Нижегородская (XIX Открытая, I Цифровая) городская математическая олимпиада школьников
НИУ Высшая Школа Экономики – Нижний Новгород, 17 декабря 2022 года

9 класс

1. Существуют ли такие натуральные числа a и n, не меньшие 2, что число a^n оканчивается на 2022?

2. Пусть K и M – середины соответственно сторон AB и AD квадрата $ABCD$. KMN – равносторонний треугольник. Докажите, что $AN<AB$.

3. Какое наибольшее количество ладей двух цветов (должны быть ладьи обоих цветов) можно разместить на шахматной доске так, чтобы ладьи разных цветов не били друг друга, но при перекрашивании хотя бы одной из ладей в другой цвет это свойство нарушалось? (Ладьи одного цвета могут бить друг друга.)

4. Докажите для положительных чисел неравенство $\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}\geq\frac{3}{x+y+z}$.

5. При каких N существуют N различных целых чисел (наименьшее из которых равно 0) таких, что все их K_N возможных попарных разностей (каждый раз из большего числа вычитается меньшее) — это числа 1, 2, 3, …, K_N в некотором порядке?

6. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC. На стороне AC и на продолжении стороны AB за точку B отметили соответственно такие точки M и K, что $BM \parallel KC$. Пусть P – точка на окружности, описанной около треугольника BMC, лежащая внутри треугольника ABC. Докажите, что изогонально сопряженная ей точка Q ($\angle ABP=\angle CBQ$, $\angle BCP=\angle ACQ$, $\angle CAP=\angle BAQ$) лежит на окружности, описанной около треугольника BKC.