Об индексах Морса состояний равновесия и гетероклинических пересечениях полярных потоков на сфере

Д.О. Фомин

НИУ ВШЭ Нижний Новгород

30 марта 2023

Напомним, что гладкий поток $f^t\colon M^n \to M^n$, заданный на замкнутом гладком M^n многообразии размерности n, называется *полярным потоком*, если:

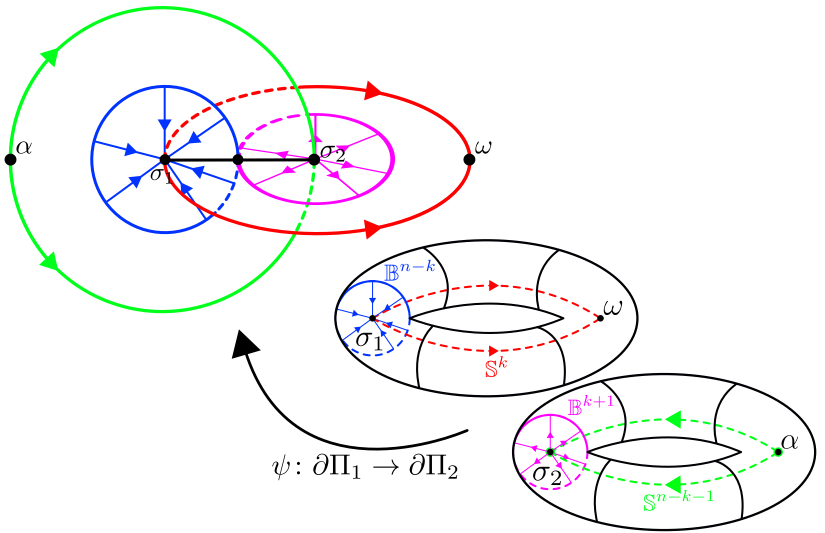
1. его неблуждающее множество Ω_{f^t} состоит из конечного числа состояний равновесия, все они гиперболические, при этом множество стоковых (источниковых) состояний равновесия состоит из единственной точки;
2. инвариантные многообразия седловых состояний равновесия пересекаются трансверсально.

Индексом Морса гиперболического состояния равновесия p называется число i_p, равное размерности его неустойчивого многообразия W^u_p. Пусть f^t — полярный поток на сфере S^n размерности $n \geqslant 3$. Из формулы Пуанкаре-Хопфа[1] следует

$$\sum_{p\in\Omega_{f^t}} (-1)^{i_p} = \chi(S^n) = \begin{cases} 2, n = 2k; \\ 0, n = 2k+1. \end{cases} \tag{1}$$

Отсюда непосредственно вытекает, что число седловых состояний равновесия потока f^t чётно и число сёдел с чётным индексом Морса равно числу сёдел с нечётным индексом Морса.

[1] Дж. Милнор, А. Уоллес. Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972. - 279 с. (§6)



$$\mathbb{S}^n = \partial\mathbb{B}^{n+1} = \partial\left(\mathbb{B}^{k+1}\times\mathbb{B}^{n-k}\right) = \mathbb{S}^k\times\mathbb{B}^{n-k}\cup\mathbb{B}^{k+1}\times\mathbb{S}^{n-k-1}$$

Основной результат

Теорема 1 (О гетероклинических пересечениях на сфере)

Пусть f^t — полярный поток на сфере $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 3$. Для любого седлового состояния равновесия σ потока f^t хотя бы одно из его инвариантных многообразий пересекается с инвариантным многообразием седлового состояния равновесия, отличного от σ.

Пусть σ — седловое состояние равновесия потока f^t и l^u_σ — компонента связности многообразия $W^u_\sigma \setminus \sigma$ (неустойчивая сепаратриса).
В силу работы Смейла[2]

$$\mathrm{cl}\, l^u_\sigma \setminus (l^u_\sigma \cup \sigma) = \bigcup_{p\in\Omega_{f^t}:\, l^u_\sigma\cap W^s_p\neq\varnothing} W^u_p. \qquad (2)$$

Следствие 1

Пусть $i_\sigma = 1$. Тогда $\mathrm{cl}\, W^u_\sigma = W^u_\sigma \cup \omega \cong \mathbb{S}^1$.

Следствие 2

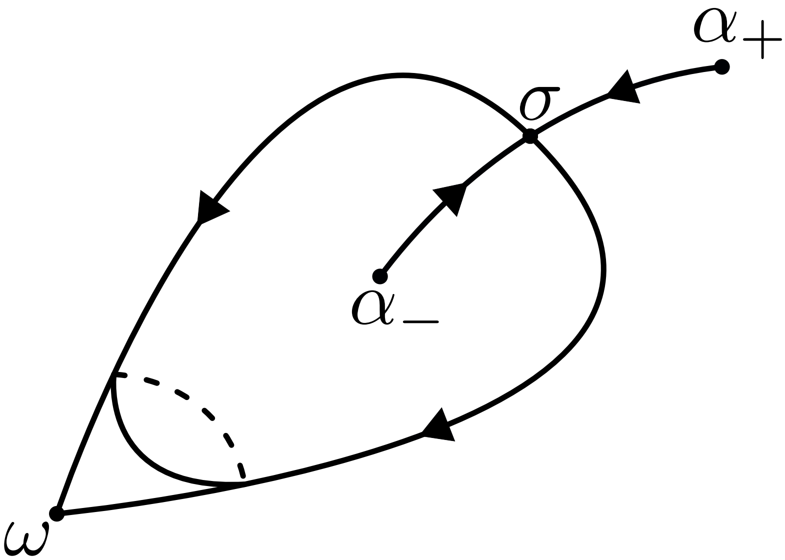
Пусть $i_\sigma \in \{2, \dots, n-1\}$. Если W^u_σ не содержит гетероклинических траекторий, то $\mathrm{cl}\, W^u_\sigma = W^u_\sigma \cup \omega \cong \mathbb{S}^{i_\sigma}$.

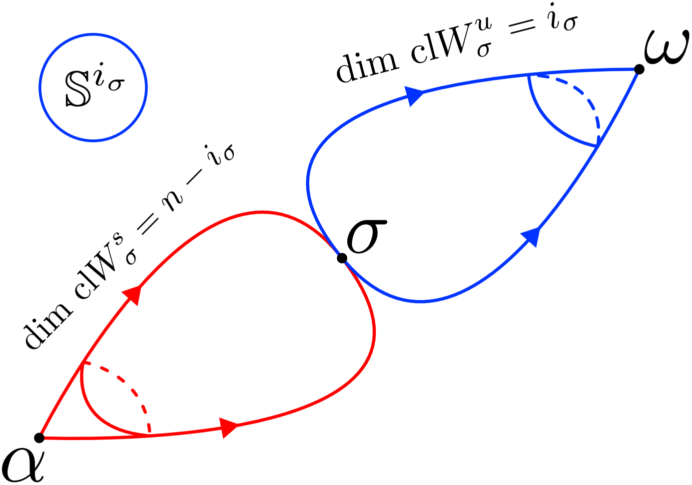
---

[2] Smale S., *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc., **73**:6 (1967), 747—817 (теорема 2.3)

Эскиз доказательства

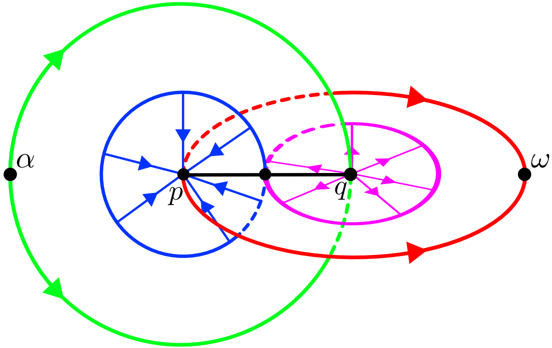
Второй шаг: при $i_\sigma = n - 1$ многообразие W^u_σ содержит гетероклиническую кривую





$$0 = \mathrm{ind}\left(\mathbb{S}^{i_\sigma} \cap \mathrm{cl} W^s_\sigma\right) = \mathrm{ind}\left(\mathrm{cl} W^u_\sigma \cap \mathrm{cl} W^s_\sigma\right) = 1$$

Основной результат



Теорема 2 (Об индексах сёдел)

Пусть f^t — полярный поток на сфере $\mathbb{S}^n$ размерности $n \geqslant 5$, множество седловых состояний равновесия которого состоит из двух точек p, q. Тогда $1 \leqslant |i_p - i_q| \leqslant n - 3$.

Эскиз доказательства

Заметим, что $|i_p - i_q| \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$. Примеры для $|i_p - i_q| = 1$ построили выше. Случаи $|i_p - i_q| \in \{0, 2, \ldots\}$ (чётные) противоречат следствию из формулы Пуанкаре-Хопфа. Таким образом доказано первое неравенство.

Исключим теперь случай $|i_p - i_q| = n - 2 \Leftrightarrow i_p = 1, i_q = n - 1$. Если многообразие M^n допускает два седла с такими индексами, то из теории Морса следует, что $M^n = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^{n-1} \cup \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^{n-1}$. Но для $n \geqslant 4$ при склейке двух копий $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^{n-1}$ всегда получается $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$ (следует из того факта[3], что любой гомеоморфизм $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^m$ на себя продолжается при $m > 1$ до гомеоморфизма $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^{m+1}$), что не гомеоморфно сфере $\mathbb{S}^n$. ■

[3] Homeomorphisms of $S^n \times S^1$ Nelson L. MaxPDF Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 939-942