О гетероклинических пересечениях полярных потоков на сфере

Фомин Даниил Олегович

НИУ ВШЭ Нижний Новгород

dofomin@edu.hse.ru

Аннотация

Мы исследуем полярные потоки на n-мерной сфере ($n \geqslant 3$) и доказываем, что хотя бы одно инвариантное многообразие любого седлового состояния равновесия такого потока содержит гетероклиническую траекторию.

Напомним, что гладкий поток $f^t\colon M^n \to M^n$, заданный на замкнутом гладком M^n многообразии размерности n, называется *полярным потоком*, если:

1. его неблуждающее множество Ω_{f^t} состоит из конечного числа состояний равновесия, все они гиперболические, при этом множество стоковых (источниковых) состояний равновесия состоит из единственной точки;
2. инвариантные многообразия седловых состояний равновесия пересекаются трансверсально.

Непустое пересечение инвариантных многообразий различных седловых состояний равновесия будем называть *гетероклиническим пересечением*, а каждую траекторию, принадлежащую этому перечесению — *гетероклинической траекторией*.

Напомним, что *индексом Морса* гиперболического состояния равновесия p называется число i_p, равное размерности его неустойчивого многообразия W^u_p. Пусть f^t — полярный поток на сфере S^n размерности $n \geq 3$. В силу формулы Пуанкаре-Хопфа

$$\sum_{p\in\Omega_{f^t}} (-1)^{i_p} = \chi(S^n) = \begin{cases} 2, n = 2k; \\ 0, n = 2k+1. \end{cases}$$

Отсюда непосредственно следует, что число седловых состояний равновесия потока f^t чётно и число сёдел с чётным индексом Морса равно числу сёдел с нечётным индексом Морса.

Теорема 1. *Для любого седлового состояния равновесия σ потока f^t хотя бы одно из его инвариантных многообразий пересекается с инвариантным многообразием седлового состояния равновесия, отличного от σ.*

Скетч доказательства. Пусть σ — седловое состояние равновесия потока f^t и l^u_σ — компонента связности многообразия $W^u_\sigma \setminus \sigma$ (неустойчивая сепаратриса).

В силу теоремы 2.3 работы [1]

$$\mathrm{cl}\, l^u_\sigma \setminus (l^u_\sigma \cup \sigma) = \bigcup_{p\in\Omega_{f^t}: l^u_\sigma \cap W^s_p \neq \varnothing} W^u_p.$$

Отсюда следует, что если $l^u_\sigma \cap W^s_p = \varnothing$ для любого седлового состояния равновесия p, то множество $\mathrm{cl}\, l^u_\sigma \setminus (l^u_\sigma \cup \sigma)$ состоит из единственной стоковой точки.

Пусть $i_\sigma = 1$. Из определения полярного потока следует, что l^u_σ не пересекается ни с одним инвариантным многообразием седлового состояния равновесия.

Пусть $i_\sigma \in \{2, \dots, n-1\}$. Предположим, что W^u_σ не содержит гетероклинических траекторий. Тогда из сказанного выше следует, что существует единственная стоковая точка ω такая, что $clW^u_\sigma = W^u_\sigma \cup \omega$.

Рассмотрим случай $i_\sigma = n-1$. Тогда clW^u_σ является сферой размерности $(n-1)$. Из теоремы Жордана-Брауэра следует, что clW^u_σ делит несущую сферу S^n на две компоненты связности D_+, D_-. Так как W^s_σ одномерно, то σ делит W^s_σ на две компоненты связности $l^s_+ \subset D_+, l^s_- \subset D_-$. Тогда из теоремы 2.3 работы [1] следует, что каждое из множеств D_+, D_- содержит по крайней мере один источник, что противоречит определению полярного потока. Следовательно, существует седловое состояние равновесия $p \neq \sigma$ такое, что $W^u_\sigma \cap W^s_p \neq \varnothing$.

Рассмотрим случай $i_\sigma \in \{2, \dots, n-2\}$. Тогда замыкания $cl\, W^u_\sigma, cl\, W^s_\sigma$ инвариантных многообразий точки σ являются сферами размерностей i_σ, $n - i_\sigma$, соответственно. Эти сферы пересекаются в единственной точке σ, поэтому их индекс пересечения по модулю равен единице. Пусть $S^{i_\sigma} \subset S^n$ — сфера размерности i_σ такая, что $S^{i_\sigma} \cap cl\, W^s_\sigma = \varnothing$. Тогда индекс пересечения сфер $S^{i_\sigma}, cl\, W^s_\sigma$ равен нулю. Так как группы гомологий $H_{i_\sigma}(M^n), H_{n-i_\sigma}(M^n)$ тривиальны, то сферы $S^{i_\sigma}, cl\, W^u_\sigma$ гомологичны. Из [2, Теорема I §70] следует, что индекс пересечения является гомологическим инвариантом, получаем противоречие. Следовательно, и в этом случае существует седловое состояние равновесия $p \neq \sigma$ такое, что $W^u_\sigma \cap W^s_p \neq \varnothing$.

Благодарности. Работа выполнена в рамках проекта № 23-00-028 «Динамические системы с многомерным фазовым пространством: от регулярной динамики к хаосу» конкурса научно-учебных групп НИУ ВШЭ 2023 г.

Список литературы

[1] Smale S., *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc., **73**:6 (1967), 747—817

[2] H. Seifert, W. Threlfall. A text book of topology. Academic Press. 1980.