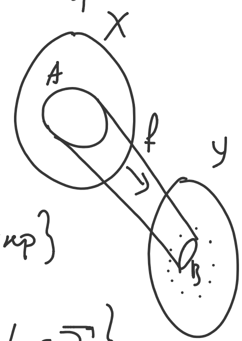
X и Y — топологические пространства

$\mathcal{F}(X,Y) = \{f: X \to Y \mid f$ — непрерывна$\}$



A — компактно в X, B — открыто в Y

$F(A,B) = \{f \in \mathcal{F}(X,Y) \mid f(A) \subset B\}$

$\varphi = \{F(A,B) \mid A \subset X$ — комп., $B \subset Y$ — откр$\}$

$\Sigma_1 = \{\bigcap_{i=1}^{n} F_i \mid F_i \in \varphi\}$ $\mathcal{U} = \{\bigcup_{j \in J} V_j \mid V_j \in \Sigma_1\}$

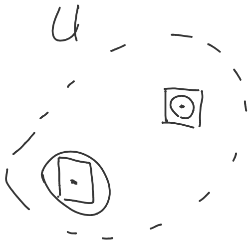
Пусть X — компактное метрическое пр-во

Y — метрическое пр-во с метрикой d.

Тогда d^* — метрика на $\mathcal{F}(X,Y)$

$$d^*(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

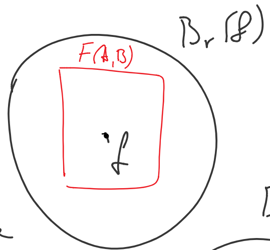
Доказать, что $\mathcal{U}$ совпадает с τ_{d^*}



$F(A,B) \in \Sigma_1$

• $B_r(f) = \{g \in \mathcal{F}(X,Y) \mid d^*(g,f) < r\}$

Хотим: $F(A,B) \subset B_r(f)$.

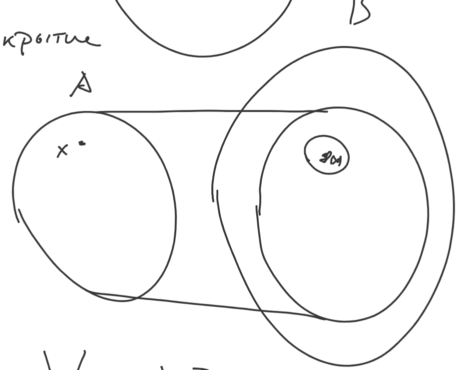


X — компактное

$\{f^{-1}(B_\varepsilon(y_i))\}$ — откр. покрытие

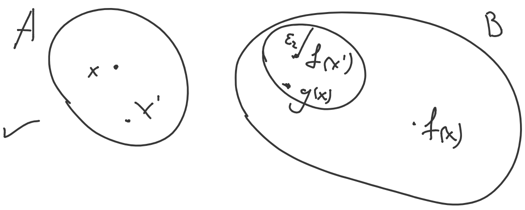
U_1^ε $A = \overline{U_1}$

$$B = \bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon_2}(f(x))$$



$g \in F(A,B) \to g(A) \subset B$

$\to g(x') \in \bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon_2}(f(x)) \to \forall x \in A\ \exists x' \in A:$



$\to d(f(x'), g(x)) < \varepsilon_2$ ✓

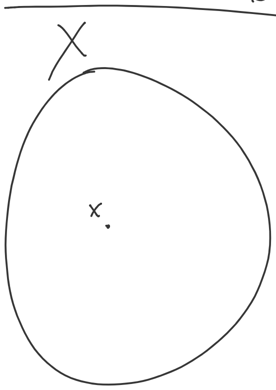
$d(f(x), f(x')) \le 2\varepsilon$

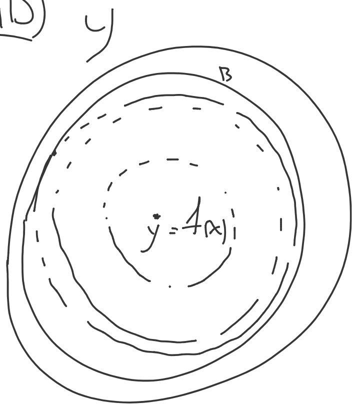
$d(f(x), g(x)) < d(f(x), f(x')) + d(f(x'), g(x)) \le$
$\le 2\varepsilon + \varepsilon_2 < r/2$

$d^*(g, f) < r/2 \Rightarrow g \in B_r(f)$, то есть $F(A,B) \subset B_r(f)$

- Пусть $f \in F(A,B)$,

Хотим: $\exists r: B_r(f) \subset F(A,B)$





$x \in A$ $\quad R(x) = R'(f(x))$ $\qquad R'(y) = \sup\{r \mid B_r(y) \subset B\}$

Утв а) R — непрерывна

б) $R(x) > 0$ $\qquad R: A \to \mathbb{R}$

в) min достигается $\qquad R_{min} = \min R(x)$

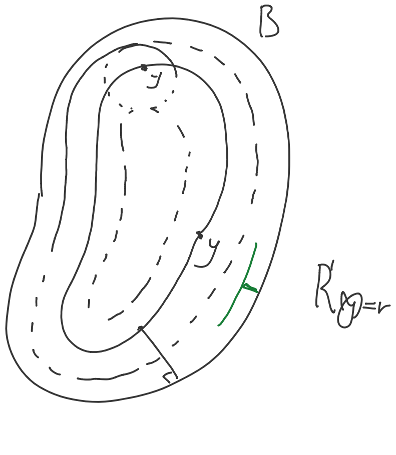
Доказываем

$r \in \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\quad V = (r-\varepsilon, r+\varepsilon)$

$R'^{-1}(V) = U \subset Y$

и

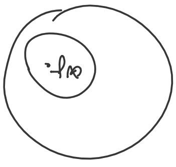
$\bigcup_{y' \in R'^{-1}(r)} B_\varepsilon(y')$



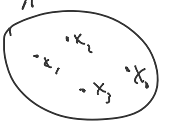
б) $R(x) > 0$ $\quad \forall x \in A$

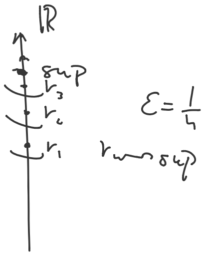
$f(A) \subset B \to f(x) \in B$ - откр $\exists r_0 > 0 \quad B_{r_0}(f(x)) \subset B$

в) $R(A)$ - комп. в $\mathbb{R}$



замкн. и огр. $\square$





$\varepsilon = \frac{1}{4}$

$$R_{min} = \min_{x \in A} R(x)$$

Утв $B_{R_{min}}(f) \ni g \Rightarrow g \in F(A,B)$ $\subset F(A,Y)$

Док

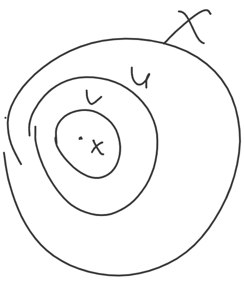
$\forall x \in A \quad d(g(x), f(x)) < R_{min}/2 \Longrightarrow$

$\forall x \in A \quad g(x) \in B^Y_{R_{min}/2}(f(x)) \subset B^Y_{R(x)}(f(x)) \subset B$

$g(A) \subset B \to g \in F(A,B)$. $\blacksquare$

f) X - лок. комп. т.п. ($\forall x \in X \quad \forall U_x \ni x$

$\exists V_x \ni x$ - комп $: \quad x \in V_x \subset U$)

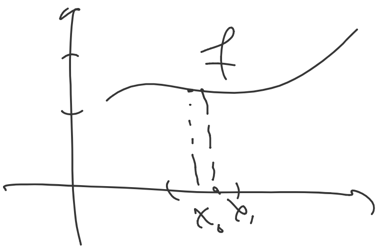


Доказать: $e : \mathcal{F}(X, Y) \times X \to Y$

$e(f, x) = f(x)$ - непрерывно

- отображение вычисления.

Доказательство



f - неп $\Rightarrow f^{-1}(B)$ - откр. в X (откр в Y)

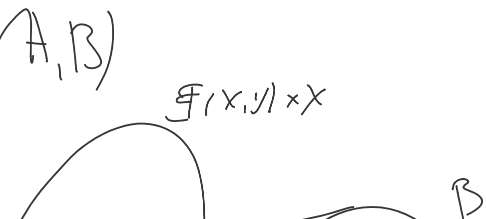
$= U$

~~$y \in B$, x: $f(x) = y$~~ $\Rightarrow \exists A \subset U$ (X - лок комп, $\ni x$, комп)

$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$

Тогда $f(A) \subset B \Longrightarrow f \in F(A,B)$

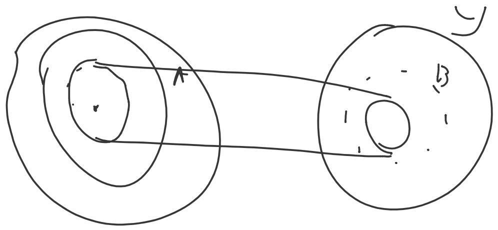
Тогда $F(A,B) \times A \ni (f, x)$

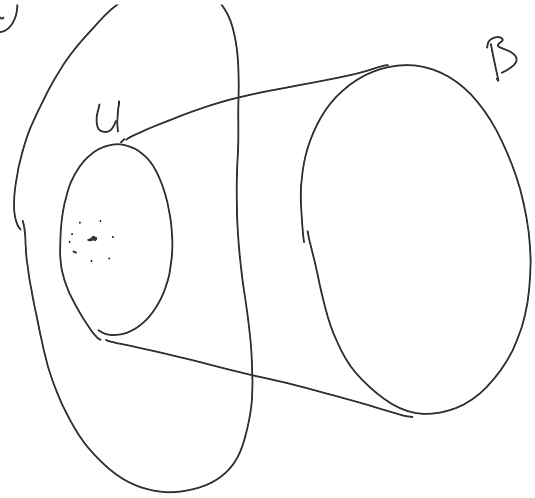


$e(F(A,B) \times A^\circ) \subset B$

$e(F(A,B)\times A)\subset B$

$F(x,y)\times X$





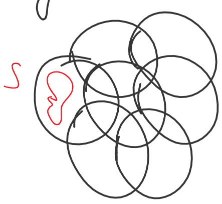
e – непр ⇒

g) (X, d) – метр. пр-во
X – комп.

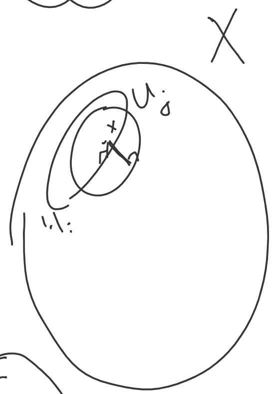
Д-ть: $\forall \{U_j\}$ – откр. покр $\exists \delta>0 : \forall S\subset X :$
$\operatorname{diam} S<\delta \Rightarrow j\in J : S\subset U_j$

Доказ-во:

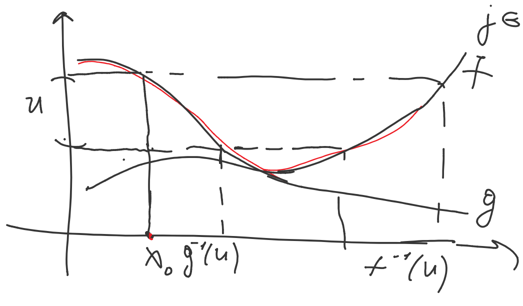
Можем считать, что $J=K$ – конечно.

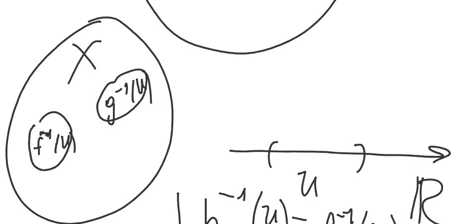


$R_j(x) = d(x, X\setminus U_j) = \inf\limits_{y\in X\setminus U_j} d(x,y)$



R_j – непр. как и $R(x)=\max\limits_{j\in J} R_j(x)$



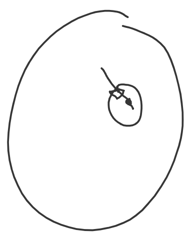


$\max\{f,g\}=h \;\Big|\; h^{-1}(U) = f^{-1}(U)\cap g^{-1}((-\infty,\sup U)) \cup g^{-1}(U)\cap f^{-1}((-\infty,\sup U))$

$X\setminus U_j$ – замкнуто, $R_j(x)=0 \Leftrightarrow$
$x\in X\setminus U_j \quad \forall j$

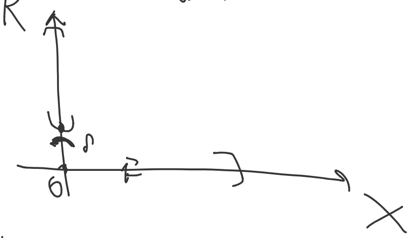
Но $\{U_j\}$ – покр-е $\Rightarrow R(x)>0 \;\; \forall x\in X$

$R(X)\subset D \Rightarrow \exists c$



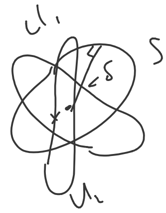
$\underline{R(X)} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \exists \delta > 0 : R(x) > \delta \quad \forall x \in X$

R ← комп.



Хотим:

Д-м $\operatorname{diam} S < \delta \Rightarrow S \subset U_j$



$\underline{x \in S} \Rightarrow R(x) > \delta \Rightarrow \exists_j \; R_j(x) > \delta$ при нек. $j \Rightarrow$

$x \in U_j \to S \subset U_j$

4) X – т.п.

$X^\infty = X \cup \{\infty\}$, $\underline{\tau^\infty} = \tau \cup \{V \cup \{\infty\} \mid V \subset X$

$X \setminus V$ – комп. замкн. в $X\}$

$X \subset X^\infty$ с инд топ.

X^∞ – комп.