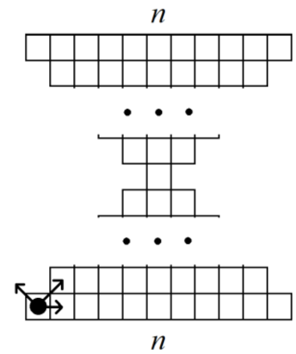
7 класс



1. Можно ли правильный треугольник разрезать на 4 равнобедренных треугольника, среди которых есть различные?

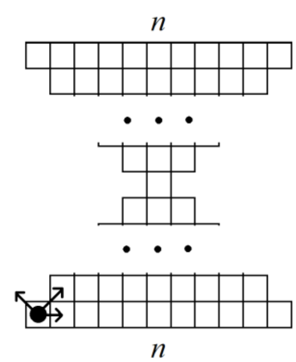
2. Докажите ребус-неравенство *И·С·Т·И·Н·А* ≠ *Л·О·Ж·Ь*. (*одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры*)

3. Градусные меры углов треугольника – точные квадраты. Найдите углы треугольника.

4. Илья и Артём играют на клетчатой доске в виде песочных часов ширины n=2021 (см. рис.). В левом нижнем углу стоит фишка, которую за один ход можно передвинуть направо на одну клетку или по диагонали вверх (влево или вправо) на одну клетку. Игроки ходят по очереди, начинает Илья. Проигрывает тот, кто не может сходить. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Плоскость замощена равными правильными треугольниками, в вершинах которых написаны натуральные числа от 1 до 1221 (каждое число встречается хотя бы один раз). Саша внутри каждого треугольника выписал в произвольном порядке три числа, стоящие в его вершинах, а сами числа во всех вершинах стёр. Докажите, что Вася может восстановить числа хотя бы в 1221 вершине.

6. На конкурсе юных фотографов оказалось, что у новичка Дарьи Подаркиной всего 2 знакомых среди участников, а у каждого из остальных – 9 или 12 знакомых. Могло ли так случиться, что у любых двух детей (назовём их A и B) на конкурсе среди остальных участников есть ровно трое, каждый из которых знаком и с A, и с B?


7 класс

1. Можно ли правильный треугольник разрезать на 4 равнобедренных треугольника, среди которых есть различные?

2. Докажите ребус-неравенство *И·С·Т·И·Н·А* ≠ *Л·О·Ж·Ь*. (*одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры*)

3. Градусные меры углов треугольника – точные квадраты. Найдите углы треугольника.

4. Илья и Артём играют на клетчатой доске в виде песочных часов ширины n=2021 (см. рис.). В левом нижнем углу стоит фишка, которую за один ход можно передвинуть направо на одну клетку или по диагонали вверх (влево или вправо) на одну клетку. Игроки ходят по очереди, начинает Илья. Проигрывает тот, кто не может сходить. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Плоскость замощена равными правильными треугольниками, в вершинах которых написаны натуральные числа от 1 до 1221 (каждое число встречается хотя бы один раз). Саша внутри каждого треугольника выписал в произвольном порядке три числа, стоящие в его вершинах, а сами числа во всех вершинах стёр. Докажите, что Вася может восстановить числа хотя бы в 1221 вершине.

6. На конкурсе юных фотографов оказалось, что у новичка Дарьи Подаркиной всего 2 знакомых среди участников, а у каждого из остальных – 9 или 12 знакомых. Могло ли так случиться, что у любых двух детей (назовём их A и B) на конкурсе среди остальных участников есть ровно трое, каждый из которых знаком и с A, и с B?

Нижегородская (XVIII открытая) городская математическая олимпиада школьников. 19 декабря 2021 года.

8 класс

1. Докажите, что если к десятичной записи числа, равного произведению двух последовательных натуральных чисел, приписать в конце 25, то получится точный квадрат.

2. В треугольнике ABC $\angle A=90°$, $\angle B=30°$. K и L – середины сторон AB и AC соответственно. Во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники AKM и CLN. Докажите, что A – середина MN.

3. В стране Повторляндии есть купюры в 5555 повториков и 33 повториков. Купюру в 5555 повториков жители называют пятаком, в 33 – трояком. Богач Пятёрочкин располагает только пятаками. Он пришёл в магазин «Троечка», где на данный момент в кассе лежат только трояки. Пятёрочкин хочет купить гинку за 363 повториков, шугрики за 1727 повториков, вецкот за 8888 повториков и заниян за 424242 повториков. Какие из вещей он не сможет купить?

4. В белом квадрате 11×11 закрасили в чёрный цвет чётное число клеток так, что в любом квадрате 2×2 также оказалось чётное число чёрных клеток. Какое наибольшее количество чёрных клеток могло оказаться на главной диагонали большого квадрата?

5. M – середина стороны AC треугольника ABC, в котором $\angle BAC+\angle BCA=2\angle ABM$. На стороне AB отмечена такая точка K, что $BK=BC$. Докажите, что $\angle BMK$ – прямой.

6. На конкурсе юных фотографов оказалось, что у новичка Дарьи Подаркиной всего 2 знакомых среди участников, а у каждого из остальных — 9 или 12 знакомых. Могло ли так случиться, что у любых двух детей (назовём их A и B) на конкурсе среди остальных участников есть ровно трое, каждый из которых знаком и с A, и с B?

Нижегородская (XVIII открытая) городская математическая олимпиада школьников. 19 декабря 2021 года.

8 класс

1. Докажите, что если к десятичной записи числа, равного произведению двух последовательных натуральных чисел, приписать в конце 25, то получится точный квадрат.

2. В треугольнике ABC $\angle A=90°$, $\angle B=30°$. K и L – середины сторон AB и AC соответственно. Во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники AKM и CLN. Докажите, что A – середина MN.

3. В стране Повторляндии есть купюры в 5555 повториков и 33 повториков. Купюру в 5555 повториков жители называют пятаком, в 33 – трояком. Богач Пятёрочкин располагает только пятаками. Он пришёл в магазин «Троечка», где на данный момент в кассе лежат только трояки. Пятёрочкин хочет купить гинку за 363 повториков, шугрики за 1727 повториков, вецкот за 8888 повториков и заниян за 424242 повториков. Какие из вещей он не сможет купить?

4. В белом квадрате 11×11 закрасили в чёрный цвет чётное число клеток так, что в любом квадрате 2×2 также оказалось чётное число чёрных клеток. Какое наибольшее количество чёрных клеток могло оказаться на главной диагонали большого квадрата?

5. M – середина стороны AC треугольника ABC, в котором $\angle BAC+\angle BCA=2\angle ABM$. На стороне AB отмечена такая точка K, что $BK=BC$. Докажите, что $\angle BMK$ – прямой.

6. На конкурсе юных фотографов оказалось, что у новичка Дарьи Подаркиной всего 2 знакомых среди участников, а у каждого из остальных — 9 или 12 знакомых. Могло ли так случиться, что у любых двух детей (назовём их A и B) на конкурсе среди остальных участников есть ровно трое, каждый из которых знаком и с A, и с B?

Нижегородская (XVIII открытая) городская математическая олимпиада школьников. 19 декабря 2021 года.

9 класс

1. Сколько решений имеет ребус *П·Р·А·В·Д·А = Л·О·Ж·Ь*? (*одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры*)

2. Длины сторон треугольника с углом 120° являются тремя последовательными нечётными числами. Найдите их.

3. Для каждого натурального $n\geq 2$ рассмотрим $dr(n)$ – наибольшее из всех возможных произведений натурального числа d ($1<d<n$) и остатка r от деления n на d (например, $dr(6)=8$, т.к. получим числа 0 при $d=2$ и $d=3$, $8=4\cdot 2$ при $d=4$ и $5=5\cdot 1$ при $d=5$). Найдите наибольшее натуральное $k\leq 2021$, при котором уравнение $dr(n)=k$ имеет решение.

4. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 8 не бьющих друг друга ладей так, чтобы они стояли только в клетках главной диагонали *a*1-*h*8 и соседних с ней (сверху и снизу) диагоналях из 7 клеток?

5. В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *AM* и *BK*. Известно, что центр описанной окружности треугольника *BMK* лежит на отрезке *AM*. Найдите $\angle ABC$.

6. В течение новогодней недели на маскарад каждый день приходили ребята в масках волка или зайца. Оказалось, что любые два ребёнка приходили в разных масках хотя бы 4 дня. Докажите, что всего было не больше 8 детей.

Нижегородская (XVIII открытая) городская математическая олимпиада школьников. 19 декабря 2021 года.

9 класс

1. Сколько решений имеет ребус *П·Р·А·В·Д·А = Л·О·Ж·Ь*? (*одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры*)

2. Длины сторон треугольника с углом 120° являются тремя последовательными нечётными числами. Найдите их.

3. Для каждого натурального $n\geq 2$ рассмотрим $dr(n)$ – наибольшее из всех возможных произведений натурального числа d ($1<d<n$) и остатка r от деления n на d (например, $dr(6)=8$, т.к. получим числа 0 при $d=2$ и $d=3$, $8=4\cdot 2$ при $d=4$ и $5=5\cdot 1$ при $d=5$). Найдите наибольшее натуральное $k\leq 2021$, при котором уравнение $dr(n)=k$ имеет решение.

4. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 8 не бьющих друг друга ладей так, чтобы они стояли только в клетках главной диагонали *a*1-*h*8 и соседних с ней (сверху и снизу) диагоналях из 7 клеток?

5. В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *AM* и *BK*. Известно, что центр описанной окружности треугольника *BMK* лежит на отрезке *AM*. Найдите $\angle ABC$.

6. В течение новогодней недели на маскарад каждый день приходили ребята в масках волка или зайца. Оказалось, что любые два ребёнка приходили в разных масках хотя бы 4 дня. Докажите, что всего было не больше 8 детей.

Нижегородская (XVIII открытая) городская математическая олимпиада школьников. 19 декабря 2021 года.

10 класс

1. Можно ли куб 2021×2021×2021 без центрального кубика 1×1×1 выложить из кирпичей 1×1×4?

2. Существует ли неравносторонний треугольник, у которого и его углы, и его стороны образуют две арифметические прогрессии?

3. Для каждого натурального $n \geq 2$ рассмотрим $dr(n)$ – наибольшее из всех возможных произведений натурального числа d ($1<d<n$) и остатка r от деления n на d (например, $dr(6)=8$, т.к. получим числа 0 при $d=2$ и $d=3$, $8=4\cdot 2$ при $d=4$ и $5=5\cdot 1$ при $d=5$). Найдите наименьшее натуральное $k \geq 2021$, при котором уравнение $dr(n)=k$ имеет решение.

4. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите неравенство $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2} \geq 9$.

5. В тупоугольном треугольнике ABC ($\angle B>90°$) точка O – центр описанной окружности. Вписанная окружность с центром I касается стороны BC в точке A', а стороны AC – в точке B'. Точки V и D, лежащие на отрезках AB' и CA' соответственно, таковы, что $2(\angle AVI-\angle CIO)=\angle B-\angle A$ и $A'D=B'V$. Докажите, что пятиугольник $COVID$ – вписанный.

6. Имеется клетчатая доска $k\times 100$ (k строк, 100 столбцов). Петя загадывает один из столбцов, но не говорит его номер Васе. Вася закрашивает некоторые из клеток, причём так, что в каждой строке не более 5 клеток закрашено. После чего Петя называет номера строк, которые загаданный им столбец пересекает по закрашенным клеткам. При каком наименьшем k Вася точно сможет угадать, какой столбец загадал Петя?

Нижегородская (XVIII открытая) городская математическая олимпиада школьников. 19 декабря 2021 года.

10 класс

1. Можно ли куб 2021×2021×2021 без центрального кубика 1×1×1 выложить из кирпичей 1×1×4?

2. Существует ли неравносторонний треугольник, у которого и его углы, и его стороны образуют две арифметические прогрессии?

3. Для каждого натурального $n \geq 2$ рассмотрим $dr(n)$ – наибольшее из всех возможных произведений натурального числа d ($1<d<n$) и остатка r от деления n на d (например, $dr(6)=8$, т.к. получим числа 0 при $d=2$ и $d=3$, $8=4\cdot 2$ при $d=4$ и $5=5\cdot 1$ при $d=5$). Найдите наименьшее натуральное $k \geq 2021$, при котором уравнение $dr(n)=k$ имеет решение.

4. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите неравенство $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2} \geq 9$.

5. В тупоугольном треугольнике ABC ($\angle B>90°$) точка O – центр описанной окружности. Вписанная окружность с центром I касается стороны BC в точке A', а стороны AC – в точке B'. Точки V и D, лежащие на отрезках AB' и CA' соответственно, таковы, что $2(\angle AVI-\angle CIO)=\angle B-\angle A$ и $A'D=B'V$. Докажите, что пятиугольник $COVID$ – вписанный.

6. Имеется клетчатая доска $k\times 100$ (k строк, 100 столбцов). Петя загадывает один из столбцов, но не говорит его номер Васе. Вася закрашивает некоторые из клеток, причём так, что в каждой строке не более 5 клеток закрашено. После чего Петя называет номера строк, которые загаданный им столбец пересекает по закрашенным клеткам. При каком наименьшем k Вася точно сможет угадать, какой столбец загадал Петя?

Нижегородская (XVIII открытая) городская математическая олимпиада школьников. 19 декабря 2021 года.

11 класс

1. Можно ли куб $2021\times2021\times2021$ без центрального кубика $1\times1\times1$ выложить из кирпичей $1\times1\times4$?

2. Найдите все корни многочлена $P(x)=x^{2021}+2x^{2020}+4x^{2019}+8x^{2018}+\ldots+2^{2020}x+2^{2021}$.

3. Для каждого натурального $n\geq2$ рассмотрим $dr(n)$ – наибольшее из всех возможных произведений натурального числа d ($1<d<n$) и остатка r от деления n на d (например, $dr(6)=8$, т.к. получим числа 0 при $d=2$ и $d=3$, $8=4\cdot2$ при $d=4$ и $5=5\cdot1$ при $d=5$). Найдите ближайшие (меньшее и большее) к 2021 натуральные числа k такие, что уравнения $dr(n)=k$ имеют решение.

4. Что больше: количество 2021-значных чисел из единиц и двоек, в которых ровно 1010 единиц, или количество 1010-значных чисел из единиц, двоек и троек? *Числа необязательно содержат все виды цифр.*

5. Внутри остроугольного треугольника ABC с $\angle A=60°$ отмечена точка T, из которой все стороны треугольника ABC видны под равными углами. Прямые BT и CT пересекают стороны AC и AB в точках D и E соответственно. Докажите, что $BE+CD\geq 2ED$.

6. Во время лекции по безопасности информации в Цветочном городе Знайка предложил малышам отгадать загаданное им число из первой сотни. Для этого каждый малыш пишет на своей карточке не более 5 различных натуральных чисел из первой сотни и предъявляет её для всеобщего обозрения. Затем Знайка одновременно указывает все карточки, на которых написано загаданное им число. Какое наименьшее число малышей может договориться между собой, чтобы отгадать число?

Нижегородская (XVIII открытая) городская математическая олимпиада школьников. 19 декабря 2021 года.

11 класс

1. Можно ли куб $2021\times2021\times2021$ без центрального кубика $1\times1\times1$ выложить из кирпичей $1\times1\times4$?

2. Найдите все корни многочлена $P(x)=x^{2021}+2x^{2020}+4x^{2019}+8x^{2018}+\ldots+2^{2020}x+2^{2021}$.

3. Для каждого натурального $n\geq2$ рассмотрим $dr(n)$ – наибольшее из всех возможных произведений натурального числа d ($1<d<n$) и остатка r от деления n на d (например, $dr(6)=8$, т.к. получим числа 0 при $d=2$ и $d=3$, $8=4\cdot2$ при $d=4$ и $5=5\cdot1$ при $d=5$). Найдите ближайшие (меньшее и большее) к 2021 натуральные числа k такие, что уравнения $dr(n)=k$ имеют решение.

4. Что больше: количество 2021-значных чисел из единиц и двоек, в которых ровно 1010 единиц, или количество 1010-значных чисел из единиц, двоек и троек? *Числа необязательно содержат все виды цифр.*

5. Внутри остроугольного треугольника ABC с $\angle A=60°$ отмечена точка T, из которой все стороны треугольника ABC видны под равными углами. Прямые BT и CT пересекают стороны AC и AB в точках D и E соответственно. Докажите, что $BE+CD\geq 2ED$.

6. Во время лекции по безопасности информации в Цветочном городе Знайка предложил малышам отгадать загаданное им число из первой сотни. Для этого каждый малыш пишет на своей карточке не более 5 различных натуральных чисел из первой сотни и предъявляет её для всеобщего обозрения. Затем Знайка одновременно указывает все карточки, на которых написано загаданное им число. Какое наименьшее число малышей может договориться между собой, чтобы отгадать число?