# Двухцветный граф каскада Морса-Смейла

Родионова Елена Константиновна

НИУ ВШЭ Нижний Новгород

ekrodionova@hse.ru

## Аннотация

В работе выделен класс каскадов с регулярной динамикой, допускающих топологическую классификацию в комбинаторных терминах, построен канонический представитель каждого класса топологической сопряженности на множестве таких систем и получена оценка эффективности комбинаторных инвариантов.

**Определение 1.** *Пусть $M^n$ — связное гладкое замкнутое многообразие размерности $n \geq 1$. Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$, называется диффеоморфизмом Морса–Смейла, если выполняются следующие условия:*

1. *неблуждающее множество $\Omega_f$ конечно и состоит из гиперболических периодических точек;*
2. *инвариантные многообразия $W^s_p, W^u_q$ любых точек $p, q \in \Omega_f$ пересекаются трансверсально.*

В серии работ 2000-2019 года Х. Бонатти, В.З. Гринеса, О.В. Починки при участии Ф. Лауденбаха и В.С. Медведева получена полная топологическая классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях (см. обзор [2]). Инвариант, который предлагался в этой работе, названный схемой диффеоморфизма, представляет собой набор, включающий пространство орбит ограничения исследуемого каскада на некоторое подмножество несущего многообразия и проекции двумерных сепаратрис в это пространство.

В работе [4] было введено понятие тривиальности схемы и доказано, что диффеоморфизм Морса-Смейла, схема которого тривиальна, включается в топологический поток. В настоящей работе показывается, что диффеоморфизмы Морса-Смейла с тривиальной схемой и не имеющие гетероклинических пересечений, допускают топологичекую классификацию в комбинаторных терминах, аналогично потокам Морса-Смейла.

Представим многообразие $M^3$ в виде объединения множеств

$$A_f = (\bigcup_{\sigma \in \Omega^1{}_f} W^u_\sigma) \cup (\bigcup_{\omega \in \Omega^0{}_f} \omega), R_f = (\bigcup_{\sigma \in \Omega^2{}_f} W^s_\sigma) \cup (\bigcup_{\alpha \in \Omega^3{}_f} \alpha), V_f = M^n \setminus (A_f \cup R_f).$$

Из [3] следует, что множества $A_f, R_f, V_f$ являются связными, причем множество $A_f$ является аттрактором, $R_f$ — репеллером.

Обозначим через $\widehat{V}_f = V_f/f$ пространство орбит действия $f$ на $V_f$ и через $p_f : V_f \to \hat{V}_f$ естественную проекцию, $p_f(x) = O_f(x) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} f^m(x) \subset \hat{V}_f$.

Положим $\hat{L}^s_f = \bigcup_{\sigma \in \Omega^1_f} p_f(W^s_\sigma \setminus \sigma)$, $\hat{L}^u_f = \bigcup_{\sigma \in \Omega^2_f} p_f(W^u_\sigma \setminus \sigma)$.

**Определение 2.** *Набор $S_f = (\widehat{V}_f, \hat{L}^s_f, \hat{L}^u_f, \eta_f)$ называется схемой диффеоморфизма $f \in G(M^3)$.*

**Определение 3.** *Схемы $S_f$ и $S_{f'}$ диффеоморфизмом $f, f' \in G(M^3)$ называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi} : \widehat{V}_f \to \widehat{V}_{f'}$ такой, что $\hat{\varphi}(\hat{L}^s_f) = \hat{L}^s_{f'}$, $\hat{\varphi}(\hat{L}^u_f) = \hat{L}^u_{f'}$ и $\eta_{_f} = \eta_{_{f'}}\hat{\varphi}_*$.*

**Утверждение 1.** *[1]*

*Диффеоморфизмы $f, f' \in G(M^3)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.*

Обозначим через $\mathbb{S}_g$ ориентируемую замкнутую поверхность рода $g = \frac{|\Omega^1_f \cup \Omega^2_f| - |\Omega^0_f \cup \Omega^3_f| + 2}{2}$ и положим $V_g = \mathbb{S}_g \times \mathbb{R}$, $\widehat{V}_g = \mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$.

**Определение 4.** *Схема $S_f$ диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ называется тривиальной, если существует гомеоморфизм $\hat{\psi}_{_f} : \widehat{V}_f \to \widehat{V}_g$ такой, что для каждой компоненты связности $\hat{\lambda}$ множества $\hat{L}^s_f \cup \hat{L}^u_f$ найдется простая замкнутая дуга $c_{\hat{\lambda}} \subset \mathbb{S}_g$ такая, что $\hat{\psi}_{_f}(\hat{\lambda}) = c_{\hat{\lambda}} \times \mathbb{S}^1$.*

**Утверждение 2.** *Пусть $f \in G(M^3)$. Тогда:*

1. *его неблуждающее множество состоит из неподвижных точек;*
2. *ограничение $f$ на каждое инвариантное многообразие любой седловой неподвижной точки является сохраняющим ориентацию;*
3. *замыкания сепаратрис являются локально плоскими дугами или сферами.*

Пусть $G(M^3)$ — класс диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений, вкладывающихся в топологический поток. Положим $\Omega^i_f = \{p \in \Omega_f | \, dim\, W^u_p = i\}$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Обозначим через $\mathcal{L}_f$ множество всех замыканий двумерных инвариантных многообразий седловых точек диффеоморизма $f$. Так как $f \in G(M^3)$, то любой элемент множества $\mathcal{L}_f$ является локально плоской сферой. Пусть $\mathcal{D}_f$ обозначает множество всех компонент связности многообразия

$$M^3 \setminus (\bigcup_{\sigma_1 \in \Omega^1_f} cl\, W^s_{\sigma_1} \cup \bigcup_{\sigma_2 \in \Omega^2_f} cl\, W^u_{\sigma_2})$$

.

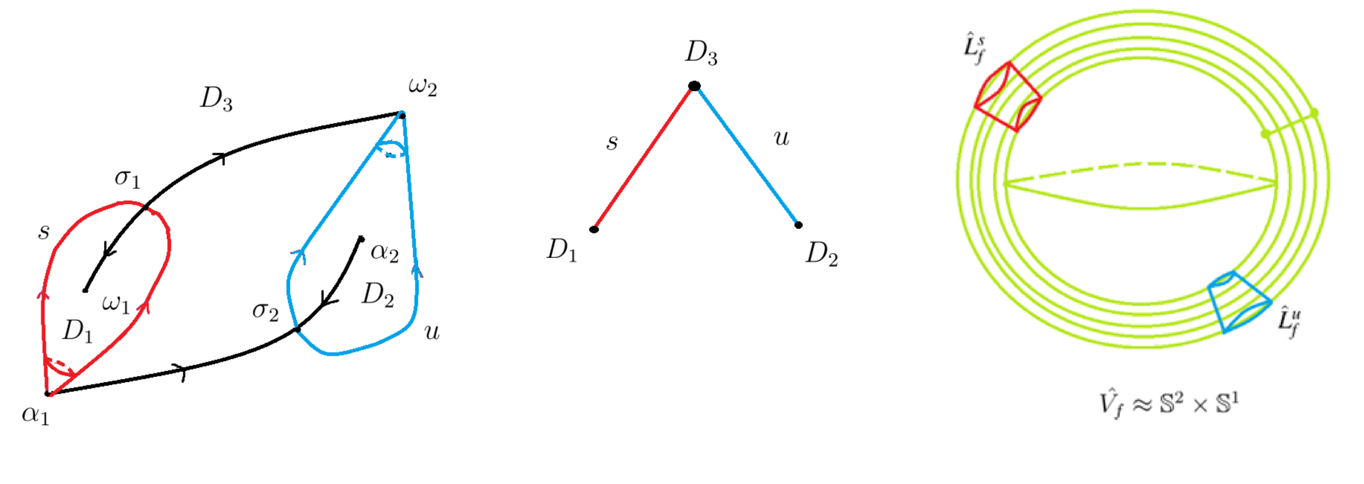


**Рис. 1:** Фазовый портрет диффеоморфизма $f \in G(M^3)$, его двухцветный граф и схема

**Определение 5.** *Двухцветным графом каскада $f \in G(M^3)$ назовем граф $\Gamma_f$ со следующими свойствами:*

1. *множество $V(\Gamma_f)$ вершин графа $\Gamma_f$ находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством $\mathcal{D}_f$, множество $E(\Gamma_f)$ ребер графа $\Gamma_f$ находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством $\mathcal{L}_f$;*
2. *вершины $v_i, v_j$ инцидентны ребру $e_{i,j}$ тогда и только тогда, когда соответствующие им области $D_i, D_j$ имеют общую границу;*
3. *ребро $e_{i,j}$ имеет цвет $s$ $(u)$ если оно соответствует сфере $cl\, W^s_{\sigma_1} \in \mathcal{L}_f$ $(cl\, W^u_{\sigma_2} \in \mathcal{L}_f)$.*

Так как схема $S_f$ диффеоморфизма $f$ тривиальна, то существует гомеоморфизм $\hat{\psi}_{_f} : \widehat{V}_f \to \widehat{V}_g$. Обозначим $\hat{\psi}^{-1}_{_f}(\mathbb{S}_g \times \{x\}) = \widetilde{\mathbb{S}_g}$, где $x \in \mathbb{S}^1$. Тогда $p^{-1}_f(\widetilde{\mathbb{S}_g}) = \bigcup_{i \in \Gamma} \widetilde{\mathbb{S}^i_g}$ счетное множество попарно непересекающихся поверхностей в $V_f$, гомеоморфных $\mathbb{S}_g$, и существует характеристическая поверхность $\widetilde{\mathbb{S}^0_g} = \Sigma_f$ такая, что $\widetilde{\mathbb{S}^i_g} = f^i(\widetilde{\mathbb{S}^0_g})$.

Граф $\Gamma_f$ вкладывается в $\Sigma_f$ следующим образом. Каждая сфера $L \in \mathcal{L}_f$ (а следовательно, и каждая область $D \in \mathcal{D}_f$) пересекает $\Sigma_f$ в точности по одной компоненте связности. Выберем по точке в каждой из компонент связности множества $\bigcup_{D \in \mathcal{D}_f} (D \cap \Sigma_f)$.

Если в границу обоих области $d_i, d_j \in \bigcup_{D \in \mathcal{D}_f} (D \cap \Sigma_f)$ входит сфера $l_{i,j} \in \bigcup_{L \in \mathcal{L}_f} (L \cap \Sigma_f)$, то соединим выбранные точки, лежащие в областях $d_i, d_j$, произвольной гладкой кривой, трансферсально пересекающей сферу $l_{i,j}$. Полученный образ графа $\Gamma_f$ будем также обозначать через $\Gamma_f$.

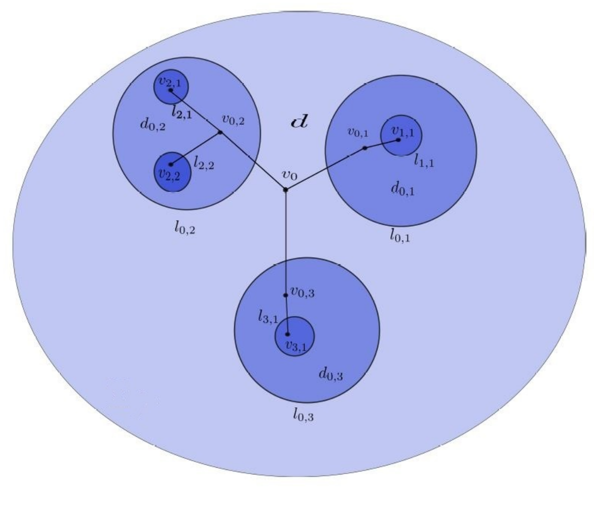


**Рис. 2:** Вложение графа $\Gamma_f$ в $\Sigma_f$

**Теорема 1.** *Диффеоморфизмы $f, f' \in G(M^3)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их графы $\Gamma_f$ и $\Gamma_{f'}$ изоморфны.*

Ключевой момент доказательства теоремы 1 заключается в проверке того факта, что из изоморфизма графов $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ следует существование гомеоморфизма $h : \Sigma_f \to \Sigma_{f'}$, переводящего множество $\mathcal{L}_f \cap \Sigma_f$ в множество $\mathcal{L}_{f'} \cap \Sigma_{f'}$

**Теорема 2.** *Для любого графа $\Gamma$, ребра которого окрашены в два цвета произвольным образом, существует диффеоморфизм $f \in G(M^3)$, двухцветный граф $\Gamma_f$ которого изоморфен графу $\Gamma$ посредством изморфизма $\zeta : \Gamma_f \to \Gamma$ такого, что $P_f = \zeta^{-1} P \zeta$.*

Обозначим через $k$ число седловых неподвижных точек диффеоморфизма, через $l$ — число узловых неподвижных точек диффеоморфизма и положим $g_f = g_{f'} = \frac{l-k+2}{2}$.

**Теорема 3.** *Если $g_f = 0$, то графы диффеоморфизмов $f, f' \in G(M^3)$ $\Gamma_f$ и $\Gamma_{f'}$ являются деревьями и существует алгоритм различения графов $\Gamma_f$, $\Gamma_{f'}$ за время $O(n)$, где $n$ - число вершин.*

*Если $g_f > 0$, то графы диффеоморфизмов $f, f' \in G(M^3)$ $\Gamma_f$ и $\Gamma_{f'}$ имеет в точности $g_f$ циклов и существует алгоритм различения графов $\Gamma_f$, $\Gamma_{f'}$ за время $O(n^{O(g_f)})$, где $n$ - число вершин.*

Доказательство теоремы 3 основывается на построении обычных графов по двухцветному графу и использовании доказанных оценок различения обыкновенных графов описанных в работах [5] и [6].

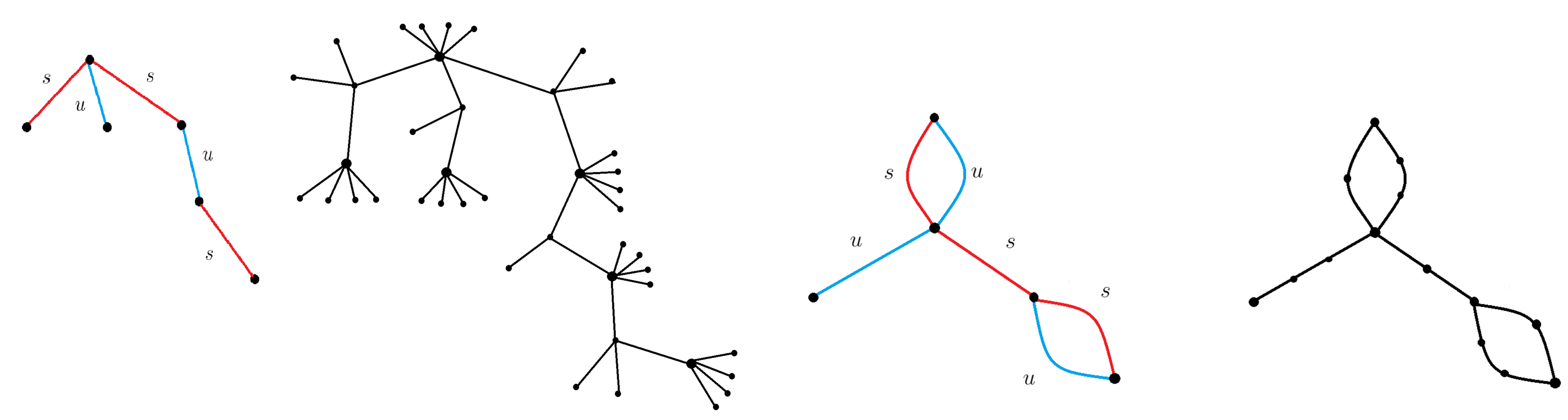


**Рис. 3:** Алгоритм построения графа $\Gamma_f$

## Список литературы

[1] Х. Бонатти, В. З. Гринес, О.В. Починка, *Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях*, Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей, Тр. МИАН, 250, Наука, М., (2005), 5–53; англ. пер.: Ch.

[2] Bonatti C., Grines V., Pochinka O. *Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds* Duke Mathematical Journal. (2019). Vol. 168. No. 13. P. 2507-2558.

[3] Гринес В. З., Жужома Е.В., Медведев В.С., Починка О.В.*Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла*,Тр. МИАН, 2010, 111-133

[4] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, О. В. Починка, *О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразии в топологический поток*, Матем. сб., (2012), том 203, номер 12, 81–104

[5] Hopcroft, J.E. and Wong, J.K. *Linear Time Algorithm for Isomorphism of Planar Graphs*, Proceedings of the 6th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, (1974), 172-184.

[6] Miller G. *Isomorphism testing for graphs of bounded genus* Los Angeles. (1980). 225-235 c.