Нижегородская (XIX Открытая, I Цифровая)
городская математическая олимпиада школьников
НИУ Высшая Школа Экономики – Нижний Новгород, 17 декабря 2022 года

УСЛОВИЯ И ИДЕИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

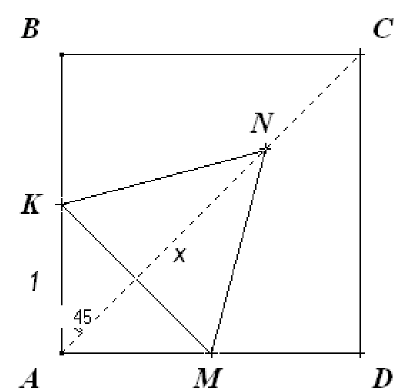
9 класс

1. Существуют ли такие натуральные числа a и n, не меньшие 2, что число a^n оканчивается на 2022?

Ответ: не существуют. ***Решение:*** Заметим, что если такие числа существуют, то a – чётное, тогда его n-я степень делится на $2^2=4$, значит, по признаку делимости на 4 две его последние цифры 022 должны давать число, делящееся на 4, что не выполняется. Следовательно, a^n не может оканчиваться на 2022.

2. Пусть K и M – середины соответственно сторон AB и AD квадрата $ABCD$. KMN – равносторонний треугольник. Докажите, что $AN<AB$.

Доказательство: Если точка N будет снаружи квадрата, то отрезок AN очевидным образом будет короче высоты равностороннего треугольника, поэтому нам важен случай, когда N внутри квадрата и AN длиннее этой высоты, но и в этом случае он будет короче AB, что мы и докажем. Точка N попадает на серединный перпендикуляр к KM – диагональ AC квадрата (см. рис.). Будем считать, что сторона квадрата равна 2, тогда AK=1 и сторона равностороннего треугольника KMN равна $KM=\sqrt{2}$ (из равнобедренного прямоугольного треугольника AKM с катетами 1). Применим теорему косинусов для треугольника AKN, считая $AN=x$: $1^2+x^2-2\cdot 1\cdot x\cdot\cos 45°=\left(\sqrt{2}\right)^2$. Тогда $x^2-\sqrt{2}x-1=0$, откуда $x_{1,2}=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2+4}}{2}$. Но $x>0$, значит, надо сравнить $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ и 2, что обычными школьными средствами



($\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}<2\Leftrightarrow(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2<4^2\Leftrightarrow 2+2\sqrt{12}+6<16\Leftrightarrow\sqrt{12}<4=\sqrt{16}$ -верное неравенство) приводит к неравенству $AN=x=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}<2=AB$, что и требовалось доказать.

Комментарий 1: *ЧИСТО … школьная? … олимпиадная? … задача:☺! Точно … олимпиадная, т.к. решает сразу несколько проблем первых номеров олимпиады для 9-го класса – и простая школьная геометрия, и классическая теорема, и квадратный трехчлен, и простое школьное сравнительное неравенство. Интересно теперь – сколько школьников-участников олимпиады в школе имеют реальную пятёрку по математике?*

Комментарий 2: *Аналитическое решение – это понятно и … естественно! Но … ОЛИМПИАДНУЮ МАТЕМАТИКУ интересует, есть ли у задачи чисто геометрическое* *решение? Надеемся, что есть и … что на олимпиаде найдётся хотя бы один школьник, который решит задачу чисто геометрически!*

3. Какое наибольшее количество ладей двух цветов (должны быть ладьи обоих цветов) можно разместить на шахматной доске так, чтобы ладьи разных цветов не били друг друга, но при перекрашивании хотя бы одной из ладей в другой цвет это свойство нарушалось? (Ладьи одного цвета могут бить друг друга.)

Ответ: 50. ***Пример:*** 49 белых ладей стоят в нижнем левом угловом квадрате 7×7, а одна чёрная ладья – на клетке *h*8. Перекрашивание, например, ладьи на *a*1 нарушает требуемое свойство.

Решение: Пусть белые ладьи стоят в a горизонталях и b вертикалях, где a и b – натуральные числа в пределах от 1 до 7, т.к. белые ладьи должны быть, но и ещё должны быть чёрные ладьи, значит, должны быть вертикали и горизонтали без белых ладей. Тогда на доске не более ab белых ладей и не более $(8–a)(8–b)$ чёрных ладей, где ладьи каждого цвета могут занимать все клетки на пересечении соответствующих им рядов. $ab+(8–a)(8–b)=2(ab–4a–4b+32)=2(a–4)(b–4)+32\le 2\cdot 3\cdot 3+32=50$, т.к. при допустимых значениях a и b в пределах от 1 до 7 произведение $(a–4)(b–4)$ будет принимать максимальное значение 9 при $a=b=1$ или $a=b=7$.

4. Докажите для положительных чисел неравенство $\dfrac{1}{x+2y}+\dfrac{1}{y+2z}+\dfrac{1}{z+2x}\ge\dfrac{3}{x+y+z}$.

Доказательство 1: Применим неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим $\dfrac{a+b+c}{3}\ge\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ для положительных чисел $a=x+2y$, $b=y+2z$, $c=z+2x$, где после равносильных преобразований получим требуемое неравенство:

$$\frac{(x+2y)+(y+2z)+(z+2x)}{3}\ge\frac{3}{\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}}\Leftrightarrow$$

$$x+y+z\ge\frac{3}{\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}}\Leftrightarrow\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}\ge\frac{3}{x+y+z}.$$

Доказательство 2: Применим лемму Титу для положительных чисел y_k в знаменателе $\dfrac{x_1^2}{y_1}+\dfrac{x_2^2}{y_2}+\ldots+\dfrac{x_n^2}{y_n}\ge\dfrac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{y_1+y_2+\ldots+y_n}$ и получим, что

$$\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}=\frac{1^2}{x+2y}+\frac{1^2}{y+2z}+\frac{1^2}{z+2x}\ge\frac{(1+1+1)^2}{(x+2y)+(y+2z)+(z+2x)}=$$

$$=\frac{9}{3(x+y+z)}=\frac{3}{x+y+z},$$ откуда и следует требуемое неравенство.

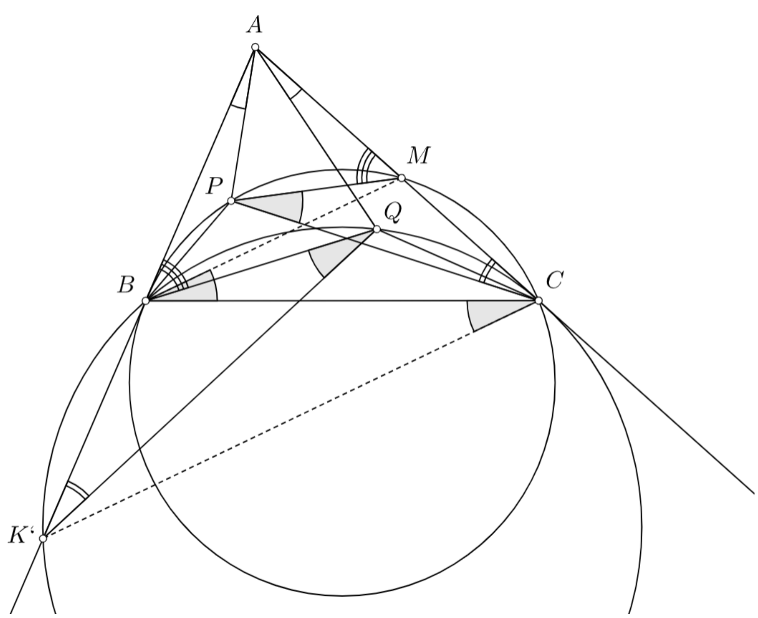
<u>Вывод</u>: *К олимпиадам надо готовиться и знать, например, все стандартные классические неравенства. Фактически эта задача является проверкой готовности школьника к олимпиаде.*

5. При каких N существуют N различных целых чисел (наименьшее из которых равно 0) таких, что все их K_N возможных попарных разностей (каждый раз из большего числа вычитается меньшее) — это числа 1, 2, 3, …, K_N в некотором порядке?

<u>Ответ</u>: $N \in \{2, 3, 4\}$. ***<u>Примеры</u>:*** При N=2 набор (0, 1), при N=3 набор (0, 1, 3), при N=4 набор (0, 1, 4, 6). Проверяем каждый случай перебором.

<u>Решение</u>: Докажем, что при $N \geq 5$ соответствующего набора не существует. Всего возможных попарных разностей будет $K_N = C_N^2 = \dfrac{N\cdot(N-1)}{2} = 1+2+...+(N-1)$ – сумма $(N–1)\geq 3$ наименьших натуральных чисел, которые и должны дать все варианты возможных $(N–1)$ попарных расстояний между соседними числами в интервале от 0 до K_N (будем такие отрезки называть *базовыми*). Тогда отрезок длины 1 должен быть с краю, иначе в сумме с наименьшим из своих соседних отрезков он даст один из базовых, т.е. произойдёт повтор расстояний (назовём это «проблемой S»). С точностью до симметрии можно считать, что 1 у меньшего края, т.е. у нас есть числа 0 и 1. Тогда следующим числом будет N, которое даёт базовый отрезок длины $N–1$ между собой и числом 1, иначе возникнет «проблема S» для 1. В результате у нас уже появился отрезок длины $N=N–0$, который также отнесём к базовым. Но теперь отрезок длины 2 должен быть рядом с отрезком длины $(N–1)$ и другим краем одновременно, иначе «проблема S» для 2 и его соседнего отрезка, не превосходящего $(N–2)$, что в сумме даст не более N, т.е. повтор базового отрезка. Значит, у нас будет всего 2 промежуточных числа и N=4, т.е. при $N\geq 5$ требуемый набор чисел не возможен.

6. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC. На стороне AC и на продолжении стороны AB за точку B отметили соответственно такие точки M и K, что $BM \parallel KC$. Пусть P – точка на окружности, описанной около треугольника BMC, лежащая внутри треугольника ABC. Докажите, что изогонально сопряженная ей точка Q ($\angle ABP=\angle CBQ$, $\angle BCP=\angle ACQ$, $\angle CAP=\angle BAQ$) лежит на окружности, описанной около треугольника BKC.



(Задача предложена Серовым Даниилом, учащимся 11-го класса лицея г.Бор Нижегородской области.)

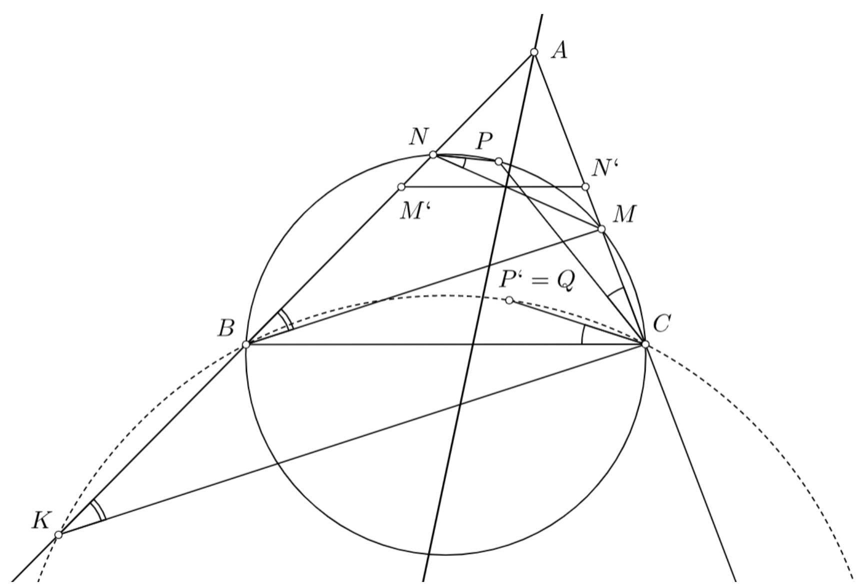
<u>Комментарий 1 (авторский)</u>: *Если пойти доказывать «в лоб», то с высокой вероятностью можно прийти в тупик с двумя неизвестными. В та-*

ком случае полезно поразмышлять о том, как определяются точки в задаче – в данном случае однозначно. Значит, обратим условие: предположим верность требуемого и докажем (часть условия) условие. Дальше всё считается куда проще.

Доказательство 1 (обратим условие + счет углов): Не умаляя общности, считаем, что $AB<AC$. Проведём окружность (BQC), которая пересечет продолжение AB за точку B в точке $K`$. Тогда надо доказать, что $BM \parallel K`C$. Рассмотрим треугольники $AQK`$ и $APC$: они подобны по равным углам $\angle K`AQ = \angle CAP$ из изогональности и $\angle QK`A = \angle QCB = \angle ACP$, где первое равенство из вписанности $K`BQC$, а второе из изогональности. Значит, $\angle APC = \angle AQK`$ (1). Аналогично покажем $\angle APM = \angle AQB$ (2). Треугольники $APM$ и $AQB$ подобны, в них равные $\angle MAP = \angle BAQ$ и $\angle QBA = \angle CBP = \angle AMP$ по аналогичным в (1) причинам. Итак, если из первого равенства (1) вычесть (2) получим, что $\angle MPC = \angle BQK`$. Тогда верна следующая цепочка $\angle CBM = \angle CPM = \angle BQK` = \angle BCK`$, откуда и следует параллельность. Значит, $K = K`$ и задача решена.

Комментарий 2 (авторский): *Если вспомнить определение изогонально сопряженных точек, то можно заметить, что речь идет о симметрии, и, как следствие, напрашивается её применить в данной задаче. А далее гомотетия, т.к. до этого отрезки были антипараллельны, то есть получались друг из друга симметрией и гомотетией:☺.*

Доказательство 2 (симметрия + гомотетия = антипараллельность): На этот раз для удобства построения обозначений на рисунке будем считать, что $AB > AC$. Из параллельности BM и KC следует равенство углов $\angle NBM$ и $\angle NKC$, откуда уже с учетом теоремы синусов $MN/BC = r_1/r_2$ (1), где r_1 и r_2 – радиусы окружностей (BMC) и (BKC) соответственно. Отобразим MN симметрично относительно биссектрисы угла A и получим $M`N`$, который в свою очередь гомотетией переведем в BC. Тогда согласно (1) окружность (BMC) перейдет в (BKC), а точка P в $P`$ на ($BKC$). Но из симметрии углы $\angle BAP = \angle CAP`$ дают равенство (2). Также, соответственные после преобразований углы $\angle PNM = \angle P`CB$ тоже дают равенство (3). Значит, из вписанности и (3) верно $\angle P`CB = \angle PNM = \angle MCP$, откуда с учетом (2) получаем, что $P`$ и $P$ изогонально сопряжены. То есть $P` = Q$, Q лежит на (BKC), а это и требовалось.



Комментарий 3 (от автора варианта): *Антипараллельность, изогонали, симедиана, степень точки, радикальные оси и центр (см. задачу 11.6), вневписанные окружности – очень важные и часто используемые в последнее время в олимпиадах и математических соревнованиях высокого уровня геометрические идеи и факты. Без знания о них на таких современных соревнованиях практически бесполезно браться за сложную геометрию!*