Нижегородская (XIX Открытая, I Цифровая)
городская математическая олимпиада школьников
НИУ Высшая Школа Экономики – Нижний Новгород, 17 декабря 2022 года

<u>УСЛОВИЯ И ИДЕИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ</u>
<u>7 класс</u>

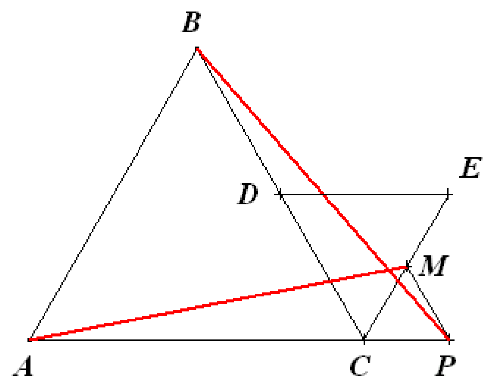
1. Найдите наименьший точный квадрат, который является суммой 2023 квадратов натуральных чисел (необязательно различных).

<u>Ответ</u>: $2116=46^2$. ***<u>Решение</u>:*** Минимальная сумма квадратов равна 2023 (все – единицы), а следующая (при изменении 1 на 4) равна $2026>2025=45^2$, значит, наименьший точный квадрат равен $46^2=2116=2020\cdot1^2+2\cdot4^2+8^2$, т.е. такой пример есть.

<u>Комментарий</u>: *КЛАССИКА … но чуть изменённая:☺.*

2. *D* – середина стороны *BC* равностороннего треугольника *ABC, M* – середина стороны *CE* равностороннего треугольника *CDE*, где точка *E* лежит вне треугольника *ABC*. *CMP* – равносторонний треугольник, где точка *P* лежит вне треугольника *CDE*. Докажите, что *BP=AM*.

<u>Доказательство 1</u>: Рассмотрим треугольники *ACM* и *BCP*. $AC=BC$, $CM=CP$, $\angle ACM = \angle BCP = 2\cdot60° = 120°$, тогда треугольники равны по двум сторонам и углу между ними, значит, $AM=BP$, что и требовалось доказать.



<u>Комментарий</u>: *Типичная задача с надстройками – равносторонними треугольниками, значит, с высокой вероятностью есть решение с помощью поворота. Интересующийся читатель найдёт большую подборку задач с надстройками в книге А.В.Акопяна «Геометрия в картинках» на стр. 98-103.*

<u>Доказательство 2</u>: Рассмотрим поворот относительно точки *C* на 60° (по часовой стрелке – см. рис.). Тогда точка *A* перейдёт в точку *B*, точка *M* – в точку *P*, значит, отрезок *AM* при этом повороте перейдёт в отрезок *BP*, т.е. эти отрезки равны, что и требовалось доказать.

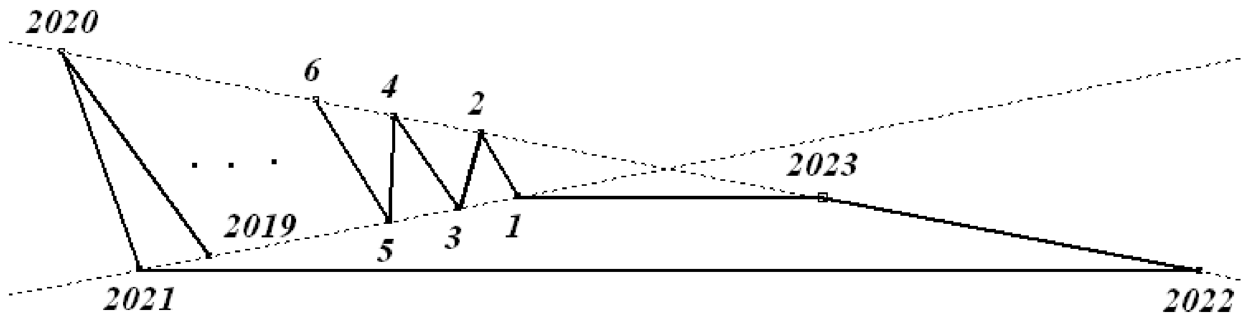
3. Число назовём *хорошим*, если его можно представить в виде суммы $1+\dfrac{1}{k}$, где *k* – некоторое натуральное число. Представьте число 7 в виде произведения 7 различных хороших чисел.

<u>Решение</u>: Каждое хорошее число является дробью вида $\dfrac{k+1}{k}$, тогда 7 можно представить следующим образом $\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{8}{7}\cdot\dfrac{7^2}{7^2-1}=\dfrac{6\cdot8}{7}\cdot\dfrac{7^2}{7^2-1}=7$.

<u>Комментарий</u>: *ЧИСТО ОЛИМПИАДНАЯ (кстати, классическая – из известных источников) задача на … проверку ЗНАНИЙ школьной формулы РАЗНОСТИ КВАДРАТОВ:☺. Осталось только … это понять решающему задачу школьнику!*

4. Какое наименьшее количество прямых можно провести так, чтобы все вершины некоторого 2023-угольника оказались лежащими на этих прямых?

Ответ: 2. ***Решение:*** На одной прямой все вершины многоугольника лежать не могут, значит, надо хотя бы 2 прямые. А такая конструкция существует (см. рис.).



5. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $a^2b^3c^4$=1024?

Ответ: 20. ***Решение***: b^3 является делителем числа $1024=2^{10}$, значит, b является делителем числа 2^3, причём положительным, иначе, всё произведение будет отрицательным. Кроме того, b должно оказаться точным квадратом, иначе всё произведение $a^2b^3c^4=32^2$ не будет точным квадратом. Значит, $b\in\{1, 2^2\}$. Если $b=1$, то $ac^2=\pm 2^5$, где a является положительной или отрицательной нечётной степенью двойки (± 2, $\pm 2^3$, $\pm 2^5$) – 6 вариантов, каждому из которых соответствуют 2 варианта числа c (положительный и отрицательный), т.е. $6\cdot 2=12$ вариантов. Если $b=2^2$, то $ac^2=\pm 2^2$, где a является положительной или отрицательной чётной степенью двойки ($\pm 1=\pm 2^0$, $\pm 2^2$) – 4 варианта, каждому из которых соответствуют 2 варианта числа c (положительный и отрицательный), т.е. $4\cdot 2=8$ вариантов. Значит, уравнение имеет 12+8=20 решений в целых числах.

6. Назовём *центром* трёхклеточного уголка точку, принадлежащую всем трём его клеткам. Квадратную клетчатую доску *N*×*N* полностью и без наложений покрыли не выходящими за её пределы трёхклеточными уголками, после чего каждый уголок повернули вокруг своего центра на 90° (каждый уголок в своём направлении) и опять оказалось, что доска покрыта полностью и без наложений не выходящими за её пределы всеми этими уголками. При каких *N* такое могло быть?

Ответ: при N, кратных 6. ***Решение:*** Изначально количество клеток N^2 должно быть кратно 3 (простое число), значит, N кратно 3. Предположим, что N – нечётно. Раскрасим доску в шахматном порядке, считая угловые клетки чёрными, тогда чёрных клеток будет на одну больше, чем белых. Тогда «чёрных» уголков, закрывающих 2 чёрные и 1 белую клетку будет на 1 больше, чем «белых» уголков, закрывающих 2 белые и 1 чёрную клетку. После поворота «чёрные» уголки станут «белыми», а «белые» – «чёрными», но при этом количество закрытых чёрных клеток станет на одну меньше, чем количество закрытых белых клеток, значит, закрыть повёрнутыми уголками всю доску при нечётном N нам не удастся. При чётном же N, а значит, кратном 6, доску можно разбить, например, на горизонтальные прямоугольники 2×3 (обе стороны делятся и на 2, и на 3), каждый из которых разбивается на 2 угла, которые можно повернуть (см. рис.) так, чтобы они опять закрыли весь прямоугольник 2×3. Значит, только при N, кратном 6, требуемая ситуация действительно могла быть.