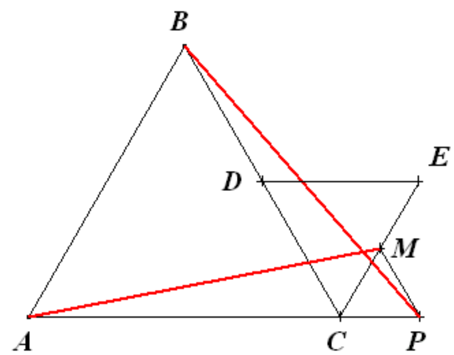
Нижегородская (XIX Открытая, I Цифровая)
городская математическая олимпиада школьников
НИУ Высшая Школа Экономики – Нижний Новгород, 17 декабря 2022 года

<u>УСЛОВИЯ И ИДЕИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ</u>
<u>8 класс</u>

1. Может ли куб натурального числа оканчиваться на 2022?

<u>Ответ</u>: не может. ***<u>Решение</u>:*** Заметим, что если такое число существует, то оно чётное, тогда его куб делится на $2^3=8$, значит, по признаку делимости на 8 три его последние цифры 022 должны давать число, делящееся на 8, что не выполняется. Следовательно, куб не может оканчиваться на 2022.

2. *D* – середина стороны *BC* равностороннего треугольника *ABC, M* – середина стороны *CE* равностороннего треугольника *CDE*, где точка *E* лежит вне треугольника *ABC*. На продолжении стороны *AC* за точку *C* взята такая точка *P*, что *BP*=*AM*. Найдите отношение *AC*:*CP*.



<u>Ответ</u>: *AC*:*CP*=4. ***<u>Решение</u>:*** Рассмотрим тупоугольные треугольники *ACM* и *BCP*. *AM*=*BP*, *AC*=*BC*, $\angle ACM=\angle BCP=2\cdot 60°=120°$, тогда треугольники равны по признаку равенства для тупоугольных треугольников, откуда *CP*=*CM*=*CE*/2=*CD*/2=*CB*/4=*AC*/4, т.е. *AC*:*CP*=4.

3. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга коней можно поставить на шахматную доску без двух главных диагоналей?

<u>Ответ</u>: 24, см. пример на рис.1, когда все 24 коня стоят на чёрных клетках при шахматной раскраске. ***<u>Решение</u>:*** Каждая из 4 связных зон разбивается на 6 пар клеток ходом коня (*конеходы*) – см. рис. 2 для левой зоны. В каждом конеходе будет не более одного коня, значит, всего коней не более 4·6=24.

<u>Комментарий</u>: *КЛАССИКА … но чуть изменённая:*☺.

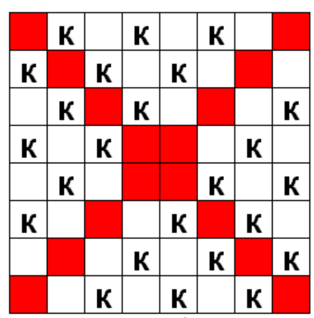


рис.1.

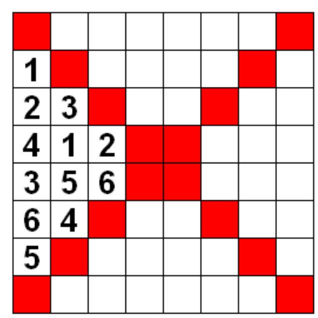


рис.2

4. Найдите наименьшее возможное значение шестизначного числа $\overline{ВОСЕМЬ}$, если $\dfrac{С+Е+М+Ь}{В+О+С+Е+М+Ь}=\dfrac{7}{8}$. (*одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры*)

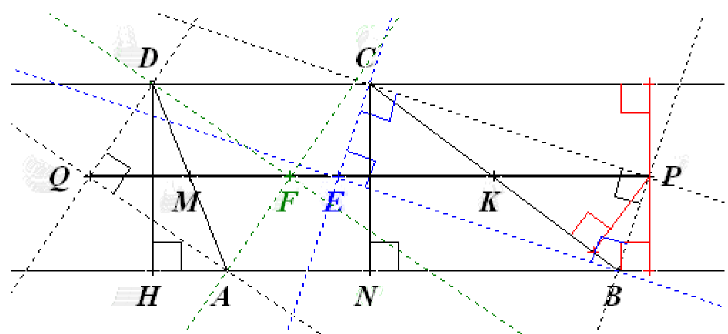
<u>Ответ</u>: 120489. ***<u>Решение</u>:*** $\dfrac{В+О+С+Е+М+Ь}{С+Е+М+Ь}=\dfrac{8}{7}\Leftrightarrow\dfrac{В+О}{С+Е+М+Ь}=\dfrac{1}{7}$. Если при этом *В*+*О*=1=1+0, то *С*+*Е*+*М*+*Ь*≥2+3+4+5=14, т.е. равенство невозможно. При *В*+*О*=2 цифра *В*≥2. Значит, минимальная пара *ВО* для получения наименьшего шестизначного числа должна быть равна 12, тогда $\frac{1}{7}=\frac{B+O}{C+E+M+Ь}=\frac{1+2}{21}=\frac{3}{21}$ и наименьшее значение группы цифр *СЕМЬ*=0489.

5. Сколькими способами из полного комплекта доминошек без дублей (0-1, 0-2, …, 0-6, 1-2, …, 5-6) можно выбрать три доминошки, которые удастся выложить в цепочку по правилам «Домино» (например, 2-5, 5-0, 0-1)?

Ответ: $C_7^3+\frac{A_7^4}{2}=35+420=455$. ***Решение:*** Нам нужен либо набор *a-b, b-c, c-a*, который выкладывается в цикл, либо набор вида *a-b*, *b-c*, *c-d* с четырьмя различными цифрами. Наборов первого вида будет $C_7^3=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}=35$, т.к. надо выбрать 3 цифры из 7, которые нам и дадут нужный цикл из 3 доминошек. Наборов второго вида будет $\frac{A_7^4}{2}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{2}=420$, т.к. нам надо последовательно выбрать 4 цифры из 7, но каждую цепочку можно выложить в двух направлениях, значит, каждый набор нами подсчитан 2 раза. Всего $C_7^3+\frac{A_7^4}{2}=35+420=455$ возможных наборов.

6. В трапеции *ABCD* боковые стороны *BC*=20 и *DA*=13, меньшее основание *CD*=16, высота трапеции равна 12. *P* и *Q* – соответственно точки пересечения биссектрис внешних углов *B* и *C*, биссектрис внешних углов *A* и *D*. Найдите *PQ*.

Ответ*:* 38 или 43. ***Решение:*** Точка *P* лежит на двух внешних биссектрисах, значит, она равноудалена от прямых *AB* и *BC*, *BC* и *CD*, откуда следует её равноудалённость от параллельных прямых, на которых лежат основания трапеции. Следовательно, *P* и аналогично *Q* лежат на продолжении средней линии *KM* трапеции. Внутренние биссектрисы *CE* и *BE* соответственных углов при параллельных прямых *AB* и *CD* и секущей *BC* будут перпендикулярны, им также перпендикулярны внешние биссектрисы *CP* и *BP*, значит, *BPCE* – прямоугольник, т.е. $\angle BPC$ – прямой. Аналогично $\angle AQD$ – прямой. Тогда *PK* и *QM* – медианы к гипотенузам прямоугольных треугольников (см. рис.) и *PK*=*BC*/2, *QM*=*AD*/2. Учитывая, что средняя линия трапеции равна полусумме оснований, получим *PQ*=*PK*+*KM*+*MQ*=*BC*/2+(*AB*+*CD*)/2+*DA*/2=(*AB*+*BC*+*CD*+*DA*)/2 – полупериметр трапеции. Разберём теперь возможные случаи для углов *A* и *B*. 1). Если угол *A* – тупой, *B* – острый, то при меньшем основании *CD* получим чертёж (см. рис.), в котором *DH*=*CN*=12, *NH*=*CD*=16, $AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$, $BN=\sqrt{BC^2-CN^2}=\sqrt{20^2-12^2}=16$, *AB*=*BN*+*NH*–*AH*=16+16–5=27>16=*CD*, значит, *PQ*=(27+20+16+13)/2=38. 2). Если углы *A* и *B* – острые, то *AB*=*BN*+*NH*+*AH*=16+16+5=37>16=*CD*, значит, *PQ*=(37+20+16+13)/2=43. 3). Если углы *A* и *B* – тупые, то *AB* <CD – противоречие с тем, что CD – меньшее основание. 4). Если угол *A* – тупой, угол *B* – острый, то *AB*=*AH*+*NH*–*BN*=5+16–16=5<16=*CD* – противоречие. Таким образом, *PQ* может принимать два разных значения: 38 и 43.



<u>Комментарий</u>: *В школьном курсе геометрии очень часто неаккуратно работают с трапецией, изображая её с острыми углами при большем основании и ошибочно доказывая некоторые утверждения. Данная нами задача акцентирует внимание школьников на этой проблеме, т.к. существуют две разные трапеции, удовлетворяющие условию. И школьник всегда должен помнить, что в геометрии возможны разные случаи!*