О полярных потоках с локально плоскими замыканиями сепаратрис

Д. А. Максимов[1]

[1]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

30 марта 2023 г.

Определение

Гиперболические точки

Пусть M^n — замкнутое гладкое многообразие, f^t — поток на многообразии. Неподвижная точка p потока f^t называется *гиперболическим состоянием равновесия*, если матрица Якоби $\frac{\partial F}{\partial x}|_p$ поля скоростей $F = \partial f^t(x)/\partial t|_{t=0}$ не имеет собственных значений с нулевой вещественной частью.

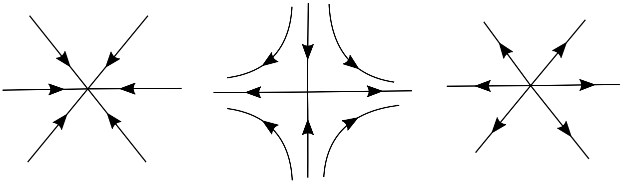
Определение

Индекс Морса

Устойчивое многообразие W_p^s гиперболического состояния равновесия p — множество

$$W_p^s = \{x \in M^n \mid \lim_{t \to +\infty} f^t(x) = p\}$$

Заменой времени определяется неустойчивое многообразие. *Индексом Морса* $ind(p)$ состояния равновесия p называется размерность его неустойчивого многообразия.



Сток
$ind(p) = 0$

Седло
$ind(p) = 1$

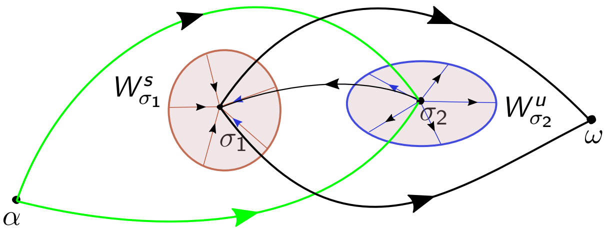
Источник
$ind(p) = 2$

Поток f^t на M^n называется *полярным*, если выполняются следущие условия:

- Неблуждающее множество Ω_{f^t} состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия, среди которых есть ровно один источник α (индекса n) и один сток ω (индекса 0).
- Инвариантные многообразия состояний равновесия пересекаются трансверсально.

Полярные потоки на сфере

Рассмотрим полярный поток на сфере S^4, неблуждающее множество которого состоит из стока, источника и двух сёдел σ_1, σ_2 с индексами Морса 1 и 2 соответственно.



Лемма.

1. $\mathrm{cl}\, W^u_{\sigma_1} = W^u_{\sigma_1} \cup \omega \cong S^1$;
2. $\mathrm{cl}\, W^s_{\sigma_2} = W^s_{\sigma_2} \cup \alpha \cong S^2$;
3. $W^u_{\sigma_2} \cap W^s_{\sigma_1} \neq \varnothing$

Основной результат

Напомним, что замкнутое многообразие $X^m \subset M^n$ называется *локально плоским* в точке x, если для неё найдется такая окрестность $U \subset M^n$ и гомеоморфизм $h\colon U \to \mathbb{R}^n$, что образ его ограничения $h(U \cap X^m)$ является координатной гиперплоскостью $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 1.

Пусть f_t — полярный поток на сфере S^4, неблуждающее множество которого состоит из стока, источника и двух сёдел σ_1, σ_2 с индексами Морса 1 и 2 соответственно. Тогда замыкание устойчивого многообразия седла σ_2 является локально плоской двумерной сферой.

Мотивировка

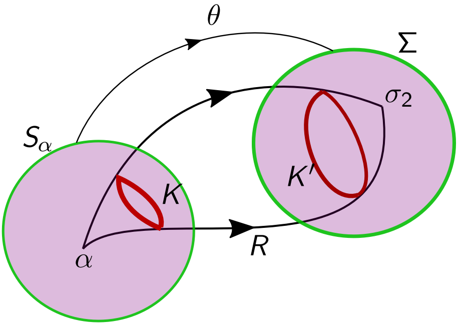
В работе[1] была доказана следующая теорема:

Теорема 2.

Существует полярный поток f^t без гетероклинических пересечений, заданный на замкнутом многообразии M^4, множество седловых состояний равновесия которого состоит в точности из двух точек p, q, замыкания инвариантных многообразий W_p^s, W_q^u которых являются дико вложенными двумерными сферами.

[1] Zhuzhoma, Medvedev 2013

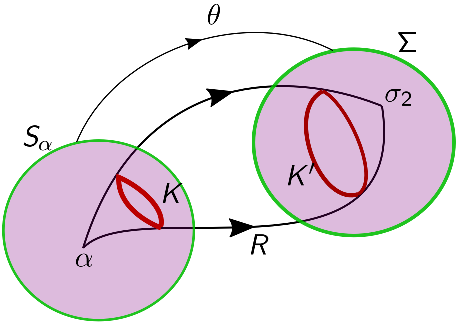
Идея доказательства



Обозначим $R = \mathrm{cl}\, W^s_{\sigma_2}$.
Для потока f^t существует[2] самоиндексирующаяся *энергетическая функция* $\varphi\colon S^4 \to [0,4]$, строго убывающая вдоль траекторий потока.
Из теории Морса следует, что $\Sigma = \varphi^{-1}(3/2) \cong S^1 \times S^2$, $S_\alpha = \varphi^{-1}(3) \cong S^3$. Положим $K = R \cap S_\alpha$, $K' = R \cap \Sigma$.

[2]Smale 1961

Идея доказательства



Поток f^t индуцирует гомеоморфизм $\theta\colon S_\alpha \setminus K \to \Sigma \setminus K'$. Значит, Σ получена из S_α хирургией Дена вдоль узла K. Из работы[3] следует, что K — тривиальный узел. Значит, R — локально плоская сфера в точке α.

[3] Gabai 1983