. —2015. — *5*, No 1–2. — С. 31–37.

[46] *Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О.В.* Построение энергетической функции для трёхмерных каскадов с двумерным растягивающимся аттрактором // Труды Московского математического общества. —2015. — *76*, No 2. — С. 271–286.

[47] *Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В.* Построение энергетической функции для А-диффеоморфизмов с двумерным неблуждающим множеством на 3-многообразиях // Труды Средневолжского математического общества. —2015. — *17*, No 3. — С. 12–17.

[48] *Гринес В.З., Жужома Е.В.* Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один // Известия РАН, сер. матем. —2002. — *66*, No 2. —С. 3–66.

[49] *Гринес В.З., Жужома Е.В., Куренков Е.Д.* О DA-эндоморфизмах двумерного тора // Мат. сборник. —2020. review

[50] *Гринес В.З., Жужома Е.В., Починка О.В.* Грубые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один // СМФН. —2015. — *57*. —С. 5-–30.

[51] *Калай Х. Х.* О топологической классификации А-диффеоморфизмов с нетривиальными базисными множествами на двумерных многообразиях: Кандидатская диссертация; Горьковский Государственный Университет им. Н. И. Лобачевского. —1988.

[52] *Каток А., Хассельблатт Б.* Введение в современную теорию динамических систем. —Факториал —1999. —767 С.

[53] *Медведев В.С., Жужома Е.В.* О неориентируемых двумерных базисных множествах на 3-многообразиях // Мат. сборник. —2002. — *193*, No 6. —С. 83–104.

[54] *Meyer K. R.* Energy functions for Morse-Smale systems // Amer. J. Math. —1968. — *90*. — P. 1031–1040.

[55] *Милнор Дж.* Теория Морса. Издательство “Платон”. —1969. —184 С.

[56] *Митрякова Т. М., Починка О. В., Шишенкова А.Е.* Энергетическая функция для диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством // Журнал средневолжского математического общества. —2012. — Т. *14*, No 1. —С. 98–107.

[57] *Плыкин Р.В.* О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла // Мат. сб. —1971. —*13*. —С. 297–307.

[58] *Плыкин Р.В.* Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей.// Матем. сб. —1974. —*94*. —.С. 243–264.

[59] *Плыкин Р.В.* О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов // Успехи мат. наук. —1980. —*35*, No. 3. —С. 94–104.

[60] *Плыкин Р.В.* О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов // УМН. —1984. —*39*, No. 6(240). —С. 75–113.

[61] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. —М.: Факториал. —1998.