Нижегородская (XIX Открытая, I Цифровая)
городская математическая олимпиада школьников
НИУ Высшая Школа Экономики – Нижний Новгород, 17 декабря 2022 года

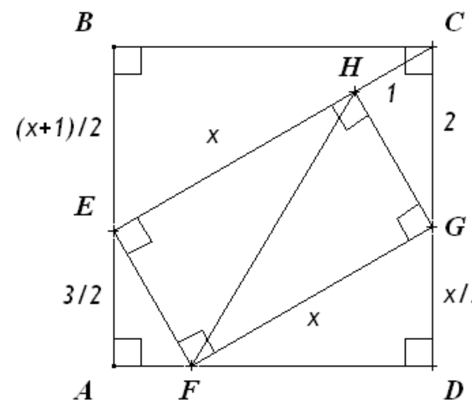
<u>УСЛОВИЯ И ИДЕИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ</u>

<u>10 класс</u>

1. Какое наименьшее натуральное число надо прибавить к сумме x^2+2022x, чтобы получился квадратный трехчлен с целыми корнями?

<u>Ответ</u>: 2021. ***<u>Решение</u>:*** По теореме Виета сумма корней равна (–2022), а произведение должно оказаться натуральным числом, значит, это целые числа одного знака, т.е. отрицательные. При сближении модулей этих чисел (с фиксированной суммой) их произведение будет расти, значит, минимальным оно будет при числах (–1) и (–2021).

2. На сторонах *AB, AD* и *DC* квадрата *ABCD* взяты соответственно точки *E, F* и *G*, а на отрезке *CE* – точка *H*, такие, что ∠*BCE*=∠*AEF*=∠*DFG*=∠*CGH*=30°. Верно ли, что ∠*EHF* =30°?



<u>Ответ</u>*:** не верно, т.к. ∠*EHF*<30°. ***<u>Решение</u>: Из условия следует, что треугольники *BCE, AEF, DFG, CGH* – прямоугольные с углом 30°, значит. в них гипотенузы в два раза больше катета напротив угла в 30°, а *EFGH* – прямоугольник. Пусть *CH*=1, *EH*=*FG*=*x*, тогда $CG=2, GD=\frac{x}{2}, HG=EF=\sqrt{3}, FD=\frac{x\sqrt{3}}{2}, AF=\frac{\sqrt{3}}{2}$, сторона квадрата равна $AG+FD=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{x\sqrt{3}}{2}=CG+GD=2+\frac{x}{2}$, откуда $EH=x=\frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}>\sqrt{3}EF=3$, что проверяется обычными школьными выкладками $\frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}>3 \Leftrightarrow 4-\sqrt{3}>3\sqrt{3}-3 \Leftrightarrow 7>4\sqrt{3} \Leftrightarrow 49>(4\sqrt{3})^2=48$. Значит, в прямоугольном треугольнике отношение катетов $\frac{EH}{EF}>\sqrt{3}$, откуда следует, что $EH=x=\frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}>\sqrt{3}EF=3$.

<u>Комментарий 1</u>: *ЧИСТО … школьная? … олимпиадная? … задача:☺! Точно … олимпиадная, т.к. решает сразу несколько проблем первых номеров олимпиады для 9-го класса – и простая школьная геометрия, и классический треугольник 30-60-90, и простое школьное сравнительное неравенство. Интересно теперь – сколько школьников-участников олимпиады в школе имеют реальную пятёрку по математике?*

<u>Комментарий 2</u>: *Аналитическое решение – это понятно и … естественно! Но … ОЛИМПИАДНУЮ МАТЕМАТИКУ интересует, есть ли у задачи чисто геометрическое* *решение? Надеемся, что есть и … что на олимпиаде найдётся хотя бы один школьник, который решит задачу чисто геометрически!*

3. Ненулевые числа *x, y, z* удовлетворяют равенству *x*+2*y*+4*z*=0. Какие значения может принимать выражение $\frac{x^2}{8yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{8z^2}{xy}$ **?**

<u>Комментарий</u>: *Дискомфорт в числах – сделай замену!*

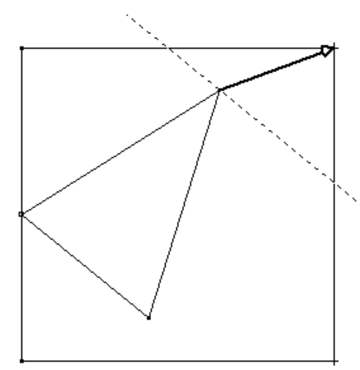
<u>Ответ:</u> 3. ***<u>Решение:</u>*** Сделаем для удобства замену переменных $a=x$, $b=2y$, $c=4z$, тогда $a+b+c=0$ и надо найти значение выражения $\frac{x^2}{8yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{8z^2}{xy}=\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}$, которое, с учётом равенства $c=-a-b$, равно

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{a^3+b^3-(a+b)^3}{abc}=\frac{a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3}{abc}=\frac{-3ab(a+b)}{abc}=$$

$$=\frac{3abc}{abc}=3.$$

4. Набор из трёх клеток доски 10×10 назовём *гармоничным*, если центры *A, B* и *C* этих клеток обладают следующим свойством: существует центр *M* четвёртой клетки такой, что сумма векторов $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$. **Гармоничный набор назовём *супергармоничным*, если площадь треугольника *ABC* принимает максимально возможное значение. Сколько на доске 10×10 (жёстко закреплённой) супергармоничных наборов?**

<u>Комментарий</u>: *Задача на проверку у школьника уровня его олимпиадной подготовки – сразу несколько классических фактов, которые надо совместить в одном решении.*



<u>Ответ</u>: 12. ***<u>Решение</u>:*** Площадь треугольника с вершинами в центрах клеток гармоничного набора будет максимально возможной тогда, когда она равна половине площади квадрата 9×9 с центрами в угловых клетках доски 10×10. Этот классический факт доказывается последовательным сдвигом к вершинам квадрата вершин треугольника, лежащих внутри квадрата. Для каждой вершины треугольника, не лежащей в вершине квадрата, есть сдвиг в вершину квадрата, либо увеличивающий площадь треугольника (см. рис.), либо её сохраняющий (если вершина движется по стороне квадрата). Значит, либо все три вершины треугольника с супергармоничным набором являются вершинами квадрата (4 варианта) – 1-й случай, либо две из них являются соседними вершинами квадрата и точкой на противоположной стороне квадрата – 2-й случай. Введём обычную систему координат с вершинами квадрата (0; 0), (0; 9), (9; 9), (9; 0). Если ли сумма векторов гармоничного набора равна 0, то *M* – центроид (точка пересечения медиан) треугольника *ABC* и его координаты по каждой оси являются средним арифметическим координат вершин треугольника. В первом случае любая тройка вершин имеет центроид с целочисленными координатами, т.к. сумма нулей и девяток делится на 3. Во втором случае третья вершина должна иметь на своей стороне координату 3 или 6, например, набор (0; 0), (0; 9) и (9; 3) или (9; 6). Значит, во втором случае мы имеем 4·2=8 вариантов супергармоничного набора (4 тройки соседних вершин квадрата и 2 варианта третьей вершины для каждой пары). Всего же 4+8=12 супергармоничных наборов.

5. В однокруговом турнире на 100 участников к некоторому моменту было сыграно 200 партий. Докажите, что при некотором натуральном *N*≥3 двумя разными способами можно выбрать *N* человек и поставить их по кругу так, что каждые два рядом стоящих уже сыграли партию между собой. (Шахматист может быть выбран оба раза.)

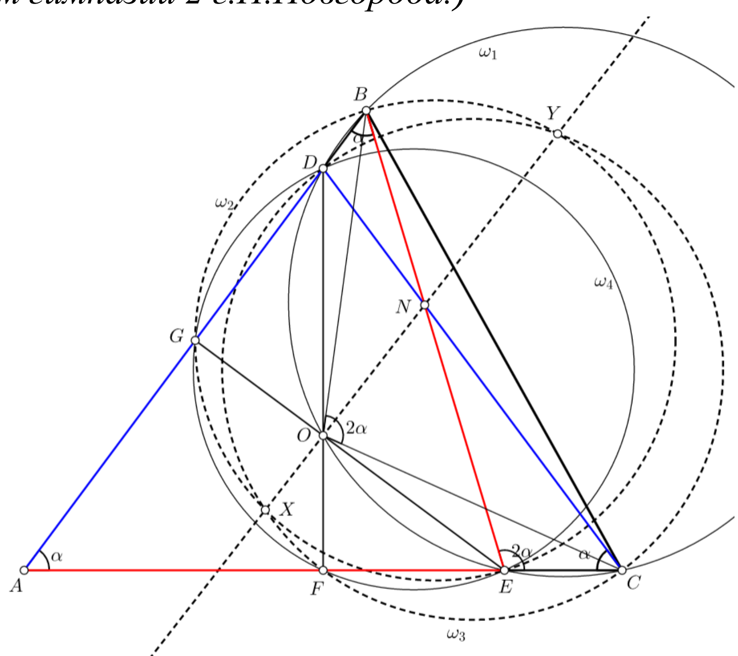
Комментарий 1: *Напрашивается решать задачу в общем «графском» виде:* «В графе 100 вершин и 200 рёбер. Докажите, что в нём есть 2 простых цикла одинаковой длины.»

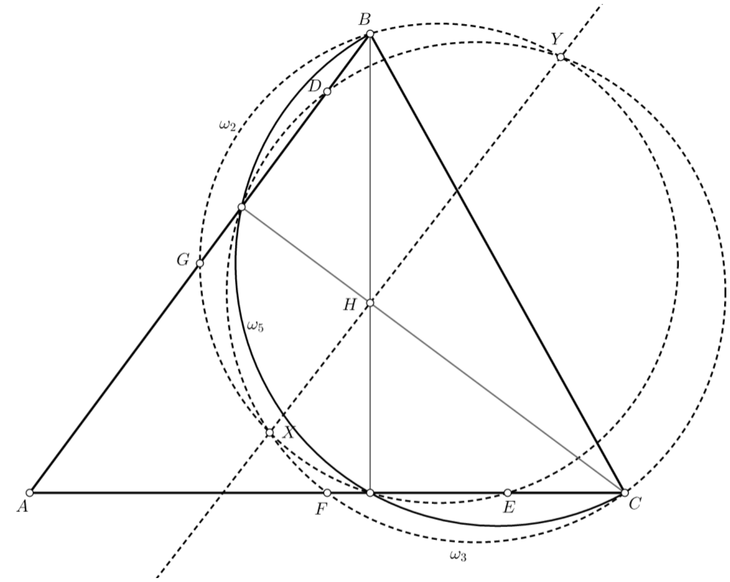
Комментарий 2: *Очевидным образом напрашивается выделить остовное дерево.*

Доказательство: Рассмотрим остовные деревья каждой компоненты связности графа, которые в сумме содержат не более 100–1=99 рёбер. Любому из остальных рёбер (их не менее 101=200–99) соответствует свой по длине цикл, содержащий это ребро и путь по остовному дереву между концами этого ребра. Значит, есть хотя бы 101 разных простых циклов с длинами от 3 до 100, тогда среди них по принципу Дирихле найдутся 2 одинаковых по длине, что и требовалось доказать.

6. Точка *O* – центр окружности, описанной около треугольника *ABC*. Окружность, описанная около треугольника *BCO*, пересекает отрезки *AB* и *AC* в точках *D* и *E* соответственно. Окружности, построенные на *CD* и *BE* как на диаметрах, пересекаются в точках *X* и *Y*. Докажите, что точка *N* пересечения *CD* и *BE* и центроид *M* треугольника *ABC* лежат на прямой *XY*. *(Задача предложена Болотиным Артёмом Сергеевичем, студентом МФТИ, выпускником гимназии 2 г.Н.Новгорода.)*

Доказательство: Пусть *BDOEC* вписан в окружность ω_1, окружность, построенная на *BE* как на диаметре, – ω_2, окружность, построенная на *CD* как на диаметре, – ω_3. Заметим, что *BE* – радикальная ось ω_1 и ω_2, *CD* – радикальная ось ω_1 и ω_2. Тогда точка *N* – радикальный центр трёх данных окружностей, а значит, *N* лежит на радикальной оси *XY* ω_2 и ω_3.





Докажем, что O лежит на XY. В самом деле, $\angle BEC = \angle BOC = 2\angle A$. Значит, $\angle ABE = \angle BEC - \angle A = \angle A$, т.е. E лежит на серединном перпендикуляре к AB. Аналогично, D лежит на серединном перпендикуляре к AC. Пусть G и F – середины сторон AB и AC. Тогда $\angle DGE = \angle DFE = 90°$, значит, четырёхугольник $DGFE$ – вписанный. Кроме того, так как $\angle BGE = 90°$ и $\angle DFC = 90°$, то F лежит на ω_2, G лежит на ω_3. Опишем около $DGFE$ окружность ω_4 (см. рис.). Тогда DF – радикальная ось ω_2 и ω_4, EG – радикальная ось ω_3 и ω_4. Значит, точка пересечения DF и EG лежит на радикальной оси XY ω_2 и ω_3. Но DF и EG являются серединными перпендикулярами к AB и AC, т.е. O – точка их пересечения.

Покажем, что ортоцентр треугольника ABC также лежит на XY. Действительно, построим на BC окружность ω_5 как на диаметре. Заметим, что высота из вершины B является радикальной осью ω_3 и ω_5, высота из вершины C является радикальной осью ω_2 и ω_5, тогда точка их пересечения H (ортоцентр треугольника ABC) лежит на радикальной оси XY окружностей ω_2 и ω_3.

Таким образом, точки X, O, H, N, Y лежат на одной прямой. Но также H, M, O лежат на одной прямой – прямой Эйлера треугольника ABC. Отсюда следует, что точки X, Y, N, M лежат на одной прямой, что и требовалось.

Комментарий: *К выпускному классу опытный олимпиадник уже давно должен знать про прямую Эйлера и радикальную ось, а учащиеся младших классов, смотря на эту задачу, могут для себя отметить, какую теорию им изучать:* ☺.