Компактные пространства

19 апреля 2022 г. 12:55

Опр. $S \subset X$ $(X - \text{ТП})$ — компактно, если $\forall \{U_j \mid j \in J\}$ такого, что

1. $\bigcup_{j \in J} U_j \supset S$
2. $\forall U_j$ — открыто

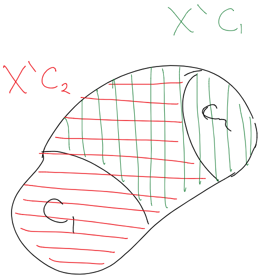
$\exists K \subset J$:

1. $|K| < +\infty$
2. $\bigcup_{k \in K} U_k \supset S$

Утв (b) X — (ТП) компактно $\iff \forall \{C_j \mid j \in J\}$, C_j — замкнутое, $\bigcap_{j \in J} C_j = \varnothing$ $\exists$ конечное подмножество $(K \subset J)$ $|K| < +\infty$: $\bigcap_{k \in K} C_k = \varnothing$.

Доказательство.

Заметим, что $\bigcap_{j \in J} C_j = \varnothing \iff \bigcup_{j \in J} (X \setminus C_j) = X$



$\Rightarrow)$ X — компактно и $\{C_j\}$, $\bigcap_{j \in J} C_j = \varnothing \Rightarrow$

$\Rightarrow \{X \setminus C_j \mid j \in J\}$ — открытое покрытие

$\Rightarrow K \subset J$, $|K| < +\infty$ и $\bigcup_{k \in K} X \setminus C_k = X \Rightarrow \bigcap_{k \in K} C_k = \varnothing$.

(c) $\mathcal{F}$ — топология на $\mathbb{R}$:

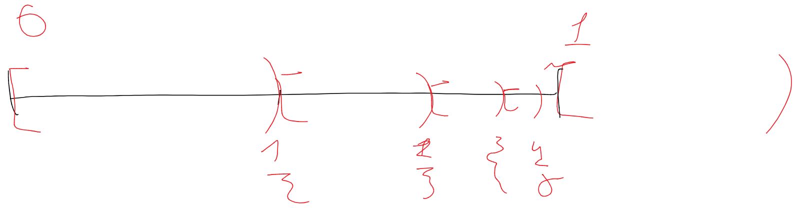
$$U \in \mathcal{F} \iff \forall s \in U \ \exists t > s : [s, t) \subset U.$$

Д-ть: $[0, 1]$ — не компактен.

Доказательство

1. Заметим $[a, b)$ открыто, т.к. $\forall s \in [a, b)$ $\exists t = b$: $[s, t) \subset [a, b)$.

2



$$\{[0, \tfrac{1}{2})\} \cup \{[1 - \tfrac{1}{n}, 1 - \tfrac{1}{n+1}) \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} \cup \{[1, 2)\}$$

3 $(\mathbb{N}, \tau)$ ТП

(X, τ) — ТП

1. $S \subset X$ — компактно

$\forall$ откр. покр-я $\{U_j\}$: $\bigcup_{j\in J} U_j \supset S$ $\exists K \subset J$: $|K| < +\infty$ $\bigcup_{k\in K} U_k \supset S$

2. $(S, \tau_{инд})$

$\bigcup_{j\in J} U_j = S$

7.6. Теорема. Подмножество $S \subset X$ компактно $\Leftrightarrow$ $(S, \tau_{инд})$ — компактно.

Доказательство.

$\Rightarrow)$ $S \subset X$ — компактно

Δ $(S, \tau_{инд})$, $\{U_j \mid U_j \in \tau_{инд}\} = \{V_j \cap S \mid V_j \in \tau_X\}$, $\bigcup_{j\in J} V_j \supset S$

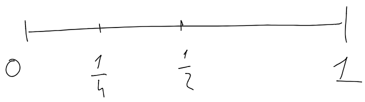
$\longrightarrow \{U_k \mid U_k \in \tau_{инд}\} = \{V_k \cap S \mid V_k \in \tau_X\}$, $K \subset J$, $|K| < +\infty$, $\bigcup_{k\in K} V_k \supset S$

$\Leftarrow)$ $(S, \tau_{инд})$

7.7. Теорема (Лемма Бореля) $[0,1] \subset (\mathbb{R}, \tau_{об})$ — компактен.

Доказательство

$\{U_j\}$ — откр. покрытие $[0,1]$ такое что нельзя выбрать кон. подпокрытие



$[0,1] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$

$b_n - a_n = 2^{-n}$

$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \rightarrow a_m \leq b_n \ \forall m,n \in \mathbb{N}$

$a = \sup\{a_i\}$, $b = \inf\{b_i\}$ $\longrightarrow$ $a \leq b_n$, $a_n \leq b$

$a_n \leq a \leq b \leq b_n \Rightarrow b - a \leq 2^{-n} \ \forall n \in \mathbb{N}$

$b = a$

$a \in [0,1]$, $\bigcup U_j \supset [0,1]$ $\longrightarrow \exists j \in J$ $a \in U_j$

U_j – открыто $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \ (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U_j$

$\exists N \in \mathbb{N} : \ 2^{-N} < \varepsilon \Rightarrow b_N - a_N < \varepsilon$

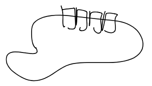
$a \in b$ $\left.\begin{array}{l} a - a_N < 2^{-N} < \varepsilon \\ b - b_N < 2^{-N} < \varepsilon \end{array}\right| \Rightarrow [a_N, b_N] \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U_j$ ▣

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Лемма Бореля

Теорема Кантора (Э. Гейне)
Функция непр. на $[a,b]$, то она равн. непр. на $[a,b]$

$f: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$
Теорема Жордана



$[0,1]^n$ – компакт.

7.8. Теорема $f: X \to Y$ – непрер.
Если $S \subset X$ – компактн., то $f(S)$ – компакт.
Доказательство:

$\{U_j \mid j \in J\}$ – откр. покрытие $f(S)$

$U_j \in \tau_Y$

$f^{-1}(U_j) = V_j \in \tau_X \quad \{V_j \mid j \in J\} \supset S$

$\exists |K| < +\infty$

$\{V_k \mid k \in K\} \supset S$

$f(V_k) = f(f^{-1}(U_k)) \subset U_k$

$S \subset \bigcup_{k \in K} V_k$

$f(S) \subset \bigcup_{k \in K} f(V_k) \subset \bigcup_{k \in K} U_k$ ▣

7.9. Следствия
a) $\forall [a,b] \subset (\mathbb{R}, \tau_{st})$ – компакт.
b) $X \cong Y$. X – комп $\Leftrightarrow Y$ – комп.
c) X – комп ТП. $f: X \to Y$ – фактор-отобр (f – сюръект.)
$\Rightarrow Y = f(X)$ – компактн.

d) $\mathbb{S}^1$ – компактное ТП.

Для d): $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^1/\mathbb{Z}$, $p: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{S}^1$ – ~~канон~~ естеств. проекция.

$\left.\begin{array}{l} p([0,1]) = \mathbb{S}^1 \\ [0,1] \text{ – компакт} \end{array}\right| \to \mathbb{S}^1$ – комп

Примеры

$[0,1] \not\cong (0,1)$

$\{ (\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \}$

7.10. Теорема

Замкнутое подмн-во комп. пр-ва — компактно.

Доказательство:

X — компактно

$S \subset X$: $\underset{U}{X \setminus S}$ — открыто

$\{V_i \mid i \in J\}$ — откр. покр. S

$$(\bigcup V_i) \cup U \supset X \Rightarrow \exists V_K : (\bigcup_{k \in K} V_k) \cup U \supset X \Rightarrow \quad |K| < +\infty$$

$$\Rightarrow \bigcup V_k \supset S$$

7.11. Теорема

Пусть X и Y — ТП.

X и Y — компактные $\Longleftrightarrow$ $X \times Y$ — компактное.

Доказательство

$\Rightarrow)$ X и Y — комп. Пусть $\{W_j \mid j \in J\}$ — откр. покр $X \times Y$.

$\forall W_j = \bigcup_{k \in K} (U_{j,k} \times V_{j,k})$, $U_{j,k} \in \tau_X$, $V_{j,k} \in \tau_Y$

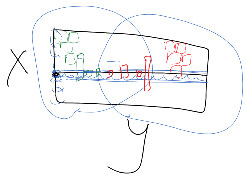
Тогда $(*)$ — $\{U_{j,k} \times V_{j,k} \mid j \in J, k \in K\}$ — откр. покр. $X \times Y$.

$\forall x \in X$ $\{x\} \times Y \cong Y$ — компактно.

$(*)$ покрывает $\{x\} \times Y$ $\exists U_i^{(x)} \times V_i^{(x)}$ $i = \overline{1, n(x)}$ $n(x) \in \mathbb{N}$

$\{x\} \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{n(x)} U_i^{(x)} \times V_i^{(x)}$

Обозначим: $U'(x) = \bigcap_{i=1}^{n(x)} U_i(x) \ni x$



$\{U'(x) \mid x \in X\}$ — покрытие X

$\{U'(x_s)\ s = \overline{1,m}\}$ — конечное подпокр-е X

Очевидно $\{U'(x_s) \times V_{k_s}(x_s) \mid s = 1, \dots, m,\ k_i = 1, \dots, n(x)\}$ — конечное покр. $(*)$ $X \times Y$.

$\forall i, k_i$ $\exists j \in J$ $k \in K$: $U'(x_i) \times V_{k_i}(x_i) \subset U_{j,k} \times V_{j,k} \subset W_j$

$\{W_j \mid j \in J\}$ — конечное подпокр.

$\Leftarrow)$ $X \times Y$ — комп. $\overset{?}{\Rightarrow}$ X — комп.

Π_X — непр, а $X = \Pi_X(X \times Y)$. ∎

$$e : \mathcal{F}(X, Y) \times X \to Y$$

$e(f, x) = f(x)$ Всё.