О вложении инвариантных многообразий полярных потоков на сфере

Максимов Денис Александрович

НИУ ВШЭ Нижний Новгород

damaksimov_2@edu.hse.ru

Напомним, что поток $f^t\colon M^n \to M^n$ на замкнутом n-мерном многообразии называется *полярным*, если выполняются следующие условия:

- Неблуждающее множество Ω_{f^t} потока состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия, при этом множество источниковых (стоковых) состояний равновесия состоит ровно из одной точки.
- Инвариантные многообразия состояний равновесия пересекаются трансверсально.

Пусть f^t — полярный поток на сфере S^4, неблуждающее множество которого состоит из источника α, стока ω и двух седел σ_1, σ_2 с индексами Морса, равными 1 и 2 соответственно. Обозначим за $W^s_{\sigma_i}, W^u_{\sigma_i}$ устойчивое и неустойчивое многообразие седла σ_i. В силу работ [1], [2] для потока f^t существует энергетическая функция $\varphi : S^4 \to \mathbb{R}$ — гладкая функция Морса, строго убывающая вдоль незамкнутых траекторий потока, множество критических точек которой совпадает с множеством Ω_{f^t} и такая, что $\varphi(p) = dim\, W^u_p$ для любого $p \in \Omega_{f^t}$. Положим

$$\Sigma_{f^t} = \varphi^{-1}(3/2).$$

Из Теоремы 2.3 работы [3] следует, что замыкания $\operatorname{cl} W^u_{\sigma_1}, \operatorname{cl} W^s_{\sigma_2}$, помимо самих многообразий, содержат единственную точку — сток и источник соответственно. Значит, множества

$$A_{f^t} = \operatorname{cl} W^u_{\sigma_1}, R_{f^t} = \operatorname{cl} W^s_{\sigma_2}$$

являются простой замкнутой дугой и двумерной сферой соответственно, гладко вложенными в S^4 во всех точках, кроме, возможно, точек ω, α.

Теорема 1. *Σ_{f^t} гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, при этом множество $W^s_{\sigma_1} \cap \Sigma_{f^t}$ является двумерной сферой, не ограничивающей шар в Σ_{f^t}, а множество $W^u_{\sigma_2} \cap \Sigma_{f^t}$ является простой замкнутой дугой.*

Доказательство. По определению множество Σ_{f^t} является границей множества $N = \varphi^{-1}([0, 3/2])$. Из теории Морса следует, что N гомеоморфно многообразию, полученному приклеиванием к шару B^4 ручки индекса 1, следовательно, гомеоморфно $\mathbb{B}^3 \times \mathbb{S}^1$. Отсюда следует, что Σ_{f^t} гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Пересечение $W^s_{\sigma_1} \cap \Sigma_{f^t}$ является поверхностью без контакта для ограничения потока f^t на множество $W^s_{\sigma_1} \setminus \sigma_1$, поэтому оно диффеоморфно прямому произведению $(W^s_{\sigma_1} \cap \Sigma_{f^t}) \times \mathbb{R}$, и $W^s_{\sigma_1} \cap \Sigma_{f^t}$ — деформационный ретракт для $W^s_{\sigma_1} \setminus \sigma_1$. Поскольку это множество гомеоморфно $\mathbb{R}^3 \setminus O$ и, следовательно, односвязно, то $W^s_{\sigma_1} \cap \Sigma_{f^t}$ также односвязно и поэтому гомеморфно либо плоскости, либо двумерной сфере. В первом случае множество $W^s_{\sigma_1} \setminus \sigma_1$ гомеоморфно $\mathbb{R}^3$, что невозможно, поэтому оно гомеомофно сфере.

Положим $S^2_{f^t} = W^s_{\sigma_1} \cap \Sigma_{f^t}$. Эта сфера ограничивает шар $B^3 \subset W^s_{\sigma_1}$ такой, что $\sigma_1 \in \operatorname{int} B^3$. Следовательно, коэффициент зацепления сферы $S^2_{f^t}$ и дуги A_{f^t} равен единице. Поэтому сфера не ограничивает никакого шара в Σ_{f^t} (т. к. в противном случае коэффициент зацепления сфер был бы равен нулю).

Аналогично доказывается, что множество $W^u_{\sigma_2} \cap \Sigma_{f^t}$ является замкнутой дугой $S^1_{f^t}$.

Напомним, что замкнутое многообразие $X \subset M^n$ размерности m является локально плоским в M^n в точке x, если существует окрестность точки $x \in U_x \subset M^n$ и гомеоморфизм $h\colon U_x \to \mathbb{R}^n$ такой, что $h(X \cap U_x)$ является координатной гиперплоскостью $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Сфера R_{f^t} является локально плоской в каждой точке.*

Доказательство. Из Теоремы 2.3 работы [3] непосредственно следует, что неустойчивое (устойчивое) многообразие особой точки является гладким подмногообразием, поэтому сфера $R_{f^t} = W^s_{\sigma_2} \cup \alpha$ является гладко вложенной во всех точках, кроме, возможно, точки α.

Положим $S^3_\alpha = \varphi^{-1}(7/2)$. Из леммы Морса следует, что S^3 является гладко вложенной сферой размерности 3, ограничивающей шар $B^4_\alpha = \varphi^{-1}[7/2; 4]$. Положим $K = R_{f^t} \cap S^3_\alpha$. Аналогично теореме 1 доказывается, что K является простой замкнутой кривой (узлом). Поток f^t индуцирует гомеоморфизм $\theta : S^3_\alpha \setminus K \to \Sigma_{f^t} \setminus R_{f^t}$, ставящий в соответствие каждой точке $x \in S^3_\alpha \setminus K$ точку $y \in \Sigma_{f^t} \setminus R_{f^t}$, являющуюся точкой пересечения орбиты точки x с многообразием Σ_{f^t}. Следовательно, Σ_{f^t} может быть получено из S^3_α хирургией Дэна вдоль узла K. В работе [4] доказывается, что узел K является тривиальным. Пусть $\psi : S^3_\alpha \to \mathbb{S}^3$ — произвольный гомеоморфизм. Каждой точке $x \in B^4_\alpha \setminus \alpha$ поставим в соответствие время t_x такое, что $f^{t_x}(x) \in S^3_\alpha$ и определим гомеоморфизм $\Psi : B^4_\alpha \to \mathbb{B}^n$, сопрягающий поток $f^t|_{B^4_\alpha}$ с линейным потоком a^t_0 в $\mathbb{R}^n$, определенным формулой $a^t_0(x_1, \ldots, x_n) = (2^t x_1, \ldots, 2^t x_n)$. Для этого положим

$$\Psi(x) = \begin{cases} a_0^{-t_x}(\psi(f^{t_x}(x))), x \in B^4_\alpha \setminus \alpha \\ O,\ x = \alpha. \end{cases}$$

По построению $\Psi(W^s_{\sigma_2} \cap B^4_\alpha) \subset Ox_1x_2$, следовательно, сфера R_{f^t} является локально плоской в точке α.

Благодарности. Работа выполнена в рамках проекта № 23-00-028 «Динамические системы с многомерным фазовым пространством: от регулярной динамики к хаосу» конкурса научно-учебных групп НИУ ВШЭ в 2023 г.

Список литературы

[1] Smale S. On gradient dynamical systems. Annals of Mathematics. 1961. V. 74. P. 199–206.

[2] Meyer K. R. Energy functions for Morse-Smale systems// Amer. J. Math. 1968, V. 90. P. 1031–1040.

[3] Smale S., *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc., **73**:6 (1967), 747—817

[4] Gabai D. Foliations and the topology of 3-manifolds III, J. Differential Geometry, **26** (1987), 479-536