Нижегородская (XIX Открытая, I Цифровая) городская математическая олимпиада школьников
НИУ Высшая Школа Экономики – Нижний Новгород, 17 декабря 2022 года

10 класс

1. Какое наименьшее натуральное число надо прибавить к сумме $x^2+2022x$, чтобы получился квадратный трехчлен с целыми корнями?

2. На сторонах AB, AD и DC квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки E, F и G, а на отрезке CE – точка H, такие, что $\angle BCE=\angle AEF=\angle DFG=\angle CGH=30°$. Верно ли, что $\angle EHF=30°$?

3. Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x+2y+4z=0$. Какие значения может принимать выражение $\frac{x^2}{8yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{8z^2}{xy}$?

4. Набор из трёх клеток доски 10×10 назовём *гармоничным*, если центры A, B и C этих клеток обладают следующим свойством: существует центр M четвёртой клетки такой, что сумма векторов $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$. Гармоничный набор назовём *супергармоничным*, если площадь треугольника ABC принимает максимально возможное значение. Сколько на доске 10×10 (жёстко закреплённой) супергармоничных наборов?

5. В однокруговом турнире на 100 участников к некоторому моменту было сыграно 200 партий. Докажите, что при некотором натуральном $N\geq 3$ двумя разными способами можно выбрать N человек и поставить их по кругу так, что каждые два рядом стоящих уже сыграли партию между собой. (Шахматист может быть выбран оба раза.)

6. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника BCO, пересекает отрезки AB и AC в точках D и E соответственно. Окружности, построенные на CD и BE как на диаметрах, пересекаются в точках X и Y. Докажите, что точка N пересечения CD и BE и центроид M треугольника ABC лежат на прямой XY.