

11 класс

1. Хорды AB и CD сферы пересекаются в точке P , причём $CP=4$, $PD=9$. Какую наименьшую длину может иметь хорда AB ?
2. Какое наименьшее натуральное число надо приписать в конце числа $123456789101112\dots3233$ (выписаны подряд все числа от 1 до 33), чтобы получившееся число делилось на 33?
3. Набор из трёх клеток доски 2023×2023 назовём *гармоничным*, если центры A , B и C этих клеток обладают следующим свойством: существует центр M четвертой клетки такой, что сумма векторов $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$. Гармоничный набор назовём *супергармоничным*, если площадь треугольника ABC принимает максимально возможное значение. Сколько на доске 2023×2023 (жёстко закреплённой) супергармоничных наборов?
4. Рома поставил на шахматную доску наибольшее количество ладей так, что каждая ладья бьёт ровно две лады. Докажите, что количество пар ладей, бьющих друг друга по вертикали, равно количеству пар ладей, бьющих друг друга по горизонтали.
5. Петя выписал 1348 различных натуральных чисел, не превосходящих 2022. Пару чисел выписанного набора назовём *дружеской*, если одно из чисел пары делится на другое число этой пары. Какое наибольшее количество различных дружеских пар можно гарантированно выбрать из Петинского набора? (разные пары могут иметь общее число)
6. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC . Окружность, описанная около треугольника BCO , пересекает отрезки AB и AC в точках D и E соответственно. Окружности, построенные на CD и BE как на диаметрах, пересекаются в точках X и Y . Докажите, что точка N пересечения CD и BE и центр тяжести M треугольника ABC лежат на прямой XY .