Нижегородская открытая ОСЕННЯЯ олимпиада
по математике для 5-7-х классов

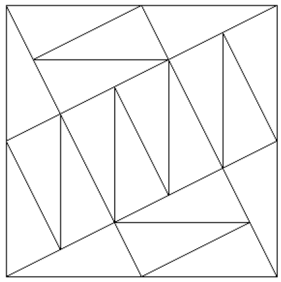
<u>Комментарий</u>: *Обращаем внимание участников олимпиады, что практически все по-настоящему олимпиадные задачи имеют короткие красивые решения, опирающиеся на концепцию – ключевую идею решения всех задач «В любом процессе ищи соответствующий инвариант!». Инвариант – неизменное, постоянное свойство. Например, классическим методом построения большинства комбинаторных конструкций на досках является метод пропеллера (см. задачи 7.2, 6.2 и 5.1). Советуем проанализировать решение каждой задачи с точки зрения опоры на инварианты соответствующего процесса.*

<u>7 класс</u>

1. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, в котором любые три подряд идущие цифры образуют чётное трёхзначное число.

<u>Ответ</u>**:** 9786420. ***<u>Решение:</u>*** Число содержит максимум 5 чётных цифр (в конце числа) и 2 нечётных цифры (в начале числа), значит, в числе максимум 7 цифр.

2. Каждую из 10 прямоугольных плиток 1×2 распилили по диагонали на 2 треугольных куска. Сложите из получившихся 20 кусков квадрат.



<u>Решение:</u> см. конструкцию методом пропеллера.

3. В однокруговом (каждый с каждым должен сыграть 1 раз) шахматном турнире участвовало 30 шахматистов. У какого наибольшего числа шахматистов по окончании турнира могло оказаться ровно 5 очков? (победа – 1 очко, ничья – 1/2 очка, поражение – 0 очков)

<u>Ответ:</u> 11, например, когда 11 шахматистов сыграют между собой вничью и проиграют всем остальным шахматистам. ***<u>Решение:</u>*** Предположим, что могло быть хотя бы 12 шахматистов с 5 очками. Между собой такие 12 человек сыграли $12\cdot11/2=66$ партий и разыграли 66 очков, т.е. в сумме уже набрали не менее 66 очков, что больше $12\cdot5=60$ очков, которые они имеют. Противоречие.

4. Докажите, что среди чисел $10^{100}+1$, $10^{101}+1$, $10^{102}+1$, $10^{103}+1$ найдётся число, взаимно простое с остальными тремя.

<u>Доказательство:</u> Таким числом точно будет $10^{102}+1$. Рассмотрим его разность с каждым из других чисел:

1). $(10^{102}+1)–(10^{100}+1)=10^{100}\cdot99=2^{100}\cdot5^{100}\cdot3^2\cdot11$ взаимно просто с $10^{102}+1$, т.к. это число не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 11 (согласно признакам делимости).

2). $(10^{102}+1)–(10^{101}+1)=10^{101}\cdot9=2^{100}\cdot5^{100}\cdot3^2$ взаимно просто с $10^{102}+1$, т.к. это число не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5.

3). $(10^{103}+1)–(10^{102}+1)=10^{102}\cdot9=2^{100}\cdot5^{100}\cdot3^2$ взаимно просто с $10^{102}+1$, т.к. это число не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5. Значит, наше третье число взаимно просто с каждым, что и требовалось доказать.

5. Можно ли на плоскости отметить 2022 точки таким образом, что для любых двух отмеченных точек найдётся ещё одна отмеченная точка, равноудаленная от них?

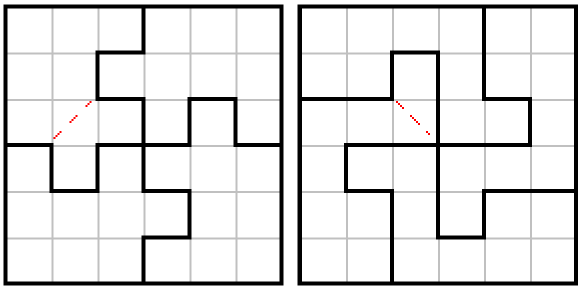
<u>Ответ:</u> Можно. ***<u>Решение:</u>*** Отметим одну точку O как центр окружности, а остальные 2021 точку разместим на этой окружности так, чтобы 2018 из них разбились на 1009 пар (типа A и B – см. рис.), дающих равносторонний треугольник ABO, а ещё три точки создали 1 ромб типа $OCDE$ из двух равносторонних треугольников. Тогда для любой пары отмеченных точек на окружности равноудалённой от них будет O. Для любой отмеченной точки на окружности и точки O равноудалённой окажется третья вершина равностороннего треугольника, которая также лежит на окружности.

6 класс

1. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, в котором любые три подряд идущие цифры образуют нечётное трёхзначное число.

Ответ: 8697531. ***Решение:*** Число содержит максимум 5 нечётных цифр (в конце числа) и 2 чётных цифры (в начале числа), значит, в числе максимум 7 цифр.

2. Клетчатый квадрат 6×6 разрезан на четыре равные части по границам клеток. Может ли так быть, что никакая часть не вывалится при любом положении квадрата на вертикальной стенке, если остальные три части приклеены?



Комментарий: *КРУТИ ПРОПЕЛЛЕР! Начинаем из центра квадрата во всех четырёх направлениях, одинаково поворачивая при повороте на 90°.*

Ответ: да, может. Задача имеет много решений – см. некоторые на чертежах, где пунктирной линией указано проблемное место, за счёт которого никакой кусок не вывалится, если три другие куска будут приклеены.

3. В магазине есть палочки только простых длин, но зато всех: 2 см, 3 см, 5 см, 7 см, и т.д. Какое наименьшее число палочек разных длин можно купить, чтобы сложить из них контур квадрата?

Комментарий: *Классный магазин – с бесконечным числом палочек:☺.*

Ответ: 8 палочек. ***Решение:*** Наименьшее число палочек достигается, когда на каждую сторону квадрата пошло не меньше двух палочек. Предположим, это не так и на какую-то сторону квадрата мы использовали одну палочку длиной p, при этом общее число палочек получилось меньше 8. Такая сторона ровно одна (все палочки разные). Причем p - нечётное, т.к. мы не можем составить число 2 из нескольких других простых чисел. Рассмотрим оставшиеся стороны. Они равны p, при этом палочка длины 2 входит в состав максимум одной из них. В этой стороне палочек не меньше двух, в оставшихся сторонах - не меньше трёх (т.к. все остальные простые числа нечётны, а сумма двух нечётных чисел чётна и не может равняться p). Тогда всего палочек не меньше 9. У нас же есть пример на 8. Значит, наименьшее число палочек достигается, когда на каждую сторону квадрата пошло не меньше двух палочек, и это число как минимум 8. Пример на 8 – квадрат со стороной 90. Палочки с длинами 29, 31, 37, 43, 47, 53, 59, 61, где 29 + 61 = 31 + 59 = 37 + 53 = 43 + 47 = 90.

4. Барон Мюнхгаузен разложил 10 фруктов на чаши весов. Далее он 6 раз сделал такую операцию: поменял два фрукта с правой чаши с одним фруктом с левой. Барон утверждает, что вначале и после каждой операции весы были в равновесии. Могут ли его слова быть правдой?

Ответ: могут. ***Пример:*** Пусть на левой чашке изначально лежат фрукты массой 8 и 8, а на правой 4, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1, оба набора массой 16. Операции: 1) меняем 8=4+4: 8+2·4=8+2·2+4·1; 2) меняем 4=2+2: 8+2·2+4=8+4+4·1, 3) меняем 2=1+1: 8+4+2+2·1=8+4+2+2·1; 4) меняем 2=1+1: 8+4+4·1=8+4+2·2; 5) меняем 4=2+2: 8+2·2+4·1=8+2·4; 6) меняем 8=4+4: 4+4+2+2+1+1+1+1=8+8. Значит, слова Мюнхгаузена могли быть правдой.

Комментарий 1: *Классическая ситуация, когда надо воспользоваться свойством суммы степеней двойки:* $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$, *но в самом простейшем случае:☺.*

<u>Комментарий 2</u>: *Как показывает статистика задач про барона Мюнхгаузена, он чаще оказывается прав, приводя реальные ситуации, которые на первый взгляд кажутся лживыми.*

5. Вася задумал 5 различных чисел и записал на доске (в каком-то порядке) все 10 их попарных сумм. Всегда ли Петя, взглянув на эти суммы, сможет восстановить исходные числа?

<u>Комментарий</u>: *Классический инвариант при решении задач на числа - УПОРЯДОЧИТЬ!*

<u>Ответ</u>*:** да, всегда сможет их восстановить. ***<u>Решение</u>: Пусть Вася задумал числа $a<b<c<d<e$. Сложим все 10 попарных сумм, получим учетверённую сумму S всех пяти чисел, т.к. каждое число будет нами посчитано по 4 раза. Значит, мы узнаем сумму S. Кроме того, мы знаем две самые маленькие и две самые большие суммы: $a+b<a+c<\ldots<c+e<d+e$. Тогда найдём $c=S-(a+b)-(d+e)$, далее найдём a из суммы $a+c$, b из суммы $a+b$, e из суммы $c+e$ и d из суммы $d+e$, т.е. Петя может найти все пять Васиных чисел.

5 класс

1. Поставьте на шахматную доску 4 ладьи и 4 слонов так, чтобы каждая ладья била ровно двух слонов и не била ладей, а каждый слон бил ровно две ладьи и не бил слонов.

	л	с	
с			л
л			с
	с	л	

Решение: см. конструкцию методом пропеллера.

2. Петя взял с собой в поход конфеты. На первом привале он съел седьмую часть всех конфет, на втором – четвёртую часть остатка, на третьем – третью часть конфет, оставшихся после второго привала, а после финиша – последние 6 конфет. Сколько конфет Петя взял с собой в поход?

Комментарий: *Очевидная задача на метод «анализ с конца» или «обратный ход».*

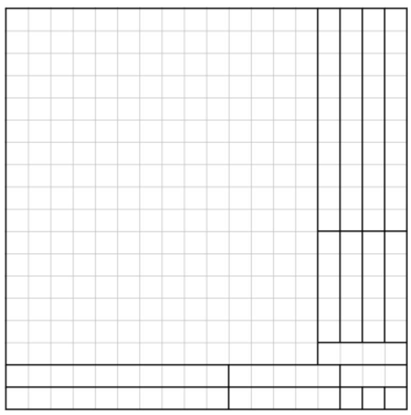
Ответ: 14. ***Решение:*** 6 конфет – это две трети всех конфет, оставшихся к третьему привалу. Следовательно, после второго привала осталось 9 конфет. 9 конфет – это три четверти конфет, оставшихся ко второму привалу. Следовательно, после первого привала осталось 12 конфет, что составляет шесть седьмых всех конфет. Значит, всего конфет было 14.

3. Вася написал восемь различных натуральных чисел, из которых ровно пять делятся на 7 и ровно пять делятся на 11. Какое наименьшее значение могло иметь наибольшее из Васиных чисел?

Ответ: 154. ***Решение:*** Среди 5+5=10 упомянутых чисел восьми значений по принципу Дирихле по крайней мере два встречаются дважды, значит, они оба делятся на $7 \cdot 11 = 77$ (7 и 11 – различные простые числа). Но т.к. числа различные, то одно из них не меньше $77 \cdot 2 = 154$. В качестве примера подойдёт набор 7, 14, 21, 11, 22, 33, 77, 154 – первые три и последние два числа делятся на 7, последние пять чисел делятся на 11.

Комментарий: *К сожалению, массовым явлением стали ошибки школьников в счёте, например, следующим после 77 числом, кратным 7 и 11, стали числа 119, 156, 161, 254, 7777 вместо $77 \cdot 2 = 154$.*

4. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали на 18 прямоугольников. Один из них отложили, а из остальных составили квадрат 10×10. Найдите размеры отложенного прямоугольника.



Ответ: 14×16. ***Решение:*** Площадь квадрата 18×18 равна 324, а площадь квадрата 10×10 равна 100. Тогда площадь отложенного прямоугольника равна 324–100 = 224. Стороны этого прямоугольника не превосходят 18, а их произведение равно 224. Число $224 = 2^5 \cdot 7$ можно представить в виде произведения двух положительных чисел следующим образом: 1×224, 2×112, 4×56, 7×32, 8×28 и 14×16. Условию задачи подходит только пара сторон – 14 и 16. ***Пример:*** Разрежем наш квадрат на следующие 18 прямоугольников (см. рис): 14×16, 1×10 (6 штук), 1×5 (6 штук), 1×4, 1×3 и 1×1 (3 штуки). Квадрат 10×10 складываем, сделав из 10 прямоугольников 1×10 – шесть уже имеем, ещё три получим, сложив два по 1×5, ещё один получим, сложив 1×4, 1×3 и 1×1 (3 штуки).

Комментарий: *Обязательно надо приводить ПОДТВЕРЖДАЮЩИЙ ПРИМЕР, удовлетворяющий условию задачи. Также в качестве примера подойдёт разрезание зоны снизу и справа (см. рисунок выше) на 9 квадратов 2×2 и 8 прямоугольников 2×4,* *из которых уже легко собирается квадрат 10×10, т.к. фактически мы как бы имеем 9+2·8=25 квадратов 2×2, из которых некоторые уже слиплись в прямоугольники 2×4, а из 25 квадратов 2×2 элементарно создаётся квадрат 10×10.*

5. На тараканьих бегах пять тараканов выбегают в одном направлении друг за другом с интервалом в 1 минуту. Каждый бежит со своей постоянной скоростью. Через минуту после своего старта каждый последующий таракан догоняет предыдущего. Через сколько секунд после своего старта последний таракан догоняет первого?

Ответ: через 16 секунд. ***Решение:*** Назовём *тарметром* расстояние, пробегаемое первым тараканом за 1 минуту. Каждый следующий пробегает за 1 минуту в 2 раза большее расстояние, чем предыдущий, значит, скорость пятого таракана равна $2^4=16$ тарметрам в минуту. При этом за 4 предыдущие минуты первый таракан пробежал 4 тарметра. Скорость сближения пятого таракана с первым равна 16–1=15 тарметров в минуту, значит, на ликвидацию 1 тарметра отставания пятому таракану требуется 60:15= 4 секунды, а на 4 тарметра – 4·4=16 секунд.

Комментарий: *И, конечно же, есть ещё чисто переборное решение, когда можно в виде таблицы рассмотреть все основные моменты в данном процессе.*