Нижегородская (XIX Открытая, I Цифровая)
городская математическая олимпиада школьников
НИУ Высшая Школа Экономики – Нижний Новгород, 17 декабря 2022 года

УСЛОВИЯ И ИДЕИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

11 класс

1. Хорды *AB* и *CD* сферы пересекаются в точке *P*, причём *CP*=4, *PD*=9. Какую наименьшую длину может иметь хорда *AB*?

Ответ: 12. ***Решение:*** Любые две пересекающиеся хорды задают плоскость, пересекающую сферу по окружности, тогда по свойству пересекающихся хорд $AP\cdot PB=CP\cdot PD$, а по неравенству Коши получим, что $AB = AP + PB \geq 2\sqrt{AP \cdot PB} = 2\sqrt{CP \cdot PD} = 2\sqrt{4 \cdot 9} = 12$, причём *AB*=12 в случае хорды *AB*, перпендикулярной хорде *CD*, которая при этом будет диаметром окружности, получаемой сечением сферы плоскостью *ABC*.

2. Какое наименьшее натуральное число надо приписать в конце числа 123456789101112…3233 (выписаны подряд все числа от 1 до 33), чтобы получившееся число разделилось на 33?

Комментарий 1: *Классическая по формулировке задача, в которой надо грамотно и аккуратно применить признаки делимости на 3 и 11.*

Ответ: 18. ***Решение***: Рассмотрим признаки делимости на простые числа 3 и 11, чтобы получить делимость на $33=3\cdot 11$. Сумма цифр исходного числа сравнима с суммой чисел от 1 до 33, равной $34\cdot 33/2=17\cdot 33\equiv 0 \pmod 3$, значит, приписываемое число должно быть кратно 3. Сумма на нечётных местах справа равна $3+2+1+0+2\cdot(9+8+7+\ldots+1+0)+9+7+5+3+1=121$, сумма на чётных местах равна $4\cdot 3+10\cdot 2+10\cdot 1+8+6+4+2=62$, значит, знакочередующаяся сумма цифр сравнима с $121-62=59\equiv 4 \pmod{11}$. Если мы припишем одну цифру x, то она должна делиться на 3, а знакочередующаяся сумма цифр будет сравнима либо с $0-4=-4$, либо с $3-4=-1$, либо с $6-4=2$, либо с $9-4=5$, т.е. не будет делимости на 11. Значит, нам надо приписать наименьшее двузначное число xy, у которого $x+y$ делится на 3 и $y-x+4$ делится на 11. Перебор показывает, что это число 18.

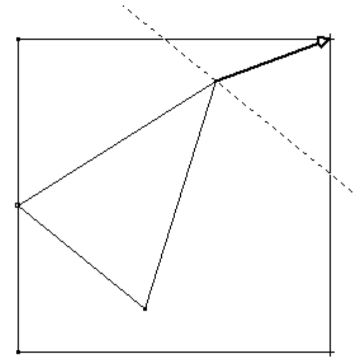
Комментарий 2: *Типичная задача по проверке знаний школьников, показывающая, что Нижегородская (N Открытая), а теперь ещё и «K Цифровая»:☺ олимпиада по своей сути является КОНТРОЛЬНОЙ по проверке ЗНАНИЙ! Автор варианта ОЧЕНЬ НАДЕЕТСЯ, что получение ЗНАНИЙ и станет ГЛАВНЫМ у всех школьников, стремящихся к успеху в олимпиадах!:)*

Комментарий 3: *МИР очень сильно меняется … или вы этого не заметили?:)*

3. Набор из трёх клеток доски 2023×2023 назовём *гармоничным*, если центры *A, B* и *C* этих клеток обладают следующим свойством: существует центр *M* четвёртой клетки такой, что сумма векторов $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$. Гармоничный набор назовём *супергармоничным*, если площадь треугольника *ABC* принимает максимально

возможное значение. Сколько на доске 2023×2023 (жёстко закреплённой) супергармоничных наборов?

Комментарий: *Задача на проверку у школьника уровня его олимпиадной подготовки – сразу несколько классических фактов, которые надо совместить в одном решении.*



Ответ: 2696. ***Решение:*** Площадь треугольника с вершинами в центрах клеток гармоничного набора будет максимально возможной тогда, когда она равна половине площади квадрата 9×9 с центрами в угловых клетках доски 2023×2023. Этот классический факт доказывается последовательным сдвигом к вершинам квадрата вершин треугольника, лежащих внутри квадрата. Для каждой вершины треугольника, не лежащей в вершине квадрата, есть сдвиг в вершину квадрата, либо увеличивающий площадь треугольника (см. рис.), либо её сохраняющий (если вершина движется по стороне квадрата). Значит, либо все три вершины треугольникас супергармоничным набором являются вершинами квадрата (4 варианта) – 1-й случай, либо две из них являются соседними вершинами квадрата и точкой на противоположной стороне квадрата – 2-й случай. Введём обычную систему координат с вершинами квадрата (0; 0), (0; 2022), (2022; 2022), (2022; 0). Если ли сумма векторов гармоничного набора равна 0, то M – центроид (точка пересечения медиан) треугольника ABC и его координаты по каждой оси являются средним арифметическим координат вершин треугольника. В первом случае любая тройка вершин имеет центроид с целочисленными координатами, т.к. сумма нулей и девяток делится на 3. Во втором случае третья вершина должна иметь на своей стороне координату, кратную 3, например, набор (0; 0), (0; 2022) и (2022; 33), т.к. две другие соответствующие координаты кратны 3. Значит, во втором случае мы имеем 4·(2022:3–1)=4·673=2692 варианта супергармоничного набора (4 тройки соседних вершин квадрата и 2 варианта третьей вершины для каждой пары). Всего же 4+2692=2696 супергармоничных наборов.

4. Рома поставил на шахматную доску наибольшее количество ладей так, что каждая ладья бьёт ровно две ладьи. Докажите, что количество пар ладей, бьющих друг друга по вертикали, равно количеству пар ладей, бьющих друг друга по горизонтали.

Комментарий 1: *Ладьи на доске – практически стопроцентно могут помочь стенки, что и происходит в этой задаче. Абсолютно стандартный подход к решению … оказывается, что … стандартной задачи.*

Доказательство: *Стенка* – сторона клетки на краю доски. Каждая ладья из 4 направлений в двух направлениях бьёт ладьи, а ещё в двух направлениях бьёт стенки, причём свои, т.к. никакая другая ладья не может бить эти же стенки. Всего на шахматной доске 4·8=32 стенки, значит, ладей, бьющих ровно две ладьи, максимум 32:2=16, причём такие примеры есть (например, когда ладьи стоят по двум главным диагоналям) и все стенки при этом побиты. Ладьи бывают трёх типов: 1) бьющие 2 стенки по горизонтали, пусть таких ладей a штук, тогда они бьют двух ладей по вертикали; 2) бьющие 2 стенки по вертикали, пусть таких ладей b штук, тогда они бьют двух ладей по горизонтали; 3) бьющие по одной стенке по вертикали и горизонтали, пусть таких ладей c штук, тогда они бьют по одной ладье по вертикали и по горизонтали. Всего существует по 2·8=16=2a+c горизонтальных стенок и 2·8=16=2b+c вертикальных стенок, но и ударов между ладьями по вертикали и горизонтали будет соответственно 2a+c=16 и 2b+c=16, которые дают по 16:2=8 пар ладей, бьющих друг друга по вертикали и горизонтали, т.е. поровну, что и требовалось доказать.

<u>Комментарий 2</u>: *Задача возникла на занятии, когда при решении задачи о ладьях, бьющих по две ладьи, семиклассник заметил, что будет ровно по 8 пар ладей, бьющих друг друга по горизонтали и вертикали.*

<u>Комментарий 3</u>: *Заметим также, что неверным является утверждение, что в каждом ряду (вертикальном и горизонтальном) стоит ровно по одной паре ладей, – см. несколько контрпримеров на данное утверждение, которые заодно подтверждают, что есть примеры с 16-ю ладьями на шахматной доске.*

л	л	л	л	л	л	л	л
							л
							л
							л
							л
							л
							л
л							л

л	л	л					
		л					
л		л					
			л	л	л	л	л
							л
							л
							л
			л				л

л	л	л					
		л	л	л			
				л			
				л			
				л	л	л	л
							л
							л
л							л

5. Петя выписал 1348 различных натуральных чисел, не превосходящих 2022. Пару чисел выписанного набора назовём *дружеской*, если одно из чисел пары делится на другое число этой пары. Какое наибольшее количество различных дружеских пар можно гарантированно выбрать из Петиного набора? (разные пары могут иметь общее число)

<u>Ответ</u>: 337. ***<u>Комментарий</u>:*** Очевидным образом напрашивается решить эту задачу в общем виде, т.к. 1348:2022=2:3.

Даны 4*n* различных натуральных чисел (*n* – натуральное число), не превосходящих 6*n*. Какое наибольшее количество различных пар чисел *a* и *b* таких, что *a* делится на *b*, можно гарантированно выбрать из этого набора чисел (разные пары могут иметь общее число)?

<u>Ответ</u>: n пар. ***<u>Решение</u>:*** Если у нас есть набор чисел от 2n+1 до 6n, то мы сможем выбрать только n пар, в каждой из которых одно число в 2 раза больше другого: (2n+1, 4n+2), (2n+2, 4n+4), …, (3n–1, 6n–2), (3n, 6n). Других пар нет, т.к. отношение чисел может быть только 2, потому что самое маленькое из чисел (2n+1) больше трети самого большого числа (6n). Докажем теперь, что при любом наборе 4n чисел мы всегда сможем выбрать не менее n пар. Для каждого из 3n нечётных чисел от 1 до 6n–1 создадим множество, в которое входят все числа, равные степени двойки, умноженной на соответствующее нечётное число: {1, 2, 4, 8, …}, {3, 2·3, 4·3, 8·3, }, …, {6n–1}. Каждое чётное число также вошло в одно из множеств, причём множества могут состоять и из одного числа. Тогда по принципу Дирихле среди 4n чисел, входящих в 3n множеств, найдутся 2 числа из одного множества, которые образуют нужную нам пару. Выкинем меньшее число пары из этого множества, учитывая, что одну пару мы уже выбрали. Теперь уже среди (4n–1) чисел, входящих в 3n множеств, найдутся 2 числа из одного множества, которые образуют нужную нам пару. Аналогично выкинем меньшее число из его множества, учитывая, что ещё одну пару мы уже выбрали. И т.д. В конце уже среди (3n+1) чисел, входящих в $3n$ множеств, найдутся 2 числа из одного множества, которые образуют нужную нам пару. В результате получим n нужных пар, что и требовалось доказать.

6. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника BCO, пересекает отрезки AB и AC в точках D и E соответственно. Окружности, построенные на CD и BE как на диаметрах, пересекаются в точках X и Y. Докажите, что точка N пересечения CD и BE и центроид M треугольника ABC лежат на прямой XY. *(Задача предложена Болотиным Артёмом Сергеевичем, студентом МФТИ, выпускником гимназии 2 г.Н.Новгорода.)*

Решение: *см. решение задачи №6 в 10-м классе.*