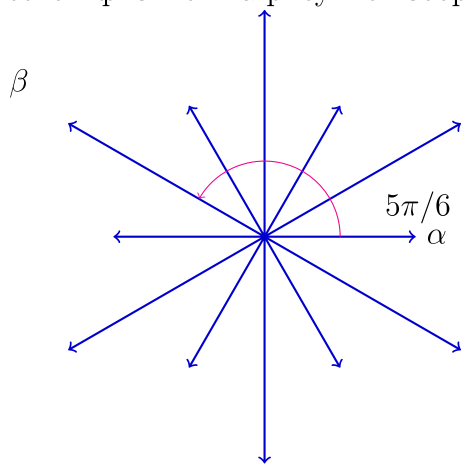
Системы корней, матрицы Картана, алгебры Ли и симметрии уравнений в частных производных.

Миллионщиков Д.В.
мех-мат факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Абстрактной **системой корней** в математике называется конечный набор векторов в евклидовом пространстве, удовлетворяющий определенным условиям симметрии. Такие симметричные наборы векторов играют фундаментальную роль в математике и математической физике. На рисунке изображен пример такой корневой системы G_2.



Матрица Картана – это целочисленная квадратная матрица, удовлетворяющая ряду просто формулируемых требований. В частности, у нее стоят двойки по диагонали, а внедиагональные элементы неположительны (это не все условия!). Каждой абстрактной системе корней можно сопоставить матрицу Картана. Например, матрица $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ является матрицей Картана системы G_2. Матрицы Картана также играют фундаментальную роль в современной математике. Достаточно упомянуть классификацию простых алгебр Ли. Напомним, что **алгеброй Ли** называется векторное пространство V вместе с билинейной операцией "коммутатор, скобка Ли"$[,] : V \times V \to V$, которая должна быть кососимметричной и удовлетворять тождеству Якоби:

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \forall x, y, z \in V.$$

Алгеброй Ли будет пространство квадратных матриц с коммутатором $[A, B] = AB - BA$.

Другим примером является свободная алгебра Ли $\mathcal{L}(a, b)$, порожденная двумя элементами a и b. Она, как векторное пространство, совпадает с линейной оболочкой

$$\langle a, b, [b, a], [[b, a], a], [[b, a], b], [[[b, a], a], a], [[[b, a], a], b], [[[b, a], b], b], \dots \rangle$$

Почему мы не включили в этот список тройной коммутатор $[[[b, a], b], a]$ (длины 4)? Дело в том, что он выражается при помощи тождества Якоби через уже выписанные элементы. Рост конечнопорожденной алгебры Ли $\mathcal{L}$ определяет функция $F_{\mathcal{L}}(n) = \dim V_n$ (точнее – ее асимптотическое поведение при $n \to \infty$) , равная размерности пространства V_n коммутаторов длины не выше n.

Свободная алгебра Ли, как и свободная группа, имеет самый **быстрый рост**. У нее нет других соотношений, кроме тождества Якоби. Но есть алгебры Ли, у которых есть еще соотношения и такие алгебры Ли могут расти медленно в смысле асимптотики функции $F_{\mathcal{L}}(n) = \dim V_n$.

В своем миникурсе я попробую рассказать: как системы корней связаны с матрицами Картана (лекция 1); что как с помощью матриц Картана можно строить медленно растущие алгебры Ли (лекция 2); как матрицы Картана связаны **с уравнениями в частных производных** вида $u_{xy} = f(u)$, где $f(u)$ – это некоторая фиксированная функция одной переменной u, а $u = u(x, y)$ – неизвестная функция двух переменных x, y (лекция 3).