

Студенческая школа-конференция «Математическая весна 2023»

Сборник тезисов

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Нижний Новгород,
27–30 Марта 2023

Организаторы

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород

Организационный комитет

- Владислав Дмитриевич Галкин
- Андрей Игоревич Морозов
- Елена Вячеславовна Ноздринова
- Данила Денисович Шубин

Программный комитет

- Вячеслав Зигмундович Гринес
- Ольга Витальевна Починка

Благодарность. Конференция проведена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение №075-15-2022-1101.

Содержание

Бифуркационные свойства множества Мандельброта <i>Абдрахимова К.Р.</i>	7
Basis-Free Formulas for Characteristic Polynomial Coefficients in Clifford Algebras <i>Abdulkhaev K.S., Shirokov D.S.</i>	7
On some 3-generated 6-transposition groups <i>Afanasev Vsevolod A., Another Author I.I.</i>	8
Псевдоевклидовы аналоги интегрируемых систем механики: осесимметричный случай Жуковского <i>Агуреева Е.С., Кибкало В.А.</i>	10
Almost differentially non-degenerate singularities of Nijenhuis operators <i>Акран D. Zh.</i>	11
Absence of Solutions to Complex-Valued Semilinear Equations <i>Ali Hanan</i>	12
On plane dendrites which have unusual type of ramification <i>Allabergenova K.B.</i>	14
Asymptotic approach for solving equation with almost periodic coefficient <i>Astafyeva Polina Y., Kiselev Oleg M.</i>	15
A family of Hodgkin-Huxley-type of models with bistability between silent state and bursting state <i>Bagautdinova E.R., Stankevich N. V.</i>	16
Классификация многомерных временных рядов с помощью методов топологии <i>Банарь А.А.</i>	17
Discrete Hodge theory, towards Hodge Laplacian eigenmaps <i>Beketov Maxim</i>	18
The problem on parametric resonance for Hamiltonian systems <i>Belova A.S.</i>	19
Топология слоения Лиувилля бильярда, ограниченного эллипсоидом, в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{2,1}$ <i>Белозеров Г.В.</i>	19
Mathematical modeling of the temporal shift of current-voltage signals in multisensor system 4H2SO4 <i>Bitkulov M.D.</i>	21

Двумерные лоренцевы орбиболды с аносковим действием группы изометрий <i>Bogolepova E.V., Zhukova N.I.</i>	22
On a matching arrangement and its properties <i>Bolotnikov A.I.</i>	24
Построение прямоугольной диаграммы поверхности Зейфорта <i>Чернавский Михаил</i>	25
c_1 -сферические бордизмы <i>Черных Георгий</i>	26
On some Lie groups in non-degenerate and degenerate Clifford algebras <i>Filimoshina E.R., Shirokov D.S.</i>	26
Об индексах Морса состояний равновесия и гетероклинических пересечениях полярных потоков на сфере <i>Фомин Д. О.</i>	27
Круговая схема Флейтас для градиентно-подобных потоков поверхности <i>Галкин В.Д., Рахимуллина Д.А.</i>	29
Действия дискретного тора сложности один в случае малых накрытий <i>Горчаков Владимир</i>	30
Топология слоения Лиувилля бильярда на одной области гиперболоида в поле силы Гука <i>Хотин Н. А.</i>	30
Об одном классе коммутирующих дифференциальных операторов <i>Ивлев М.</i>	32
Metapopulation Persistence and Extinction in a Fragmented Random Habitat: A Mathematical Study <i>Korotkov A.D., Petrovskii S.V.</i>	32
Коротковолновые асимптотики внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в торе и их связь с классическими бильярдами <i>Курицина Е.А., Миненков Д.С.</i>	33
Mathematical modeling of the temporal shift of current-voltage signals in multisensor system KF <i>Kuzmin I.L.</i>	34
Реализация бильярдными книжками вырожденных 3-атомов с одной окружностью-звездочкой произвольного типа <i>Кузнецова А.А.</i>	36
Solving boundary value problems with moving boundaries using the method of constructing solutions integro-differential equations <i>Litvinov V.L., Litvinova K.V.</i>	37

О полярных потоках с локально плоскими замыканиями сепаратрис <i>Максимов Д. А.</i>	38
Принцип максимума Александра–Бакельмана для эллиптических операторов на стратифицированном множестве типа “книжка” <i>Mironenko Foma</i>	39
Newton polytopes in the differential elimination problem <i>Mukhina Y.S.</i>	40
Schrödinger operator spectrum in the covering of an elliptic ring. <i>Nikulin M.A.</i>	41
Оценки отклонений приближенных решений от точных в эллиптической задаче с препятствием для p -Лапласиана <i>Новикова А.А.</i>	42
Зацепление как полный инвариант 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла <i>Ноздрин А.А.</i>	43
Устойчивая изотопическая связность диффеоморфизмов Палиса <i>Ноздрин Е.В.</i>	44
Mathematical modeling of plasma transport in a spiral magnetic field <i>Oksogoeva I.P.</i>	45
Симплициальная геометрия взвешенных полных пересечений <i>Овчаренко М.А.</i>	46
Двойственность Долгачёва–Никулина для слоёв торических моделей Ландау–Гинзбурга гладких 3-многообразий Фано <i>Овчаренко Михаил, Harder Andrew</i>	47
On recognition of finite groups by the set of conjugacy class sizes <i>Panshin V.</i>	47
Remark on one Evans type model of geo-economics <i>Podolin D., Rassadin A.</i>	48
Топология особенностей эллиптического бильярда в потенциальном поле <i>Пустовойтов С.Е.</i>	49
New explicit exact solutions of one-dimensional heat equation and some its applications <i>Rassadin A.</i>	50
On element orders in covers of $PSL_2(q)$ <i>Rodionov V. M.</i>	52
Upper bound for capital in Solow model with logistic labor resource <i>Rubtzov M., Pisarev M., Rassadin A.</i>	53

Classical solution of the initial-value problem for a quasilinear wave equation with discontinuous initial conditions <i>Rudzko J.V., Korzyuk V.I.</i>	54
О классификации полярных потоков на четырехмерных многообразиях <i>Сараев И.А.</i>	55
Неособые потоки Морса-Смейла с тремя периодическими орбитами на ориентируемых 3-многообразиях <i>Шубин Д.Д., Починка О.В.</i>	56
Об инварианте виртуальных узлов <i>Соколов П. П.</i>	57
Topological structures of cognitive maps <i>Sorokin Konstantin</i>	58
Классификация поверхностей дель Пецо степени 8 без точек <i>Трепалкин А.С.</i>	59
Некоторые деформации столов-книжек, реализующих упорядоченные бильярдные игры <i>Туньянци Д. А.</i>	59
Бифуркации в моделях популяционной динамики с эффектом Олли <i>Усманова Д.Р.</i>	60
Jordan constant for Cremona group of rank 2 over a finite field <i>Vikulova A.V.</i>	61
Образующие и соотношения декартовых подгрупп граф-произведений групп <i>Вылегжанин Ф. Е.</i>	62
On Jacobian group and complexity of the delta-graph <i>Yudin I.N.</i>	64
Слоение Лиувилля интегрируемого бильярда с гравитационным потенциалом в некомпактной области, ограниченной софокусными парабололами <i>Зайцева Анастасия Владимировна</i>	65
Бильярд с проскальзыванием на трехмерном столе без фокальных кривых <i>Завьялов В.Н.</i>	66
Релейная модель замирающего нейрона <i>Зеленова В.К.</i>	68
The characteristic Lie ring of the evolutionary equation $u_y = u_x + f(u)$. <i>Zotova E.I.</i>	69

Бифуркационные свойства множества Мандельброта

Абдрахимова К.Р.

Уфимский университет науки и технологий

Рассматривается комплексная динамическая дискретная система

$$z_{n+1} = z_n^2 + \mu, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad z_n, \mu \in \mathbb{C} \quad (1)$$

Эта система возникает во многих задачах нелинейной динамики, в частности при описании множества Жюлиа и Мандельброта (см. [1]).

Система (1) имеет богатое бифуркационное поведение. Она имеет точки равновесия, циклы различных периодов, аттракторы и др. В настоящем докладе изучаются бифуркации системы (1) в окрестностях ее точек равновесия и циклов.

Система (1) имеет 2 точки равновесия

$$z_1^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\mu}}{2}, \quad z_2^* = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\mu}}{2},$$

а также циклы различных периодов.

При изменении параметра μ эти точки равновесия и циклы могут изменить характер устойчивости, что может привести к различным бифуркациям. В докладе изучаются бифуркационные свойства в окрестности точки равновесия $z_1^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\mu}}{2}$, а также в окрестности цикла периода 2. В качестве приложения изучаются свойства множества Мандельброта.

Список литературы

- [1] Кроновер М.Р. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории, М.: Постмаркет, 2000. — 352с.

Basis-Free Formulas for Characteristic Polynomial Coefficients in Clifford Algebras

Abdulkhaev K.S.¹, Shirokov D.S.^{1,2}

1. *HSE University, Moscow, Russia; kshabdulkhaev@edu.hse.ru, dshirokov@hse.ru*

2. *Institute for Information Transmission Problems of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

In this talk, we summarize the findings of the papers [1, 2].

We consider real non-degenerate Clifford algebras $\mathcal{C}_{p,q}$ [3, 7] (or real geometric algebras) of arbitrary dimension and signature $p+q = n$. The real Clifford algebras are isomorphic to the matrix algebras over \mathbb{R} , \mathbb{C} , $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, \mathbb{H} , or $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ depending on $p-q \pmod 8$. The advantage of Clifford algebras over matrix algebras is a more powerful mathematical apparatus, which allows us to naturally realize different geometric structures (vectors, rotors, spinors, etc.) and operations (the exterior product, the grade structure, the grade involution, etc.). For

this reason, Clifford algebras have various applications in physics, engineering, computer science, etc.

In this work, we study the characteristic polynomial coefficients and computation of the inverse of a multivector (an arbitrary element of $\mathcal{C}_{p,q}$). The work builds upon the paper [5], which generalizes the Faddeev–LeVerrier recursive algorithm from matrix formalism to Clifford algebras. We use this algorithm to obtain explicit (basis-free) formulas for the characteristic polynomial coefficients and inverse in $\mathcal{C}_{p,q}$ in the cases of low dimensions. The formulas involve only the operations of Clifford product, summation, and some generalizations of the grade involution and the reversion. Apart from that, we also present a method to obtain these formulas in the cases of arbitrary dimension.

We also consider formulas for the characteristic polynomial coefficients in $\mathcal{C}_{p,q}$ in some special cases. In particular, we present corresponding formulas for vectors (elements of grade 1) and basis elements in the case of arbitrary n and formulas for rotors (elements of spin groups) in the cases $n \leq 5$. These formulas might further enhance the practical relevance of the research in various fields.

The obtained results are interesting for the use of Clifford algebras in a range of fields, including computer science, physics, engineering, etc. For example, the characteristic polynomial coefficients are used to solve the Sylvester and Lyapunov equations in Clifford algebra [6]. Also the presented explicit formulas are suitable for symbolic calculations.

The publication was prepared within the framework of the Academic Fund Program at HSE University in 2022 (grant 22-00-001).

Список литературы

- [1] Abdulkhaev, K., Shirokov, D.: On Explicit Formulas for Characteristic Polynomial Coefficients in Geometric Algebras. In: Magnenat-Thalmann N. et al. (eds) *Advances in Computer Graphics. CGI 2021. Lecture Notes in Computer Science*, vol 13002. Springer, Cham. (2021). https://doi.org/10.1007/978-3-030-89029-2_50
- [2] Abdulkhaev, K., Shirokov, D. Basis-Free Formulas for Characteristic Polynomial Coefficients in Geometric Algebras. *Adv. Appl. Clifford Algebras* 32, 57 (2022). <https://doi.org/10.1007/s00006-022-01232-0>
- [3] Hestenes, D.: *Space-Time Algebra*. Gordon and Breach, New York (1966)
- [4] Lounesto, P.: *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1997)
- [5] Shirokov, D.: On computing the determinant, other characteristic polynomial coefficients, and inverse in Clifford algebras of arbitrary dimension. *Computational and Applied Mathematics* 40, 173, 29 pp. (2021). <https://doi.org/10.1007/s40314-021-01536-0>
- [6] Shirokov, D.: Basis-free solution to Sylvester equation in Clifford algebra of arbitrary dimension. *Adv. Appl. Clifford Algebras* 31, 70 (2021). <https://doi.org/10.1007/s00006-021-01173-0>

On some 3-generated 6-transposition groups

Afanasev Vsevolod A.^{1,2}, Another Author I.I.^{2,3}

1. *Novosibirsk State University*

2. *Sobolev Institute of Mathematics, SB RAS*

3. *Affiliation 3*

A group G is said to be an n -transposition group if it is generated by the set D such that

- $x \in D \implies |x| = 2$,
- $D^G = D$ (i.e. D is a normal set),
- $x, y \in D \implies |xy| \leq n$.

Examples of such groups are easy to come by: for instance all symmetric groups S_n are 3-transposition groups, while the alternating groups A_n are 6-transposition groups. Alongside many other interesting examples we also mention sporadic simple groups Fi_{22} , Fi_{23} , Fi_{24} (3-transposition groups), the Baby Monster group \mathbb{B} – a 4-transposition group and the Monster group \mathbb{M} (a 6-transposition group).

This class of groups, while being interesting by itself due to an abundance of examples is also closely connected to the theories of axial and Majorana algebras [5], [6].

Currently some kind of general classification theory is available only for the case $n = 3$, in particular, it is known that each finitely-generated 3-transposition group is finite [4]. For other values of n one can find only partial results [2], [3].

The goal of this talk is to relay the progress of joint work with A.Mamontov on classifying 6-transposition groups, generated by three elements from D , two of which commute, i.e. suitable homomorphic images of the group

$$G = \langle x, y, z | x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^2 = (yz)^a = (xz)^b = e \rangle,$$

where $a, b \in \{1..6\}$. **Theorem.** Let $(r_1, r_2) \neq (6, 6)$. Then the 6-transposition homomorphic images of G are all finite and are either solvable groups or are homomorphic images of one of the following groups:

Group	Isomorphism type
G_1	$PGL(2, 9)$
G_2	$2 \times ((2^5 : A_5) : 2^2)$
G_3	$(A_5 \times A_5) : 2^2$
G_4	$2 \times (2^{10} : PSL(2, 11))$
G_5	$2 \times (3^{10} : PSL(2, 11))$
G_6	$2^{10} : A_5$
G_7	$2 \times (2^5 : S_6)$
G_8	$2 \times 3.S_6$
G_9	M_{12}
G_{10}	$(2.M_{22}) : 2$

Remark: the isomorphism types of solvable groups are also explicitly known but are not shown for the sake of brevity.

Список литературы

- [1] S.C.E. Decelle, Majorana Representations and the Coxeter Groups $G^{(m,n,p)}$. *Imperial College London*, 2014.
- [2] A. Mamontov, A. Staroletov, M. Whybrow, Minimal 3-generated Majorana algebras. *Journal of Algebra* 2019, vol. 524 pp. 367–394.
- [3] S. Khasraw, J. McInroy, S.Shpectorov, Enumerating 3-generated axial algebras of Monster type. (2018) <https://arxiv.org/abs/1809.10657>
- [4] J.I. Hall, The general theory of 3-transposition groups *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 1993. vol. 114 pp. 269-294.
- [5] J. McInroy, S.Shpectorov, Axial algebras of Jordan and Monster type. (2022) <https://arxiv.org/abs/2209.08043>
- [6] A.A. Ivanov. The Monster Group and Majorana Involutions, *Cambridge Tracts in Mathematics*, 2009. vol. 176

Псевдоевклидовы аналоги интегрируемых систем механики: осесимметричный случай Жуковского

Агуреева Е.С.¹, Кибкало В.А.¹

1. МГУ имени М.В.Ломоносова

Топологический подход к изучению интегрируемых систем был развит в работах А.Т.Фоменко и его научной школы, см. [1]. Слоение Лиувилля системы, т.е. разбиение фазового пространства на совместные поверхности уровня первых интегралов, характеризуется при помощи инварианта Фоменко–Цишанга — графа с оснащением, ребра которого отвечают однопараметрическим семействам регулярных торов Лиувилля, а вершины — особенностям слоения. Совпадение двух инвариантов у разных систем в выбранных неособых зонах энергии означает их топологическую эквивалентность (послойную гомеоморфность слоений). При этом были обнаружены неожиданные связи с трехмерной топологией и теорией особенностей, а в последние годы, также с теорией интегрируемых бильярдов.

В работе А.В.Борисова и И.С.Мамаева [2] была предложена следующая замена в фазовом пространстве $R^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$, сохраняющая вещественной скобку Пуассона и первые интегралы многих известных интегрируемых случаев динамики: систем Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, а также ряда других.

$$x_1 \rightarrow ix_1, \quad x_2 \rightarrow ix_2, \quad J_1 \rightarrow iJ_1, \quad J_2 \rightarrow iJ_2, \quad J_3 \rightarrow J_3, \quad x_3 \rightarrow x_3$$

Полученные системы удовлетворяют псевдо-сферическим уравнениям Эйлера (для алгебры Ли $e(2,1)$ вместо алгебры Ли $e(3)$ из классической механики). Будем называть их псевдоевклидовыми аналогами соответствующих систем. Наш доклад будет посвящен случаю Жуковского, являющегося обобщением волчка Эйлера (твердого

тела с главными моментами инерции A_1, A_2, A_3 , закрепленного в центре масс) путем добавления постоянного гиростатического момента $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Параметрами задачи являются моменты инерции A_i , компоненты вектора λ_i . Значения функций Казимира $f_1 = a, f_2 = b$, гамильтониана $H = h$ и первого интеграла $K = k$ сохраняются вдоль фазовых траекторий системы (последние лежат на слоях слоения Лиувилля):

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = a, \quad f_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 - x_3 J_3 = b,$$

$$H = \frac{(J_1 - \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(J_2 - \lambda_2)^2}{2A_2} - \frac{(J_3 - \lambda_3)^2}{2A_3} = h, \quad K = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2 = k.$$

Утверждение 1. Пересечение в пространстве x_1, x_2, x_3 , при фиксированном \vec{J} , обобщенного гиперboloида $f_1 = a$ и плоскости $f_2 = b$ (как квадратики на этой плоскости) полностью определяется тройкой значений $a, b, k = K(\vec{J})$. Т.е. каждый слой слоения Лиувилля является расслоением с базой $H = h, K = k$ (обе функции не зависят от \vec{J}).

Теорема Слоение $H = h, K = k$ на пространстве $R^3(J_1, J_2, J_3)$ при $A_1 \neq A_3, \lambda_1 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$ устроено так: в прообразе каждой точки бифуркационной кривой $h(t), k(t)$ находится точка максимума (минимума) или слой, гомеоморфный “восьмерке”. Пробразы остальных точек либо пусты, либо гомеоморфны окружности S^1 или двум окружностям $2S_1^2$.

$$2h(t) = t^2 (A_1 \lambda_1^2 / (1 + A_1 t)^2 + A_2 \lambda_2^2 / (1 + A_2 t)^2 - A_3 \lambda_3^2 / (1 + A_3 t)^2)$$

$$k(t) = A_1^2 \lambda_1^2 / (1 + A_1 t)^2 + A_2^2 \lambda_2^2 / (1 + A_2 t)^2 - A_3^2 \lambda_3^2 / (1 + A_3 t)^2.$$

Список литературы

- [1] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: РХД, т. 1, 2. 1999.
- [2] Borisov A. V., Mamaev I. S. Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces // Rus. J. of Math. Phys. 2016. Vol. 23, №4. P. 431–454.

Almost differentially non-degenerate singularities of Nijenhuis operators

Akpan D. Zh.^{1,2}

1. Lomonosov Moscow State University
2. Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics

Let us consider operator fields L on manifolds; it turns out that a necessary condition for their integrability is the vanishing of the Nijenhuis tensor N_L .

Definition. Let M^n be a smooth n -dimensional manifold and let L be a tensor field of type $(1, 1)$. Then the Nijenhuis torsion or the Nijenhuis tensor N_L is a tensor of type $(1, 2)$ which is invariantly defined as follows:

$$N_L[u, v] = L^2[u, v] + [Lu, Lv] - L[u, Lv] - L[Lu, v],$$

where u, v are arbitrary vector fields and $[u, v]$ is their commutator.

The report will describe the structure of a Nijenhuis operator L near a singular point. By a singular point $P \in M$ we mean a point at which the rank of the characteristic mapping $\Phi : (trL, \dots, detL) \rightarrow R^n$ defined by invariants of the operator is less than n .

Theorem 1. *Let L be an n -dimensional Nijenhuis operator for which $\sigma_1 = x_1, \sigma_2 = x_2, \dots, \sigma_{n-1} = x_{n-1}$ in some coordinates $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y)$, and $\sigma_n = (-1)^n \det L = f(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ is an arbitrary smooth function such that $f_y \neq 0$. Then, in these coordinates, L has the following form:*

$$\begin{bmatrix} -x_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x_{n-2} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -x_{n-1} + f_{x_1} & f_{x_2} & \dots & f_{x_{n-1}} & f_y \\ \frac{x_1 f_{x_1} + \dots + x_{n-1} f_{x_{n-1}} - f_{x_1} f_{x_{n-1}} - f}{f_y} & -\frac{f_{x_1} + f_{x_2} f_{x_{n-1}}}{f_y} & \dots & -\frac{f_{x_{n-2}} + f_{x_{n-1}}^2}{f_y} & -f_{x_{n-1}} \end{bmatrix}.$$

Theorem 2. *Let L be an n -dimensional Nijenhuis operator, where $n > 2$, for which $\sigma_1 = x_1, \sigma_2 = x_2, \dots, \sigma_{n-1} = x_{n-1}$ in some coordinates $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y)$, and let $\sigma_n = (-1)^n \det L = f(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ be a smooth function with a Morse singularity with respect to the variable y . Then there is a regular change of coordinates $y \rightarrow y(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ preserving the remaining coordinates x_1, \dots, x_{n-1} , after which $f = \pm y^2$, and the corresponding Nijenhuis operators have the form*

$$L = \begin{bmatrix} -x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -x_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \pm 2y \\ -\frac{y}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Also we will discuss about relations between Nijenhuis operators and projective equivalent metrics.

The author is a scholarship holder of the "Basis" Foundation.

Список литературы

- [1] D. Akpan. Singularities of Two-Dimensional Nijenhuis Operators, European Journal of Mathematics, 8, 2022, 1328–1340
- [2] D. Akpan. Almost Differentially Non-degenerate Nijenhuis Operators, Russian Journal of Mathematical Physics, 4, 29, 2022, 413–416

Absence of Solutions to Complex-Valued Semilinear Equations

Ali Hanan

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

This paper is devoted to extending the results on the absence of solutions to semilinear inequalities with bounded coefficients in an n -dimensional complex space.

We consider semilinear inequalities of the second-order with bounded coefficients

$$-\sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial z_j} a_{k,j}(z, u) \geq |u|^q, \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (1)$$

Here $a_{k,j} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $i, j = 1, \dots, n$, are Caratheodorian functions satisfying the condition:

$$|a_{k,j}(z, u)| \leq a_0 |u|^p, \quad (z, u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, \quad (2)$$

with constant $a_0 \geq 0$ and some $p > 0$ and $q > p$.

In order to compare two complex numbers, we have the following definition:

Definition(1): If z_1, z_2 are some complex values satisfying inequalities

$$Re(z_1) \geq Re(z_2); \text{ and } Im(z_1) \geq Im(z_2),$$

then we can write $z_1 \geq z_2$.

Conditions for the absence of solutions of complex-valued semilinear second-order inequalities with bounded coefficients are given in the following theorem.

Theorem(1): Problem (1) has no global non-trivial weak solution when

$$q \leq \frac{n}{n-4}p, \quad q > p.$$

Proof: Let $z = x + iy$, where $x = \rho \cos(\theta), y = \rho \sin(\theta) \in \mathbb{R}$, and let $u(z) = R(\rho)e^{i\Theta(\theta)}$. Hence, from that and from definition (1), we can easily write inequality (1) in the form:

$$\begin{cases} -ReL(Re(a_{i,j})) + ImL(Im(a_{i,j})) \geq R^q, \\ -ImL(Re(a_{i,j})) - ReL(Im(a_{i,j})) \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

where

$$L(f(z)) = \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_k \partial z_j} = ReL(f) + iImL(f).$$

The theorem is proven on the basis of the definition of weak solutions and by using the test function method (see [2]).

A generalization of the previous theorem to a higher order, which has the form:

$$-\sum_{k \leq |\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(z, u) \geq u^q \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (4)$$

is given by the following theorem:

Theorem(2): Problem (4) has no global non-trivial weak solution when

$$q \leq \frac{n}{n-2|\alpha|}p, \quad q > p.$$

Список литературы

- [1] A. Farina and J. Serrin, Entire solutions of completely coercive quasilinear elliptic equations. II, J. Diff. Eqns. 250,4436 (2011).
- [2] E. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev A priori estimates and the absence of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities// Tr. MIAN, 2001. - 234. - P. 1–383.
- [3] Galakhov E. I., Salieva O. A. Blow-up of solutions of some nonlinear inequalities with singularities on unbounded sets// Math. Notes. - 2015. - 98. - P. 187-195.
- [4] O. A. Salieva Absence of solutions of some non-linear inequalities with fractional powers of the Laplace operator// Math. Notes. - 2017. - 101, No. 4. - P. 699-703.

On plane dendrites which have unusual type of ramification

Allabergenova K.B.^{1,2}

1. Novosibirsk State University

2. Novosibirsk State Technical University

Let $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ be a system of contraction maps on the plane. A non-empty compact set K satisfying the equation $K = \bigcup_{i=1}^m S_i(K)$ is called *the attractor of the system* \mathcal{S} . It is said that the system \mathcal{S} satisfies *the open set condition* (OSC) if there exists an open set U such that for any $S_i, S_j \in \mathcal{S}$, $S_i(U) \subset U$ and $\forall i \neq j$, $S_i(U) \cap S_j(U) = \emptyset$.

If the attractor K of the system \mathcal{S} is connected and does not contain simple closed curves, then K is a *self-similar dendrite* [1]. As is well known, in this case, the ramification orders of the points K are finite [2].

Since K is a dendrite, for any $S_i, S_j \in \mathcal{S}$ the intersections $(S_i(K) \cap S_j(K))$ of its copies are sub-dendrites in K . If at least one of such sub-dendrites K' is different from a point or Jordan arc, then its set of ramification points is dense in K' , so the open set U for the system \mathcal{S} is disconnected.

Theorem 1. If for some $S_i, S_j \in \mathcal{S}$ the intersection $(S_i(K) \cap S_j(K))$ is different from a point or a Jordan arc, then for any choice of an open set U in the open set condition, U is a countable union of connected components.

Theorem 2. For any $n \geq 2$ there is a system $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$, $m > n$ of contracting similarities on a plane whose attractor is a dendrite K with the following property: there exists a sub-dendrite $K' \subset K$ such that for any nonequal $i, j \in \{1, \dots, n\}$, the intersection $(S_i(K) \cap S_j(K))$ is equal to K' . In this case, $\dim_{\mathbb{H}} K' < \dim_{\mathbb{H}} K$.

Список литературы

- [1] M. Samuel, A. Tetenov, D. Vaulin, Self-similar dendrites generated by polygonal systems in the plane // Sib. El. Math. Rep., №14 (2017), С. 737 – 751.

- [2] A. Tetenov, Finiteness properties for self-similar sets, arxiv.org/abs/2003.04202, (2020)

Asymptotic approach for solving equation with almost periodic coefficient

Astafyeva Polina Y.^{1,3}, Kiselev Oleg M.^{2,3}

1. *Ufa State Petroleum Technological University*

2. *Innopolis University*

3. *Inst. of Math. with Com. Centre of UFRC RAS*

This work considers linear equations of the second order with almost periodic coefficient:

$$u'' + (\omega^2 + \epsilon q(t))u = 0 \quad (1)$$

here $q(t)$ is almost periodic function and ϵ is a small positive parameter.

This equation has two important properties which define behaviours of solutions. The first one is a coefficient ω^2 . It defines an oscillation of the solution for the simplest case $q(t) \equiv 0$. Another coefficient $q(t)$ can or cannot imply the resonant behaviour for the solution. Here we consider almost periodic coefficient [1], [2]:

$$q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \cos\left(\left(2 - \frac{1}{n^p}\right)t\right). \quad (2)$$

$$k > 1, p > 0$$

The task is to determine the areas of stability of solutions of the equation depending on the parameters δ and ϵ . Let us construct an asymptotic solution in the form:

$$u \sim u_0 + \epsilon u_1, \quad (3)$$

Let us substitute (3) in (1) and combine the terms at the same degrees ϵ . Obtain the equation for the main term:

$$\frac{d^2}{dt^2} u_0 + \omega^2 u_0 = 0.$$

Let us look for its solution in the form of $u_0 = a(\tau) \cos(\omega t) + b(\tau) \sin(\omega t)$, using two scale method [3], where $\tau = \epsilon^\gamma t$ is slow time.

The equation for the first correction:

$$u_1 = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) - b_1 t \sin(\omega t) - a_1 t \cos(\omega t) + \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \int_0^t f(\tilde{t}) \sin(\omega \tilde{t}) d\tilde{t} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \int_0^t f(\tilde{t}) \cos(\omega \tilde{t}) d\tilde{t}. \quad (4)$$

here $a_1 = \epsilon^{\gamma-1} a'$ and $b_1 = \epsilon^{\gamma-1} b'$, a stroke means a slow-time derivative τ . $f(t) = -q(t) (b \sin(\omega t) + a \cos(\omega t))$

After sequential integration of all parts by \tilde{t} , using Maxima computer algebra systems [4], asymptotics [5], a system of equations is obtained:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}w &= \frac{Bw}{\tau^\alpha} + v\kappa, \\ \frac{d}{d\tau}v &= -w\kappa - \frac{Bv}{\tau^\alpha}.\end{aligned}\tag{5}$$

If $\kappa \neq 0$, asymptotic solution can be obtained by the WKB method [6]:

$$w \sim C_1 \frac{\exp(\int_1^\theta \sqrt{\frac{\lambda^2}{\theta^{2\alpha}} - \frac{\alpha\lambda}{\theta^{\alpha+1}} - 1} d\theta)}{\sqrt[4]{\frac{\lambda^2}{\theta^{2\alpha}} - \frac{\alpha\lambda}{\theta^{\alpha+1}} - 1}}.$$

Список литературы

- [1] Levitan, “Almost periodic functions,” Gos. izd. tech.-teor. lit., 1953.
- [2] B.M.Levitan, V.V.Zhikov. “Almost periodic function and differential equations,” M. MSU, 1978.
- [3] N.N. Bogolyubov and Yu.A. Mitropolskii, “Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations“, Gordon and Breach science publishers, New York,1961, p. 537.
- [4] <https://maxima.sourceforge.io/index.html>
- [5] P.Y.Astafyeva, O.M.Kiselev, “Subresonant solutions of the linear oscillator equation, 2021 International Conference Nonlinearity, Information and Robotics, Innopolis, Russia, pp 90-94.
- [6] Olver, Frank William John, Asymptotics and Special Functions, 1974, Academic Press.

A family of Hodgkin-Huxley-type of models with bistability between silent state and bursting state

Bagautdinova E.R.^{1,2}, Stankevich N. V.¹

1. *National Research University Higher School of Economics*
2. *Saratov State University*

Hodgkin-Huxley-type models can describe the behavior of different cell types, such as neurons, cardiomyocytes, pancreatic beta cells etc. These models take into account potential-dependent ion channels [1]. They play an important role in various processes in the cell, such as communication, proliferation, differentiation, etc. [3]. Pathologies of ion channels functioning can manifest in diseases, including cancer.

One of the models based on the Hodgkin-Huxley formalism is the model proposed by Sherman et al. in [6]. It describes the generation and propagation of action potentials in electrically excitable cells, taking into account K-Ca channels. In [4], this model was modified: modification takes into account an additional ion channel. It demonstrates bistability

between the bursting attractor and a stable steady state, which can correspond to pathological dynamical behavior of ion channel leading to damping of cell oscillatory activity. This is possible due the characteristic of added ion channel is non-monotonic.

Our research is aimed at developing and studying new models demonstrating bistability. We propose a model that accounts for an additional ion channel with a monotonic ion channel characteristic. We also propose a model that accounts both types of additional ion channels with monotonic and non-monotonic characteristics. As a result of the study, it was found that both models exhibit bistability. We studied parameter space of models, localized an area of bistability and checked probability of silent state manifestation.

This work was supported by the Russian Science Foundation grant 20-71-10048.

Список литературы

- [1] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, "Currents carried by sodium and potassium ions through the membrane of the giant axon of loligo," *The Journal of physiology*, vol. 116, 1952, pp. 449–472.
- [2] B. A. Simms and G. W. Zamponi, "Neuronal voltage-gated calcium channels: structure, function, and dysfunction," *Neuron*, vol. 82, 2014, pp. 24–45.
- [3] A. Sherman, J. Rinzel, and J. Keizer, "Emergence of organized bursting in clusters of pancreatic beta-cells by channel sharing," *Biophysical journal*, vol. 54, 1988, pp. 411–425.
- [4] N. Stankevich and E. Mosekilde, "Coexistence between silent and bursting states in a biophysical Hodgkin-Huxley-type of model," *Chaos*, vol. 27, 2017, 123101.

Классификация многомерных временных рядов с помощью методов топологии

Банарь А.А.

Российский Университет Дружбы Народов

Инструменты алгебраической топологии предназначены для предоставления количественной информации как о локальных, так и о глобальных свойствах графа, что позволяет анализировать функциональные паттерны всего мозга без потери локальных знаний о его областях. Следовательно, топологический анализ данных предоставляет ряд новых топологических и геометрических инструментов для анализа сигналов ЭЭГ. Распределение нейронной активности, возникающее в разных областях мозга, влечёт за собой различные паттерны работы мозга, и ожидается, что оно найдет своё выражение в тонких, но весьма существенных различиях в топологических характеристиках. При исследовании топологических фазовых переходов в функциональных сетях мозга было выявлено, что топологического инварианта, называемого характеристикой Эйлера, достаточно для характеристики последовательности топологических

фазовых переходов в сложной сети. Постоянная гомология не только обеспечивает эффективные алгоритмы для вычисления числа Бетти каждого комплекса в рассматриваемых семействах, но и кодирует эволюцию вложенных комплексных групп гомологии в различных масштабах. Как характеристики Эйлера, так и устойчивая гомология помогают лучше понимать данные и сохранять стабильность в отношении возмущений или присутствия шума в сигналах ЭЭГ. Таким образом, они раскрывают процедуру неврологического восприятия качества изображения с разных точек зрения и в некоторой степени дополняют друг друга. Следовательно, алгебраические топологические характеристики сигнала ЭЭГ, а именно характеристики Эйлера и устойчивая гомология, могут быть выбраны для анализа реакций мозга на изображения с различными уровнями искажений.

Литература

- [1] *Altındış F, Yılmaz B, Borisenok S, İçöz K.*, Parameter investigation of topological data analysis for EEG signals. *Biomedical Signal Processing and Control*. 2021;63:102196. doi: 10.1016/j.bspc.2020.102196.
- [2] *De Silva V, Ghrist R.*, Coverage in sensor networks via persistent homology. *Algebraic & Geometric Topology*. 2007;7(1):339–358. doi: 10.2140/agt.2007.7.339

Discrete Hodge theory, towards Hodge Laplacian eigenmaps

Beketov Maxim

HSE University

Hodge theory is a celebrated gem of mathematics, connecting differential geometry to algebraic topology: it states that cohomology classes of a smooth manifold are given by kernels of (generalised) Laplace operators. This theory can be seen in a discrete setting — on graphs — which paves the way to many data-analytic applications.

In this talk, a self-contained review of discrete Hodge theory (on graphs) will be provided, following [1] — only requiring knowledge of linear algebra and very basic graph theory.

A direction of potential research on this topic is generalising so-called Laplacian eigenmaps [2] — a dimension reduction technique widely used in data analysis — to not only preserve the proximity of data points, but also the "topological properties" — e.g. 1-cohomologies (cycles, or loops) of the data graph. Some applications of this method to neuroscientific data — hippocampal place cells' activity of rodents navigating in spaces of "non-trivial topology" — will be demonstrated.

Список литературы

- [1] Lim L. H. Hodge Laplacians on graphs // *Siam Review*. — 2020. — Т. 62. — №. 3. — С. 685-715.
- [2] Belkin M., Niyogi P. Laplacian eigenmaps for dimensionality reduction and data representation // *Neural computation*. — 2003. — Т. 15. — №. 6. — С. 1373-1396.

The problem on parametric resonance for Hamiltonian systems

Belova A.S.

Ufa University of Science and Technology

We consider a scalar small parameter ε linear periodic Hamiltonian system of the form:

$$\frac{dx}{dt} = JA(t, \varepsilon)x, \quad x \in \mathbb{R}^{2N}. \quad (1)$$

Here $A(t, \varepsilon)$ is a real symmetric matrix whose elements are continuous and T is periodic in t functions, and the matrix J is defined by equality: $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$; here I – is an identity ($N \times N$) matrix.

The problem of parametric resonance is usually called the problem of studying the stability properties of a perturbed system (1) under the condition that the unperturbed system

$$\frac{dx}{dt} = JA(t, 0)x, \quad x \in \mathbb{R}^{2N}, \quad (2)$$

has at least one multiple multiplier μ_0 such that $|\mu_0| = 1$, while the remaining multipliers are located on the unit circle.

Multiple multipliers are divided into definite and indefinite ones (see, for example, [1]). If the multiplier μ_0 is definite, then for any small linear periodic Hamiltonian perturbation of the system (2) the multiplier μ_0 can split into a pair of multipliers μ_1 and μ_2 only in such a way that that μ_1 and μ_2 remain on the unit circle. If the multiple multiplier μ_0 is indefinite, then there are small perturbations under which these multipliers leave the unit circle.

The report discusses some questions about the construction of first approximation formulas for perturbations of multiple definite and indefinite multipliers of the system (2). Applications to the problem of parametric resonance for the system (1) are considered. This research is based on perturbation theory methods and development of some results obtained in [2].

The research was funded with the support of a state assignment (scientific code FZWU-2023-0002).

Список литературы

- [1] Yakubovich V. A. and Starzhinskiy V. M. Lineynye differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniya (Nauka, Moscow, 1972) [in Russian].
- [2] M. G. Yumagulov, L. S. Ibragimova and A. S. Belova, First Approximation Formulas in the Problem of Perturbation of Definite and Indefinite Multipliers of Linear Hamiltonian Systems , Lobachevskii J Math **42**, 3773-3783 (2021).

Топология слоения Лиувилля бильярда, ограниченного эллипсоидом, в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{2,1}$

Белозеров Г.В.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{2,1}(x, y, z)$ эллипсоид \mathcal{E} , заданный уравнением $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$, где $a > b$. Зададим в замкнутой области D , ограниченной эллипсоидом \mathcal{E} , следующую динамическую систему. Материальная точка единичной массы движется внутри D вдоль прямых с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от \mathcal{E} абсолютно упруго в смысле метрики Минковского, то есть если v — вектор скорости, с которым материальная точка соударяется с \mathcal{E} , и $v = \alpha + n$ — разложение этого вектора на касательную и ортогональную составляющие (в метрике Минковского) в точке соударения, то после отражения частица приобретет вектор скорости $v' = \alpha - n$. Такую динамическую систему мы будем называть трехмерным бильярдом внутри эллипсоида в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{2,1}$. Заметим, что функция $H = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2$ является его первым интегралом.

Рассматриваемый бильярд является интегрируемой гамильтоновой системой в кусочно-гладком смысле. Помимо энергии H эта система сохраняет параметры двух софокусных с \mathcal{E} квадрик, которых одновременно касаются все прямолинейные участки траектории материальной точки. Параметры этих квадрик Λ_1 и Λ_2 , взятые вместе с энергией H , образуют набор функционально независимых первых интегралов, коммутирующих относительно скобки Пуассона, отвечающей симплектической форме $\omega = dx_1 \wedge dp_1 + dx_2 \wedge dp_2 - dx_3 \wedge dp_3$ на кокасательном расслоении к $\mathbb{R}^{2,1}$.

Отметим, что бильярды на плоскости Минковского, ограниченные дугами софокусных квадрик рассматривались В. Драговичем и М. Раднович в работе [1], а также Е. Е. Каргиновой в работах [4], [5]. В. В. Ведюшкина и А. И. Скворцов в [4] вычислили инварианты Фоменко-Цишанга бильярда с потенциалом Гука внутри эллипса на плоскости Минковского для небифуркационных значений энергии.

Бифуркационным значением энергии нашего бильярда является уровень $H = 0$. Именно на нем слоение системы некомпактно. Более того, если $h_1, h_2 > 0$, то слоения Лиувилля бильярда на уровнях $H = h_1$, $H = h_2$ совпадают. Аналогичное верно и для отрицательных значений энергии. Для положительных и отрицательных значений энергии автором были построены бифуркационные диаграммы, описаны регулярные слои и их 1-перестройки. В частности, была доказана следующая теорема.

Теорема. *Регулярный слой трехмерного бильярда внутри эллипсоида в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{2,1}$ гомеоморфен трехмерному тору.*

Тем самым, для рассматриваемого бильярда справедлив аналог теоремы Лиувилля.

Работа выполнена в МГУ им. М. В. Ломоносова при поддержке гранта РФФИ №22-71-00111.

Список литературы

- [1] В. Драгович, М. Раднович, “Топологические инварианты эллиптических бильярдов и геодезических потоков эллипсоидов в пространстве Минковского”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **20**:2 (2015), 51–64

- [2] Е. Е. Каргинова, “Слоение Лиувилля топологических бильярдных на плоскости Минковского”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **22**:6 (2019), 123–150
- [3] Е. Е. Каргинова, “Бильярды, ограниченные дугами софокусных квадратов на плоскости Минковского”, *Матем. сб.*, **211**:1 (2020), 3–31
- [4] В. В. Ведюшкина, А. И. Скворцов, “Топология интегрируемого бильярда в эллипсе на плоскости Минковского с гуковским потенциалом”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2022, №1, 8–19

Mathematical modeling of the temporal shift of current-voltage signals in multisensor system 4H2SO4

Bitkulov M.D.

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

The paper describes the dynamics of the electrode/solution system

$$\tilde{y}_{k+1} = A \cdot \tilde{y}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

where A is a square matrix of order 11×11 .

In this regard, it is proposed to move from the AG matrix to another matrix, which has a significantly lower order and, in a natural sense, approximates the AG matrix. Namely, we take into account that the input signals of the system can be considered as a periodic external signal with a period $T = 1210$ and, accordingly, the outputs of the system are also periodic. Therefore, the function can be approximated as follows

- 1) From the vector y_k , we construct a continuous function $y_k(t)$ so that $y_k(j) = y_k$, $j = 0, 1, 2, \dots, 1210$;
- 2) We define the Fourier coefficients of the function as follows y_k

$$y_{k_0} = \frac{1}{1210} \int_0^{1210} y_k(t) dt, \quad y_{k_c} = \frac{1}{1210} \int_0^{1210} y_k(t) \cdot \cos kt dt,$$

$$y_{k_s} = \frac{1}{1210} \int_0^{1210} y_k(t) \cdot \sin kt dt.$$

We put the following

$$\tilde{y}_k(t) = y_{k_0} + \sum_{j=1}^5 (y_{k_c} \cos kt + y_{k_s} \sin kt).$$

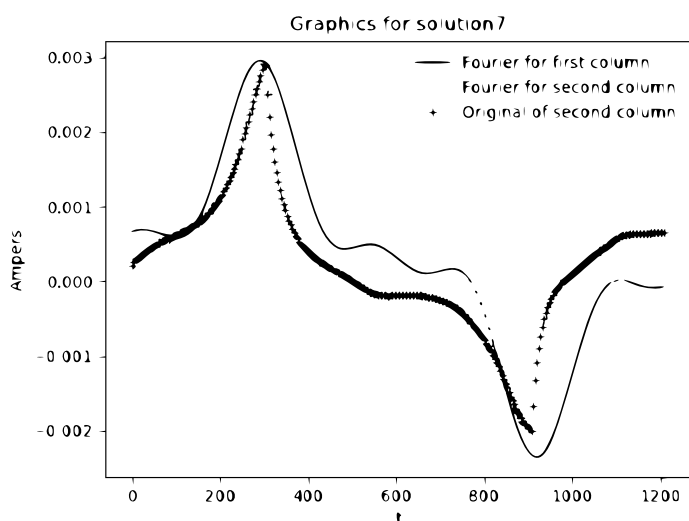


Рис. 1. The thick line depicts the graph of the function y_k obtained pointwise from the matrix AG , the thin line is the graph of the function $y_k(t)$, the dotted line is the graph of the function $\tilde{y}_k(t)$

Список литературы

- [1] R.R. Nigmatullin, A.S. Vorobev, H.C. Budnikov, A.V. Sidelnikov, A.D. Badikova, E.I. Maksyutova, “The usage of unremovable artefacts for the quantitative reading of nanoisoses in voltammetry,” *New Journal of chemistry* **43** (16), 6168–6178 (2019).
- [2] B.Yu. Lemeshko *Optimization Methods: Lecture Notes* (Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University, 2009).
- [3] D.L. Massart, B.G. Vandeginste, L.M.C. Buydens, S. De Jong, P.J. Lewi, J. Smeyersverbeke, *Handbook of Chemometrics and Qualimetrics. Part A* (Elsevier, Amsterdam, 1997).
- [4] A.D. Nizamova, R.D. Murtazina, V.N. Kireev, S.F. Urmancheev, *Introduction to tensor analysis and kinematics of continuous media* (Moscow: Ruscience, 2022).
- [5] A.D. Nizamova, R.D. Murtazina, V.N. Kireev, S.F. Urmancheev “Features of Laminar-Turbulent Transition for the Coolant Flow in a Plane Heat-Exchanger Channel,” *Lobachevskii Journal of Mathematics* **42** (9), 2211–2215 (2021).

Двумерные лоренцевы орбифолды с ановским действием группы изометрий

Bogolepova E.V.^{1,3}, Zhukova N.I.^{2,3}

1. Department of Fundamental Mathematics, HSE University, 25/12 Bolshaya Pecherskaya, Nizhny Novgorod, 603155, Russia
2. International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, HSE University, 25/12 Bolshaya Pecherskaya, Nizhny Novgorod, 603155, Russia
3. Affiliation 3

Орбифолды размерности n являются связными хаусдорфовыми топологическими пространствами, локально представляющими собой фактор-пространства \mathbb{R}^n/Γ арифметического пространства \mathbb{R}^n по конечной группе диффеоморфизмов Γ ; причем группа Γ не фиксирована и может меняться от точки к точке. Орбифолды естественным образом образуют категорию $\mathcal{O}rb[1]$.

Орбифолды находят применение в различных областях математики и физики. В физике орбифолды используются в качестве пространств распространения струн. Теория квантования деформации разработана на симплектических орбипространствах, включающих симплектические орбифолды. Орбифолды возникают в теории слоений как хаусдорфовы пространства компактных слоений. Тёрстон применил классификацию двумерных компактных орбифолдов при классификации замкнутых трехмерных многообразий. [4].

В этой работе понятие аносовского диффеоморфизма многообразия обобщается на гладкие орбифолды. Пусть \mathcal{N} — n -мерный гладкий орбифолд. Диффеоморфизм орбифолда $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ называется *аносовским*, если его сужение $f|_{\Delta_n}$ на n -мерную страту Δ_n является аносовским диффеоморфизмом многообразия Δ_n относительно сужения на Δ^n некоторой полной римановой метрики на \mathcal{N} .

Целью данной квалификационной работы является исследование структуры двумерных лоренцевых орбифолдов (\mathcal{N}, g) с аносовским действием их групп изометрий $\mathcal{I}so(\mathcal{N}, g)$. Как следствие, показать, что действия групп аносовских изометрий на некомпактных орбифолдах радикально отличается от их действия на компактных орбифолдах. Подчеркнем, что мы исследуем орбифолды, отличные от многообразий.

Для двумерных компактных лоренцевых орбифолдов доказан критерий аносовского действия их групп изометрий.

Теорема 1. Пусть (\mathcal{N}, g) — двумерный компактный лоренцев орбифолд, $\mathcal{I}so(\mathcal{N}, g)$ — группа всех его изометрий. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) действие группы изометрий $\mathcal{I}so(\mathcal{N}, g)$ на \mathcal{N} аносовское;
- (2) группа изометрий $\mathcal{I}so(\mathcal{N}, g)$ некомпактна;
- (3) группа изометрий $\mathcal{I}so(\mathcal{N}, g)$ действует несобственно на \mathcal{N} ;
- (4) существует хаотическая изометрия $h \in \mathcal{I}so(\mathcal{N}, g)$.

Исследована динамика групп изометрий некомпактных полных плоских лоренцевых двумерных орбифолдов и доказана Теорема, в которой показано существенное различие в поведении изометрий компактных и некомпактных лоренцевых орбифолдов.

Теорема 2. Пусть (\mathcal{N}, g) — некомпактный полный плоский лоренцев 2-орбифолд. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) действие группы изометрий $Iso(\mathcal{N}, g)$ на \mathcal{N} аносовское;
- (2) группа изометрий $Iso(\mathcal{N}, g)$ действует несобственно на \mathcal{N} .

Более того, любая изометрия Аносова (\mathcal{N}, g) не является хаотической.

Основным результатом данной работы является классификация с точностью до изоморфизма в категории $\mathcal{O}rb$ лоренцевых 2-орбифолдов с аносовским действием их групп изометрий. Из этой классификации следует, что существует только два собственных 2-орбифолда, допускающих полные плоские лоренцевы метрики с аносовскими действиями их групп изометрий:

(1) "подушка" $\mathcal{P} = \mathbb{T}^2/\{\pm E\}$;

(2) конус $\mathcal{N} = \mathbb{R}^2/\{\pm E\}$.

Список литературы

- [1] A. Adem, J. Leida and Y. Ruan. Orbifolds and stringy topology // Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, New York, 2007.
- [2] D. V. Anosov. Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature // Proc. Steklov Inst. of Math. **90** (1967).
- [3] I. Satake. On a generalization of the notion of manifold // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **42**, 359–363 (1956).
- [4] W. P. Thurston. Three-Dimensional Geometry and Topology // Princeton Univ. Press. **7**, (1997).
- [5] Wom Rianos (8457). Se problem hen creating nykea wild perzys, storing ziry isse nykea rova oktion se gaomagon ziry isse agriculture (8457).

On a matching arrangement and its properties

Bolotnikov A.I.

graduate student, Faculty of Mathematics and Mechanics, Lomonosov MSU

Every hyperplane arrangement can be associated with a partially ordered set of its intersections. A characteristic polynomial of an arrangement can be defined with the use of this partially ordered set. The number of regions of a hyperplane arrangement can be calculated with its characteristic polynomial [1].

In the paper [2] a linear program for a maximum matching problem for a general graph was created. A matching polyhedron was defined by the set of its inequalities, and the correspondence between its vertices and matchings of the initial graph was shown. The concept of LP-orientations is connected to linear programming as well [3].

The report will be devoted to the properties of a special hyperplane arrangement - a matching arrangement of a graph. In this report a bijection between regions of the matching arrangement and LP-orientations of the matching polyhedron will be constructed. This report will also contain the results on the characteristic polynomial of the matching arrangement for several families of graphs.

Список литературы

- [1] T. Zaslavsky (1975). Facing up to Arrangements: Face-Count Formulas for Partitions of Space by Hyperplanes, Memoirs of the American Mathematical Society, Vol 1, 102 pp (1975).

- [2] J. Edmonds (1965). "Maximum matching and a polyhedron with 0,1-vertices." Journal of Research of the National Bureau of Standards Section B Mathematics and Mathematical Physics, 125 (1965).
- [3] F. Holt, V. Klee (1998). A proof of the strict monotone 4-step conjecture. Discrete & Computational Geometry (1998).

Построение прямоугольной диаграммы поверхности Зейферта

Чернавских Михаил^{1,2}

1. Московский Государственный Университет им. Ломоносова

2. МИАН им. Стеклова

Прямоугольные диаграммы зацеплений используются в изучении узлов. Например, решается задача монотонного упрощения [1]. Также на языке прямоугольных диаграмм комбинаторно определяются гомологии Хегора-Флоера [4, 5].

В работе Дынникова–Прасолова [2, 3] было впервые введено понятие прямоугольной диаграммы поверхности, где с помощью данной техники были изучены Лежандровы узлы.

Известно [2], что любой класс изотопии компактной поверхности (с краем и без) в трехмерной сфере можно представить с помощью прямоугольной диаграммы. Эффективный алгоритм для построения прямоугольной диаграммы поверхности Зейферта был построен в работе [6]. Я расскажу про данный алгоритм и попытки его улучшения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект №22-11-00299), а также при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (договор №22-8-2-19-1)

Список литературы

- [1] I. Dynnikov. Arc-presentations of links: Monotonic simplification, Fund.Math. 190 (2006), 29–76; arXiv:math/0208153
- [2] I. Dynnikov, M. Prasolov. Rectangular diagrams of surfaces: representability, Matem. Sb. 208 (2017), no. 6, 55–108; translation in Sb. Math. 208 (2017), no. 6, 781–841, arXiv:1606.03497.
- [3] I. Dynnikov. Transverse-Legendrian links, Siberian Electronic Mathematical Reports, 16 (2019), 1960–1980.
- [4] C. Manolescu, P. Ozsváth, S. Sarkar. A combinatorial description of knot Floer homology. Ann. of Math. (2) 169 (2009), no. 2, 633–660.
- [5] P. S. Ozsvath and Z. Szabo. Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds. Ann. of Math. (2), 159(3):1027–1158, 2004.

- [6] M. M. Chernavskikh An Algorithm for Constructing the Rectangular Diagrams of a Seifert Surface. *Sib Math J* 63, 583–594 (2022). <https://doi.org/10.1134/S003744662203017X>

c_1 -сферические бордизмы

Черных Георгий

МГУ, МИАН, НИУ ВШЭ

Теория c_1 -сферических бордизмов W^* занимает промежуточное место между теориями комплексных и SU -бордизмов, и играет важную роль в вычислении кольца коэффициентов SU -бордизмов. На теории W^* нет естественного выбора мультипликативной структуры, так как декартово произведение двух c_1 -сферических многообразий не обязано быть c_1 -сферическим. Однако оказывается, что теория W^* выделяется прямым слагаемым в теории комплексных кобордизмов MU^* , и с помощью любого выделяющего проектора можно определить умножение на W^* . В своём докладе я расскажу о SU -линейных проекторах и умножениях на W^* , а также о комплексных ориентациях этой теории, соответствующих формальных группах и их точности по Ландвеберу.

On some Lie groups in non-degenerate and degenerate Clifford algebras

Filimoshina E.R.¹, Shirokov D.S.^{1,2}

1. *HSE University, Moscow, Russia; erfilimoshina@edu.hse.ru, dshirokov@hse.ru*
2. *Institute for Information Transmission Problems of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

The talk is based on the papers [1, 2, 3, 4].

We consider non-degenerate and degenerate Clifford algebras [5, 6, 7] (or geometric algebras) of arbitrary dimension and signature over the field of real or complex numbers. In particular, the case of Grassmann algebras (exterior algebras) is considered. Clifford algebras have various applications in physics, engineering, computer science, and other sciences.

In this work, we introduce and study several families of Lie groups of specific type in Clifford algebras. These Lie groups preserve some fundamental subspaces of Clifford algebras under the adjoint and twisted adjoint representations. We consider the cases of the subspaces of fixed parity and grades, the subspaces determined by the operations of grade involution and reversion, and the direct sums of these subspaces. The work presents an explicit form of these groups and gives their equivalent definitions. We consider the relations between the discussed groups in the case of arbitrary dimension and write down

all the different groups in the low-dimensional non-degenerate Clifford algebras. We study the Lie algebras of these Lie groups.

The discussed Lie groups are interesting for consideration, since they are analogues of the well-known Clifford and Lipschitz groups, which preserve the grade-1 subspace under the adjoint and twisted adjoint representations respectively. The twisted adjoint representation has been introduced in the classical paper [8] by M. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro. It is an important mathematical notion, which is used to describe two-sheeted coverings of orthogonal groups by spin groups in the case of arbitrary dimension and signature. The spin groups are normalized subgroups of the Lipschitz and Clifford groups, which are subgroups of the considered Lie groups and coincide with some of them in the case of small dimensions. Our work presents generalized spin groups, which are defined as normalized subgroups of the considered Lie groups. In low-dimensional degenerate Clifford algebras, some of the discussed Lie groups are closely related to the well-known Heisenberg group and can be realized as subgroups of the groups of invertible upper-triangular matrices. The introduced families of Lie groups can be useful for applications in physics, spinor image processing, spinor neural networks, engineering, quantum mechanics and computing, etc.

The publication was prepared within the framework of the Academic Fund Program at HSE University in 2022 (grant 22-00-001).

Список литературы

- [1] D. Shirokov. On inner automorphisms preserving fixed subspaces of Clifford algebras. *Advances in Applied Clifford Algebras* **31** (2021).
- [2] E. Filimoshina, D. Shirokov. On generalization of Lipschitz groups and spin groups. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* (2022), 1–26.
- [3] E. Filimoshina, D. Shirokov. On some Lie groups in degenerate geometric algebras. *ICACGA 2022* (Colorado Springs, CO, USA, 2022). *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, to appear (2023).
- [4] E. Filimoshina, D. Shirokov. On some Lie groups in degenerate Clifford geometric algebras. *Advances in Applied Clifford Algebras*, submitted (2023), arXiv:2301.06842.
- [5] C. Chevalley. *The Algebraic Theory of Spinors*. Columbia University Press, New York (1954).
- [6] I. Porteous. *Clifford Algebras and the Classical Groups*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (1995).
- [7] P. Lounesto. *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (1997).
- [8] M. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro. Clifford Modules. *Topology* **3** (1964), 3–38.

Об индексах Морса состояний равновесия и гетероклинических пересечениях полярных потоков на сфере

Фомин Д. О.

НИУ ВШЭ Нижний Новгород

Напомним, что гладкий поток $f^t: M^n \rightarrow M^n$, заданный на замкнутом гладком M^n многообразии размерности n , называется *полярным потоком*, если:

- 1) его неблуждающее множество Ω_{f^t} состоит из конечного числа состояний равновесия, все они гиперболические, при этом множество стоковых (источниковых) состояний равновесия состоит из единственной точки;
- 2) инвариантные многообразия седловых состояний равновесия пересекаются трансверсально.

Индексом Морса гиперболического состояния равновесия p называется число i_p , равное размерности его неустойчивого многообразия W_p^u . Пусть f^t — полярный поток на сфере S^n размерности $n \geq 3$. В силу формулы Пуанкаре-Хопфа (см., например [2, § 6])

$$\sum_{p \in \Omega_{f^t}} (-1)^{i_p} = \chi(S^n) = \begin{cases} 2, & n = 2k; \\ 0, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

Отсюда непосредственно следует, что число седловых состояний равновесия потока f^t чётно и число седел с чётным индексом Морса равно числу седел с нечётным индексом Морса.

Легко построить примеры полярных потоков на сфере S^n , имеющих ровно два седловых состояния равновесия p, q индексов $i, i+1$, $i \in \{1, \dots, n-2\}$ (см., например, [1]). Если $n \in \{2, 3, 4\}$, то модуль разности индексов точек p, q равен единице.

В докладе доказываются следующие результаты.

Теорема 1. Пусть f^t — полярный поток на сфере S^n размерности $n \geq 5$, множество седловых состояний равновесия которого состоит из двух точек p, q . Тогда $1 \leq |i_p - i_q| < n - 3$.

Теорема 2. Пусть f^t — полярный поток на сфере S^n , $n \geq 3$. Для любого седлового состояния равновесия σ потока f^t хотя бы одно из его инвариантных многообразий пересекается с инвариантным многообразием седлового состояния равновесия, отличного от σ .

Благодарности. Работа выполнена в рамках проекта №23-00-028 «Динамические системы с многомерным фазовым пространством: от регулярной динамики к хаосу» конкурса научно-учебных групп НИУ ВШЭ 2023 г.

Список литературы

- [1] Е. В. Жужома, В. С. Медведев. Полярные системы Морса-Смейла с двумя седлами на n -мерной сфере, ТВИМ, 2021, 4, 40–51.

- [2] Дж. Милнор, А. Уоллес. Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972. - 279 с.

Круговая схема Флейтас для градиентно-подобных потоков поверхности

Галкин В.Д., Рахимуллина Д.А.

*Международная лаборатория динамических систем и приложений НИУ ВШЭ
Нижегород*

Рассмотрим градиентно-подобные потоки на связных замкнутых поверхностях M^2 , то есть потоки с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством, инвариантные многообразия седловых точек которого не пересекаются. Потоки рассматриваемого класса имеют наиболее простую динамику, что вдохновляло многих математиков на поиски инвариантов их топологической эквивалентности. В предположениях различной общности на рассматриваемый класс, были получены следующие инварианты: граф Пейшото [7], оснащенный граф Пейшото (В.З. Гринес, О.В. Починка [4]), двуцветный граф (К. Вонг [9]), трехцветный граф (А. Ошемков, В.Шарко [2]), круговая схема (Г. Флейтас [5]).

В частности, круговая схема Г. Флейтас была построена, как полный инвариант эквивалентности для полярного потока на поверхности. Схема состоит из окружности вокруг источниковой точки с отмеченными на ней пересечениями с седловыми сепаратрисами. Точки пересечения маркированы метками соответственно номеру седла, из которого они выходят, и спинами таким образом, что объединение диска, ограниченно-го окружностью, и трубчатой окрестности устойчивого многообразия седловой точки может быть кольцом (спин +) или пленкой Мёбиуса (спин -). В рамках доклада приведем обобщение понятия круговой схемы с полярных потоков на градиентно-подобные. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема Градиентно-подобные потоки f^t, f'^t на поверхностях топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда множества их круговых схем $S_{f^t}, S_{f'^t}$ эквивалентны.

Также исчерпывающим образом решен вопрос реализуемости абстрактной круговой схемы градиентно-подобным потоком на поверхности. Кроме того, построен эффективный алгоритм различения изоморфности круговых схем.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение №075-15-2022-1101

Список литературы

- [1] M. Peixoto, *On the classification of flows on 2-manifolds*, Dynamical systems (Univ. Bahia, Salvador), Academic Press, New York, p. 389-419, 1973.
- [2] V. Grines, T. Medvedev, and O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, vol. 46. 01 2016.

- [3] X. Wang, *The c-algebras of morse-smale flows on two-manifolds*, Ergodic Theory Dynam. Systems, vol. 10, pp. 565–597, 1990.
- [4] Ошемков А. А. and Шарко В. В. *О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях*, Математический сборник, vol. 189, no. 88, pp. 93–140, 1998.
- [5] G. Fleitas, *Classification of gradient-like flows on dimensions two and three*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matematica - Bulletin/Brazilian Mathematical Society, vol. 6, pp. 155–183, 1975.

Действия дискретного тора сложности один в случае малых накрытий

Горчаков Владимир

НИУ ВШЭ, МЛ АТнП

Пусть дискретный тор \mathbb{Z}_2^k эффективно действует на гладком компактном n -мерном многообразии X^n . Тогда число $n-k$ называется сложностью действия. В своем докладе я расскажу о действиях сложности 1 в случае когда X^n является малым накрытием, вещественным аналогом квазиторического многообразия. Основным результатом будет следующая теорема:

Пусть X^n ориентируемое малое накрытие, тогда в \mathbb{Z}_2^n существует подгруппа $G \cong \mathbb{Z}_2^{n-1}$ индекса 2, такая что пространство орбит X/G гомеоморфно сфере S^n .

В ходе доклада я сформулирую все необходимые определения и примеры, а также расскажу набросок доказательства.

Список литературы

- [1] A. Ayzenberg, *Torus actions of complexity one and their local properties*, Proc. of the Steklov Institute of Mathematics 302:1 (2018), 16–32.
- [2] M. Davis, T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. 62:2 (1991), 417–451.

Топология слоения Лиувилля биллиарда на одной области гиперboloида в поле силы Гаука

Хотин Н. А.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Рассмотрим невырожденную квадрику E из семейства софокусных в пространстве \mathbb{R}^3 . Пусть D – компактная область на E , ограниченная конечным числом квадрик, софокусных с E , чьи двугранные углы излома равны $\pi/2$. Такие области были классифицированы относительно комбинаторной эквивалентности Г. В. Белозеровым в работе [1].

Рассмотрим следующую динамическую систему: материальная точка единичной массы движется внутри D в поле упругой силы, отражаясь от границы D абсолютно упруго. Такая система является интегрируемой гамильтоновой системой в кусочно-гладком смысле (подробную информацию об ИГС см. в [2]). Дополнительный первый интеграл F , функционально независимый с энергией системы H , можно найти с помощью метода В. В. Козлова.

Теорема 1. *В эллиптических координатах первые интегралы рассматриваемой системы имеют следующий общий вид вне зависимости от выбора квадрики E :*

$$H = \frac{2\Delta_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} p_1^2 + \frac{2\Delta_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} p_2^2 + \frac{2\Delta_3}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} p_3^2 + \frac{k}{2}(a + b + c - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)),$$

$$F = \frac{2\Delta_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} p_1^2 + \frac{2\Delta_2 \lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} p_2^2 + \frac{2\Delta_3 \lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} p_3^2 - \frac{k}{2} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3,$$

где p_i – импульс, соответствующий координате λ_i , k – коэффициент силы упругости, а $\Delta_i = (a - \lambda_i)(b - \lambda_i)(c - \lambda_i)$.

Замечание 1. *При фиксировании квадрики E одна из эллиптических координат становится постоянной, а импульс, соответствующий этой координате, обращается в нуль.*

Рассмотрим частный случай: в качестве E возьмем однополостный гиперболоид, а в качестве D – область на E , ограниченную софокусным эллипсоидом. При разделении переменных уравнения движения принимают следующий вид:

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_i - \lambda_j} \sqrt{\frac{(a - \lambda_i)(b - \lambda_i)(c - \lambda_i)}{\lambda_i - \tilde{\lambda}} \left(\frac{k}{2} \lambda_i^2 + \left(h - \frac{k}{2}(a + b + c - \tilde{\lambda}) \right) \lambda_i - f \right)}.$$

Подкоренное выражение имеет 5 вещественных нулей (a, b, c, ξ_1, ξ_2) и полюс первого порядка. Отметим, что ξ_1 и ξ_2 зависят только от H и F и после проверки убеждаемся, что они также являются первыми интегралами рассматриваемой системы. В терминах новой пары первых интегралов были найдены области возможного движения материальной точки, построены бифуркационные диаграммы для случаев притягивающего и отталкивающего потенциалов:

Теорема 2. *В состав бифуркационной диаграммы в случае $k > 0$ войдут прямые: $\xi_1 = \xi_2$, $\xi_2 = 0$, $\xi_2 = c$, $\xi_2 = b$, $\xi_2 = a$, $\xi_1 = c$ – которые в прообразе соответствуют атомам типов A, A, B, C_2, A, A , а в случае $k < 0$ войдут прямые: $\xi_1 = \xi_2$, $\xi_2 = b$, $\xi_2 = a$, $\xi_1 = 0$, $\xi_1 = c$, $\xi_1 = b$, $\xi_1 = a$ – которые в прообразе соответствуют атомам типов A, A, B, A, C_2, B, A .*

В результате была доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Слоения Лиувилля описанного бильярда на неособых изоэнергетических поверхностях Q^3 принадлежат к одному из трех классов лиувиллевой эквивалентности в случае $k > 0$ и к одному из шести классов в случае $k < 0$, это определяется их инвариантами Фоменко–Цишанга.*

Список литературы

- [1] Г. В. Белозеров, Топологическая классификация интегрируемых геодезических бильярдов на квадраках в трехмерном евклидовом пространстве // Матем. сб., **211**:11, 2020, 3–40.
- [2] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, — Ижевск: РХД, 1999.

Об одном классе коммутирующих дифференциальных операторов

Ивлев М.

Новосибирский Государственный Университет 1

Целью работы является описание решений уравнения $w^2 = z^3$, где w и z дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами. В ходе работы были найдены решения w и z такие, что w и z — операторы второго и третьего порядка соответственно. У этого уравнения есть тривиальное решение $w = L_3 = L_1^3, z = L_2 = L_1^2$, где $L_1 = p(x)\partial_x + g(x)$ — оператор первого порядка, $p(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$. В теореме, сформулированной ниже описаны все нетривиальные решения.

Теорема. Дифференциальные операторы L_2 и L_3 второго и третьего порядка соответственно удовлетворяют уравнению $L_2^3 = L_3^2$, если:

$$L_2 = L_1^2 - 2\delta(x), \quad L_3 = L_1^3 - 3p(x)\delta^2(x)\partial_x - 3g(x)\delta^2(x) + 3\delta^3(x),$$

где $L_1 = p(x)\partial_x + g(x), \delta(x) = a^{-1}(n-1)(x-x_0)^{n-1}, p(x) = a(x-x_0)^n, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}, x_0 \in \mathbb{C}, a \neq 0, n \neq 1, g(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Metapopulation Persistence and Extinction in a Fragmented Random Habitat: A Mathematical Study

Korotkov A.D.¹, Petrovskii S.V.^{1,2}

1. *RUDN University*
2. *University of Leicester*

Factors and processes that either enhance the persistence of natural population or, on the contrary, make them prone to extinction have been a major focus of attention over the last few decades [1]. Habitat fragmentation may be caused by the environmental change or direct anthropogenic activity such as forest logging, building new roads, etc. Habitat fragmentation often has negative effect on corresponding populations and may result in species extinction [2]; in fact, it is regarded as the most serious threat to biodiversity worldwide [4].

This topic is actively studied and there is a number of models of metapopulation dynamics (see for example [6] as an introduction). In this paper we will consider a stepping-stone model. We will address the issue of metapopulation persistence/extinction subject to a change in the strength of the inter-site coupling by considering the dynamics of a single-species system. We will look at linear and quadratic coupling and habitats with logistic growth and logistic growth with the Allee effect. We will look at numerical simulations and prove theorems stating some necessary and sufficient conditions for the metapopulation persistence, also we will show the existence and the uniqueness of the solution, smoothness of solutions. Since natural environment is rarely uniform, in our numerical simulations we will consider sites with random properties.

Generally the model can be written as a system of n equations:

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(u_i) + \sum_{j=1}^N q_{ij}d(u_j, u_i) = F_i(u_1, \dots, u_n), \quad i \in \overline{1, n},$$

where $f_i(u_i) = \alpha_i u_i (u_i - \beta_i) (1 - \frac{u_i}{k_i})$ for a patch with an Allee effect, $f_i(u_i) = \alpha_i u_i (1 - \frac{u_i}{k_i})$ for a patch without an Allee effect, $Q = (q_{ij})$, $d(u_j, u_i) = u_j - u_i$ for a linear coupling, $d(u_j, u_i) = u_j^2 - u_i^2$ for a quadratic coupling. Here we will consider systems with the same type of a function f_i . All parameters are not negative, the population of the i th patch u_i is a non-negative function. The parameter k_i is carrying capacity of the patch, β_i is an Allee threshold, and q_{ij} is the coupling between the i th patch and the j th patch, $q_{ij} = q_{ji}$.

In numerical simulations we aim to study metapopulation chains: the case when Q is a tridiagonal matrix; and tori: the same Q as in chains but with added coupling between the first and the last patch. If we have time, we will try to consider other cases. Analytically we try to state some conditions for the general case and for the special cases.

Список литературы

1. Ehrlich, P.; Ehrlich, A. Extinction; Ballantine Books: New York, NY, USA, 1981.
2. Brooks, T.M.; Mittermeier, R.A.; Mittermeier, C.G.; Fonseca, G.A.B.D.; Rylands, A.B.; Konstant, W.R.; Flick, P.; Pilgrim, J.; Oldfield, S.; Magin, G.; et al. Habitat loss and extinctions in the hotspots of biodiversity. *Conserv. Biol.* 2002, 16, 909–923.
3. Fahrig, L. Relative Effects of Habitat Loss and Fragmentation on Population Extinction. *J. Wildl. Manag.* 1997, 61, 603–610.
4. Ivan Sudakow a,b, Corinne Myers c, Sergei Petrovskii d,* , Colin D. Sumrall e, James Witts. Knowledge gaps and missing links in understanding mass extinctions: Can mathematical modeling help?
5. Kareiva, P. Population dynamics in spatially complex environments: Theory and data. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. B Biol. Sci.* 1990, 330, 175–190.

Коротковолновые асимптотики внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в торе и их связь с

классическими бильярдами

Курицина Е.А.^{1,3}, Миненков Д.С.^{1,2,3}

1. *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)*
2. *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН*
3. *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

Рассматривается задача о построении асимптотических собственных функций оператора Лапласа в трехмерной области, ограниченной двумерным тором, на котором задаётся условие Дирихле (похожая задача решалась в [1]). С помощью адиабатического приближения (в форме операторного разделения переменных [2]) при условии, что собственная функция является быстроосциллирующей, задача сводится к трем одномерным задачам: двум задачам Штурма-Лиувилля и задаче для уравнения Шредингера с удерживающим потенциалом (потенциальной ямой). При этом задачи Штурма-Лиувилля решаются точно, а асимптотики в потенциальной яме строятся методом ВКБ (в виде канонического оператора Маслова), в результате получаются асимптотические собственные функции (квазимоды) исходной задачи внутри тора. Подобные квазиклассические асимптотики связаны с классическими бильярдами — системой Гамильтона, где гамильтонианом выступает символ квантового оператора, с соответствующими условиями отражения на границах области. Асимптотики можно построить в случае, когда соответствующая динамическая система является почти-интегрируемой, причем процедура операторного разделения переменных в квантовой задаче связана с осреднением классического гамильтониана. В [3] такая связь проиллюстрирована для двумерной задачи в узком угле, а в данной работе разобран пример задач в трехмерной области.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №22-71-10106 в МГУ имени М.В. Ломоносова.

Список литературы

- [1] В.М. Бабич, В.С. Булдырев, "Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач". Наука, 1972.
- [2] V.V. Belov, S.Yu. Dobrokhotov, T.Ya. Tudorovskiy, "Operator separation of variables for adiabatic problems in quantum and wave mechanics *Journal of Engineering Mathematics* (2006) 55: 183–237.
- [3] S.Yu. Dobrokhotov, D.S. Minenkov, A.I. Neishtadt, S.B. Shlosman, "Classical and Quantum Dynamics of a Particle in a Narrow Angle Regul. *Chaotic Dyn.*, 24:6 (2019), 704–716.

Mathematical modeling of the temporal shift of current-voltage signals in multisensor system KF

Kuzmin I.L.¹

1. *Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia*

The paper describes the dynamics of the electrode/solution system KF

$$\tilde{y}_{k+1} = A \cdot \tilde{y}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

where A is a square matrix of order 11×11 .

In this regard, it is proposed to move from the AG matrix to another matrix, which has a significantly lower order and, in a natural sense, approximates the AG matrix. Namely, we take into account that the input signals of the system can be considered as a periodic external signal with a period $T = 1210$ and, accordingly, the outputs of the system are also periodic. Therefore, the function can be approximated as follows

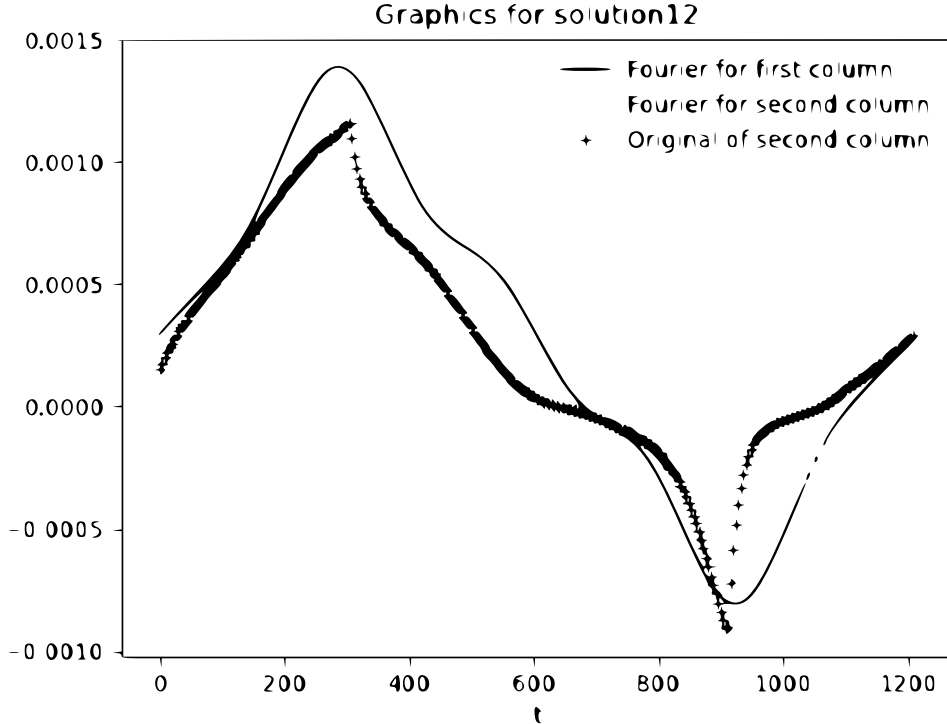
- 1) From the vector y_k , we construct a continuous function $y_k(t)$ so that $y_k(j) = y_k$, $j = 0, 1, 2, \dots, 1210$;
- 2) We define the Fourier coefficients of the function as follows y_k

$$y_{k_0} = \frac{1}{1210} \int_0^{1210} y_k(t) dt, \quad y_{k_c} = \frac{1}{1210} \int_0^{1210} y_k(t) \cdot \cos kt dt,$$

$$y_{k_s} = \frac{1}{1210} \int_0^{1210} y_k(t) \cdot \sin kt dt.$$

We put the following

$$\tilde{y}_k(t) = y_{k_0} + \sum_{j=1}^5 (y_{k_c} \cos kt + y_{k_s} \sin kt).$$



Список литературы

- [1] B.Yu. Lemesheko *Optimization Methods: Lecture Notes* (Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University, 2009).
- [2] A.D. Nizamova, R.D. Murtazina, V.N. Kireev, S.F. Urmancheev, *Introduction to tensor analysis and kinematics of continuous media* (Moscow: Ruscience, 2022).
- [3] A.D. Nizamova, R.D. Murtazina, V.N. Kireev, S.F. Urmancheev “Features of Laminar-Turbulent Transition for the Coolant Flow in a Plane Heat-Exchanger Channel,” *Lobachevskii Journal of Mathematics* **42** (9), 2211–2215 (2021).
- [4] N.A. Sidelnikova, A.V. Zerkina, I.Yu. Cherdantsev, *Higher Algebra. P. 1* (Ufa: RIC BGU, 2021).
- [5] N.A. Sidelnikova, A.V. Zerkina, I.Yu. Cherdantsev, *Higher Algebra. P. 2* (Ufa: RIC UUSaT, 2022).

Реализация бильярдными книжками вырожденных 3-атомов с одной окружностью-звездочкой произвольного типа

Кузнецова А.А.

Студ. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ

В работе [2] А.Т. Фоменко сформулировал гипотезу о моделировании любых невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы подходящими бильярдами. В.В. Ведюшкиной и И.С. Харчевой удалось доказать, что произвольные невырожденные особенности слоения Лиувилля, называемые также боттовскими 3-атомами, реализуются алгоритмически задаваемыми бильярдными книжками [1].

Оказывается, гипотеза Фоменко справедлива и для некоторых гамильтоновых систем, чей интеграл не является боттовским на уровне энергии Q^3 , т.е. имеет вырожденные особенности. Была сформулирована новая гипотеза о моделировании вырожденных 3-атомов.

Гипотеза \tilde{A} . *В классе слоений Лиувилля интегрируемых бильярдных реализуются не только боттовские бифуркации торов Лиувилля, но и достаточно богатые классы бифуркаций торов Лиувилля, описываемых “неботтовскими” 3-атомами, включая мультиседловые особенности ранга 1.*

Рассмотрим произвольный вырожденный 2-атом P с одной звездочкой и выберем пару простых чисел (p, q) . Сделаем надрез на звездочке и склеим p копий исходного атома вдоль границы разреза. Обозначим полученный атом \tilde{P} . Построим цилиндр $\tilde{P} \times [0, 2\pi]$ и склеим его основания с поворотом на угол $\frac{2q\pi}{p}$. Одна окружность, окружность-звездочка, останется неподвижной, остальные точки за один оборот поворачиваются на угол $\frac{2q\pi}{p}$. В результате получится 3-атом со звездочкой типа (p, q) , являющийся расслоением Зейферта над 2-атомом с особым слоем типа (p, q) .

Теорема. Гипотеза Фоменко \tilde{A} верна для вырожденных \mathcal{Z} -атомов с одной окружностью-звездочкой. Для любого вырожденного \mathcal{Z} -атома любой сложности с одной звездочкой произвольного типа (p, q) алгоритмически строится бильярдная книжка, склеенная из простейших бильярдов A'_0 .

Работа поддержана грантом РФФ (проект 22-71-10106).

Список литературы

- [1] Ведюшкина В.В., Харчева И. С. Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем, Матем. сб., 209:12 (2018), 17–56
- [2] Фоменко А.Т., Ведюшкина В. В. Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности, Вестн. Моск. ун/та. Сер.1, 2019, 3, 15–25

Solving boundary value problems with moving boundaries using the method of constructing solutions integro-differential equations

Litvinov V.L.¹, Litvinova K.V.²

1. Head of Dept., Dept. of General–Theoretical Disciplines, Samara State Technical University; doctoral student, Moscow State University, Ph.D. (Technical), Associate Professor

2. Moscow State University, Student

The problem of vibrations of objects with moving boundaries, formulated as a differential equation with boundary and initial conditions, is a nonclassical generalization of a hyperbolic problem. To facilitate the construction of the solution to this problem and to justify the choice of the form of the solution, equivalent integro-differential equations with symmetric and time-dependent kernels and time-varying integration limits are constructed. The phenomenon of steady-state resonance and passage through resonance is investigated using numerical methods. The solution was made in the Matlab environment of dimensionless variables, which allows one to use the obtained results to calculate oscillations of a wide range of technical objects. Among all the many problems of the dynamics of elastic systems from the point of view of technical applications, the problems of oscillations in systems with time-varying geometric dimensions are very relevant. Systems, the boundaries of which are moving, are widespread in technology (ropes of hoisting installations [1–3], flexible transmission links [3], solid fuel rods [4,5], drill strings [5], etc.). The studies of many authors on the dynamics of lifting ropes have led to the need to formulate new problems in mechanics concerning the dynamics of one-dimensional objects of variable lengths. The presence of moving boundaries causes significant difficulties in the description of such systems; therefore, approximate solution methods are mainly used here [1–5].

Список литературы

- [1] Vesnitsky A.I. Waves in systems with moving boundaries and loads. Moscow: Fizmatlit, 2001. 320 p.
- [2] Goroshko O.A., Savin G.N. Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length. Kiev: Nauk. dumka, 1971, 290 p.
- [3] Litvinov V.L., Anisimov V.N. Transverse vibrations of a rope moving in a longitudinal direction // Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2017. T. 19.No. 4. – P.161–165.
- [4] Litvinov V.L., Anisimov V.N. Mathematical modeling and research of oscillations of one-dimensional mechanical systems with moving boundaries: monograph / V. L. Litvinov, V. N. Anisimov – Samara: Samar. state tech. un – t, 2017. – 149 p.
- [5] Lezhneva A.A. Free bending vibrations of a beam of variable length // Uchenye zapiski. Perm: Perm. un – t, 1966. No. 156. P. 143–150.

О полярных потоках с локально плоскими замыканиями сепаратрис

Максимов Д. А.

НИУ ВШЭ

Напомним, что поток $f^t: M^n \rightarrow M^n$ на замкнутом n -мерном многообразии называется *полярным*, если выполняются следующие условия:

- Неблуждающее множество Ω_{f^t} потока состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия, при этом множество источников (стоковых) состояний равновесия состоит ровно из одной точки.
- Инвариантные многообразия состояний равновесия пересекаются трансверсально.

Для седловой точки σ обозначим W_σ^s, W_σ^u устойчивое и неустойчивое многообразия точки σ .

Замкнутое многообразие $X \subset M^n$ размерности m является локально плоским в M^n в точке x , если существует окрестность точки $x \in U_x \subset M^n$ и гомеоморфизм $h: U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ такой, что $h(X \cap U_x)$ является координатной гиперплоскостью $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$.

Theorem 1. Пусть f^t – полярный поток на сфере S^4 , неблуждающее множество которого состоит из источника α , стока ω и двух седел σ_1, σ_2 с индексами Морса, равными 1 и 2 соответственно. Тогда замыкание многообразия $W_{\sigma_2}^s$ является локально плоской двумерной сферой.

Этот результат контрастирует с теоремой 6 работы [1], где приведен пример полярного потока с двумя седловыми состояниями равновесия индекса 2, замыкания всех инвариантных многообразий которых являются дико вложенными двумерными сферами.

Благодарности. Работа выполнена в рамках проекта №23-00-028 «Динамические системы с многомерным фазовым пространством: от регулярной динамики к хаосу» конкурса научно-учебных групп НИУ ВШЭ в 2023 г.

Список литературы

- [1] E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “Morse-Smale systems with few non-wandering points”, *Topology and its Applications*, **160**:3 (2013), 498–507.

Принцип максимума Александрова–Бакельмана для эллиптических операторов на стратифицированном множестве типа “книжка”

Mironenko Foma

Saint-Petersburg State University

Доклад посвящён одному из наиболее красивых геометрических подходов к доказательству качественных свойств уравнений в частных производных — принципу максимума Александрова–Бакельмана [1], [2], [3]. История развития данного подхода отражена в обзорах [5], [4].

Отправной точкой для нашей задачи является локальная задача Вентцеля на области $\Omega = B_+^n = B^n \cap \{x_n > 0\}$ с “плоской границей” $B_0^n = B^n \cap \{x_n = 0\}$, где B^n — единичный шар в \mathbb{R}^n . В классической постановке рассматриваются два линейных дифференциальных оператора второго порядка в недивергентной форме:

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i D_j + \sum_{i=1}^n b_i D_i,$$

заданный на B_+^n и

$$\mathcal{B} = \sum_{l,m=1}^{n-1} \alpha_{lm} D_l D_m + \sum_{l=1}^{n-1} \beta_l D_l - \beta_n D_n,$$

заданный на плоской границе B_0^n . На коэффициенты операторов накладываются следующие ограничения: матрицы старших коэффициентов ограничены $a_{ij} \in L_\infty(B_+^n)$, $\alpha_{lm} \in L_\infty(B_0^n)$ и удовлетворяют строгому условию эллиптичности, младшие принадлежат пространствам Лебега $b_i \in L_n(B_+^n)$, $\beta_l \in L_{n-1}(B_0^n)$, а $\beta_n \geq 0$ — измеримая функция. Доказательство принципа максимума для данной постановки хорошо известно.

В нашей работе принцип максимума обобщается на случай стратифицированного шара. Мы рассматриваем K копий полушара B_+^n в пространстве \mathbb{R}^{n+1} , склеенных по общей плоской границе. На каждом из них задан оператор $\mathcal{L}^{[k]}$, аналогичный \mathcal{L} по

структуре, а в операторе \mathcal{B} добавляется K слагаемых вида $b_n^{[k]} D_n^{[k]}$, где $D_n^{[k]}$ обозначает одностороннюю производную на k -ом полушаре. Данные слагаемые связывают значения функции на разных полушарах, и из-за них задача требует построения дополнительных конструкций.

Основным вспомогательным инструментом в доказательстве является т.н. нормальное отображение. Поскольку при $K > 2$ стратифицированный шар не вкладывается в \mathbb{R}^n , нормальное отображение в данном случае требует существенной модификации.

Доклад основан на совместной работе с А.И. Назаровым [6].

Список литературы

- [1] А.Д. Александров. Некоторые оценки, касающиеся задачи Дирихле // Доклады АН СССР, 134 (1960), 1001–1004.
- [2] И.Я. Бакельман. К теории квазилинейных эллиптических уравнений. // Сиб. матем. журн., 2 (1961), 179–186.
- [3] А.Д. Александров. Условия единственности и оценки решения задачи Дирихле. // Вестник ЛГУ., 18 (1963), 13(3), 5–29.
- [4] А.И. Назаров. Принцип максимума А.Д. Александрова. // Современная математика и ее приложения, 29 (2005), 127–143.
- [5] Д.Е. Апушкинская., А.И. Назаров. Лемма о нормальной производной и вокруг неё. // Успехи математических наук, 77 (2021), 3–68.
- [6] А.И. Назаров, Ф.Д. Мироненко. Локальная оценка максимума типа Александрова–Бакельмана для решений эллиптических уравнений на стратифицированном множестве вида “книжка” // Записки научных семинаров ПОМИ, 519 (2022), 104–113.

Newton polytopes in the differential elimination problem

Mukhina Y.S.

Department of Higher Algebra, Lomonosov Moscow State University

Let R be a differential ring. Consider a ring of polynomials in infinitely many variables

$$R[x^{(\infty)}] := R[x, x', x'', x^{(3)}, \dots]$$

and extend the derivation from R to this ring by $(x^{(j)})' := x^{(j+1)}$. The resulting differential ring is called the ring of differential polynomials in x over R . The ring of differential polynomials in several variables is defined by iterating this construction.

Let $S := R[x_1^\infty, \dots, x_n^\infty]$ be a ring of differential polynomials over a differential ring R . An ideal $I \subset S$ is called a differential ideal if $a' \in I$ for every $a \in I$. Denote by $\langle f_1, \dots, f_s \rangle^{(\infty)}$ the differential ideal

$$\langle f_1^{(\infty)}, \dots, f_s^{(\infty)} \rangle$$

for every $f_1, \dots, f_s \in S$.

Consider a system of differential equations of the form

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

where $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ is a tuple of differential indeterminates and $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ is a tuple of polynomials from $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$. Systems of these form describe dynamical systems with polynomial dynamics and appear often in the literature. One natural elimination task is to eliminate all the variables except one, say x_1 , that is, describe a differential ideal

$$\langle x_1' - f_1(\mathbf{x}), \dots, x_n' - f_n(\mathbf{x}) \rangle^{(\infty)} \cap \mathbb{C}[x_1^{(\infty)}].$$

In this work we will consider the case of system

$$x_1' - g_1(x_1, x_2) = x_2' - g_2(x_1, x_2) = 0,$$

where g_1 and g_2 are generic polynomials of degrees 2 and d , respectively, and prove the characterization of Newton polytopes of the minimal polynomial of the corresponding elimination ideal for the degree pairs $(2, d)$.

Список литературы

- [1] R. Dong, C. Goodbrake, H. A Harrington, G. Pogudin, Differential elimination for dynamical models via projections with applications to structural identifiability, arXiv:2111.00991, 2021.
- [2] G. Conte, C.H. Moog, A.M. Perdon, Algebraic Methods for Nonlinear Control Systems, Springer London, 2007.

Schrödinger operator spectrum in the covering of an elliptic ring.

Nikulin M.A.^{1,2}

1. *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics*

2. *Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics*

It is well known that billiards in a domain bounded by quadrics which share common foci is integrable. Recent works by A. T. Fomenko and V. V. Vedyushkina (see [1]–[3], as well as other works by these authors) have again gained the attention of specialists to this topic.

In particular, in the work [3] the features of the billiard system in a ring bounded by confocal ellipses were studied.

In this report, the corresponding quantum system is considered. Namely, the asymptotics of the eigenvalues of the Schrödinger operator is derived when the distance between foci tends to zero.

Список литературы

- [1] V. V. Vedyushkina (Fokicheva), A. T. Fomenko Integrable geodesic flows on orientable two-dimensional surfaces and topological billiards // *Izv. Math.*, **83**:6 (2019), 1137–1173
- [2] V. V. Fokicheva A topological classification of billiards in locally planar domains bounded by arcs of confocal quadrics // *Sb. Math.*, **206**:10 (2015), 1463–1507
- [3] V. V. Fokicheva Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **69**:4 (2014), 148–158
- [4] McLachlan, N. W. *Theory and Application of Mathieu Functions* // Clarendon Press. 1947.
- [5] Abramowitz M., Stegun I. A. *Handbook of mathematical functions with formulas graphs and mathematical tables* (10th print. 1972 with corrections) // U.S. Dept. of Commerce National Bureau of Standards. 1972. **20**
- [6] J. Meixner, F. W. Schäfke, *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen* // Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1954.

Оценки отклонений приближенных решений от точных в эллиптической задаче с препятствием для p -Лапласиана

Новикова А.А.

Российский университет дружбы народов, Москва

Рассматривается задача со свободной границей для оператора p -Лапласа, которая может быть сведена к проблеме минимизации функционала энергии

$$J[u] := \inf_{v \in \mathbb{K}} J[v] = \inf_{v \in \mathbb{K}} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p} |\nabla v|^p - fv \right) dx \quad (1)$$

на выпуклом замкнутом множестве $\mathbb{K} = \left\{ v \in W_0^{1,p}(\Omega) : v \geq \phi \text{ п.в. в } \Omega \right\}$. Здесь функция $v \in \mathbb{K}$ является приближенным решением поставленной задачи, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - ограниченная область, препятствие $\phi \in C^{\max\{2,p\}}$ удовлетворяет условию $\phi \leq 0$ на $\partial\Omega$, а $f \in L^q(\Omega)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, - заданная измеримая функция.

В последнее десятилетие актуальным направлением исследования задач со свободными границами является разработка функциональных инструментов количественной оценки качества полученных приближенных решений. Такое направление исследований задач со свободными границами представлено в [1] и [2]. В данной работе также изучаются оценки ошибок отклонений приближенных решений от точных. Отметим, что любая функция $v \in \mathbb{K}$ может считаться приближенным решением нелинейной задачи (1).

В соответствии с общей теорией двойственности для выпуклых вариационных функционалов, методом двойственных мажорант (см., например, [3] и [4]) для поставленной задачи (1) было получено основное тождество ошибки. Оно позволяет

представить полную меру отклонения аппроксимаций от точных решений в прямом и сопряженном пространствах через полностью вычисляемое выражение. Однако полученное тождество содержит ограничения на приближенные решения в двойственной задаче. Поэтому в работе также представлено расширение допустимого множества для этих функций, то есть найдены явно вычисляемые мажоранты ошибок, в случаях $1 < p < 2$ и $p \geq 2$.

Список литературы

- [1] Apushkinskaya D. E., Repin S. I. Thin obstacle problem: Estimates of the distance to the exact solution // *Interfaces and Free Boundaries* 20. 2018, V. 4, 511–531.
- [2] Апушкинская Д. Е., Репин С. И. Бигармоническая задача с препятствием: Гарантированные и вычисляемые оценки ошибок для приближенных решений // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2020, Т. 60, № 11. С. 1881–1897.
- [3] Neittaanmäki P., Repin S. *Reliable Methods for Computer Simulation: Error Control and Posteriori Estimates* // *Studies in Mathematics and its Applications*, New York, USA, 2004.
- [4] Repin S. I., Sauter S. A. *Accuracy of Mathematical Models*. 2020

Зацепление как полный инвариант 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла

Ноздринов А.А.

*Международная лаборатория динамических систем и приложений НИУ ВШЭ
Нижний Новгород*

В данном докладе рассматриваются градиентно-подобные диффеоморфизмы Морса-Смейла, заданные на трехмерной сфере \mathbb{S}^3 . Для таких диффеоморфизмов полный инвариант топологической сопряженности получен в работах Х. Бонатти, В. Гринеса, В. Медведева, Е. Пеку. Он представляет собой класс эквивалентности набора гомотопически нетривиально вложенных торов и бутылок Клейна, вложенных в некоторое замкнутое 3-многообразие, фундаментальная группа которого допускает эпиморфизм в группу \mathbb{Z} . Такой инвариант называется схемой градиентно-подобного диффеоморфизма $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$. Выделен класс G диффеоморфизмов, для которых полным инвариантом является более простой с топологической точки зрения объект, а именно зацепление существенных узлов в многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Рассматриваемые диффеоморфизмы определяются тем, что их неблуждающее множество содержит единственный источник, а замыкания устойчивых многообразий седловых точек ограничивают трехмерные шары с попарно не пересекающимися внутренностями. В рамках доклада доказано, что в дополнении к замыканию этих шаров

диффеоморфизм класса G содержит в точности одну неблуждающую точку, которая является неподвижным стоком. Установлено, что полным инвариантом топологической сопряженности диффеоморфизмов класса G является пространство орбит неустойчивых седловых сепаратрис в бассейне этого стока. Показано, что пространство орбит представляет собой зацепление нестягиваемых узлов в многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ и эквивалентность зацеплений равносильна эквивалентности схем. Также приведена реализация диффеоморфизмов рассмотренного класса по произвольному зацеплению, состоящему из существенных узлов в многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение №075-15-2022-1101

Устойчивая изотопическая связность диффеоморфизмов Палиса

Ноздринова Е.В.

*Международная лаборатория динамических систем и приложений НИУ ВШЭ
Нижегород*

Проблема существования дуги с не более, чем счетным (конечным) числом бифуркаций, соединяющей структурно устойчивые системы (системы Морса-Смейла) на многообразиях вошла в список пятидесяти проблем Палиса-Пью [1] под номером 33.

В 1976 году Ш. Ньюхаусом, Дж. Палисом, Ф. Такенсом [2] было введено понятие устойчивой дуги, соединяющей две структурно устойчивые системы на многообразии. Такая дуга не меняет своих качественных свойств при малом шевелении. В том же году Ш. Ньюхаус и М. Пейшото [3] доказали существование простой дуги (содержащей лишь элементарные бифуркации) между любыми двумя потоками Морса-Смейла. Из результата работы Ж. Флейтас [4] вытекает, что простую дугу, построенную Ньюхаусом и Пейшото всегда можно заменить на устойчивую [5].

Для диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на многообразиях любой размерности известны примеры систем, которые не могут быть соединены устойчивой дугой. Препятствия появляются уже для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности S^1 , которые соединяются устойчивой дугой только в случае совпадения чисел вращения [6].

В размерности два появляются дополнительные препятствия к существованию устойчивых дуг между изотопными диффеоморфизмами. Они связаны с наличием периодических точек [7], [8] и гетероклинических пересечений [9].

В рамках доклада рассматривается класс $G(M^2)$ градиентно-подобных диффеоморфизмов f , заданных на замкнутой ориентируемой поверхности M^2 , в предположении, что все неблуждающие точки f неподвижны и имеют положительный тип ориентации.

Теорема Любые диффеоморфизмы $f, f' \in G(M^2)$ соединяются устойчивой дугой с конечным числом типично проходящих некритических седло-узловых бифуркаций.

Доказательство данного результата основано на построении дуги без бифуркаций соединяющей диффеоморфизм $f \in G(M^2)$ с диффеоморфизмом $\phi_f \in G(M^2)$, который

является сдвигом на единицу времени типичного градиентного потока ϕ_f^T некоторой функции Морса. В силу работ [3], [4], [5] любые два таких потока соединяются дугой с конечным числом седло-узловых бифуркаций.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение №075-15-2022-1101

Список литературы

- [1] Palis J., Pugh C. *Fifty problems in dynamical systems*, Lecture Notes in Math., 468, p. 345-353, 1975.
- [2] Newhouse S., Palis J., Takens F. *Stable arcs of diffeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc., 82:3, p. 499-502, 1976.
- [3] Newhouse S., Peixoto M. *There is a simple arc joining any two Morse-Smale flows*, Asterisque, 31, p 15-41, 1976.
- [4] Fleitas G. *Replacing tangencies by saddle-nodes*, Bol. Soc. Brasil. Mat., 8:1, p. 47-51, 1977.
- [5] Newhouse S., Palis J., Takens F. *Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms*, Publications mathematiques de l' I.H.E.S, 57, p. 5-71, 1983.
- [6] Nozdrinova E. *Rotation number as a complete topological invariant of a simple isotopic class of rough transformations of a circle*, Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 14:4, p. 543-551, 2018.
- [7] Blanchard P. *Invariants of the NPT isotopy classes of Morse-Smale diffeomorphisms of surfaces*, Duke Mathematical Journal, 47:1, p. 33-46 (1980).
- [8] Nozdrinova E., Pochinka O. *Solution of the 33rd Palis-Pugh problem for gradient-like diffeomorphisms of a two-dimensional sphere*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 41:3, p. 1101-1131, 2021.
- [9] Matsumoto S. *There are two isotopic Morse-Smale diffeomorphisms which cannot be joined by simple arcs*, Inventiones mathematical, 51, p. 1-7, 1979.

Mathematical modeling of plasma transport in a spiral magnetic field

Oksogoeva I.P.

Peoples' Friendship University of Russia

Open magnetic systems for plasma confinement have been considered as possible configurations for a fusion reactor since the early days of fusion research. The paper presents a mathematical model of the plasma transport in a spiral magnetic field for a

new installation SMOLA [1] for plasma confinement, created at the Budker Institute of Nuclear Physics of SB RAS. Numerical simulation of the transport equation in a helical magnetic field is carried out [2]. The stationary equation of plasma transport in the axially symmetric formulation contains the second derivatives, including mixed ones. The equation also contains the following variables λ is the ratio of the system length L to the mean free path λ , n is the normalized concentration, ϕ the plasma potential, $1/T$ the sum of ionic and electron temperatures. Magnetic plasma confinement for fusion power [3] involves the formation of a self-consistent configuration of plasma and magnetic field. Such a configuration should be able to prevent the loss of particles and energy and exist for some time, long enough on the scales of plasma processes. The distribution of the substance concentration obtained by numerical simulation has a qualitative correspondence with the data of field experiments. In the future, a more accurate comparison with experimental data is planned, the use of the method of successive over-relaxation, as well as the variation of parameters: the depth of corrugation, diffusion

This work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (megagrant agreement No. 075-15-2022-1115).

Список литературы

- [1] Sudnikov A.V. Experiments on the Plasma Transportation in the Long Helical Mirror. Main results of the last campaigns on the plasma confinement in the helically corrugated magnetic field on the SMOLA device // Open Systems 2021.
- [2] Beklemishev A.D. Radial and axial transport in trap sections with helical corrugation // AIP Conf. Proc. 1771(1), 2016.
- [3] Skovoroda A.A. Pseudo-symmetric magnetic traps for plasma confinement // Journal Fizika Plazmy, 24(12), 1059-1064, 1998.

Симплициальная геометрия взвешенных полных пересечений

Овчаренко М.А.

Математический институт РАН им. Стеклова

Для любого взвешенного проективного пространства $\mathbb{P}(\rho)$ его особый локус $\text{Sing}(\mathbb{P}(\rho))$ и базисные множества $\text{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(d)|)$ линейных систем $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(d)|$ могут быть описаны в терминах *взвешенных симплициальных комплексов*, т.е., абстрактных симплициальных комплексов, снабжённых функцией веса на гранях. Мы покажем, что из существования гладкого взвешенного полного пересечения с заданными весами и степенями следует существование специальной комбинаторной структуры на данных взвешенных симплициальных комплексах. С помощью этой структуры мы построим примеры гладких хорошо сформированных взвешенных полных пересечений со сложной комбинаторикой весов и степеней.

Двойственность Долгачёва–Никулина для слоёв торических моделей Ландау–Гинзбурга гладких 3-многообразий Фано

Овчаренко Михаил¹, Harder Andrew²

1. Математический институт им. В.А. Стеклова

2. Lehigh University

Зеркальная симметрия сопоставляет многообразиям Фано одномерные семейства многообразий Калаби–Яу, которые называются *моделями Ландау–Гинзбурга*. Эллименты этих семейств зеркально двойственны к антиканоническим сечениям многообразий Фано.

В частности, в трёхмерном случае речь идёт о зеркальной симметрии КЗ поверхностей. Одна из её наиболее интересных форм — так называемая *двойственность Долгачёва–Никулина*: она переставляет решётки алгебраических и трансцендентных циклов на КЗ поверхности.

Теория *торических моделей Ландау–Гинзбурга* даёт эффективный метод построения моделей Ландау–Гинзбурга. Естественно ожидать, что двойственность Долгачёва–Никулина выполнена для слоёв торических моделей Ландау–Гинзбурга гладких 3-многообразий Фано.

Данная гипотеза была доказана Ильтеном–Льюисом–Пржиялковским в случае числа Пикара 1. Мы покажем, что некоторая форма двойственности Долгачёва–Никулина имеет место для всех остальных гладких 3-многообразий Фано, и обсудим возможные обобщения.

On recognition of finite groups by the set of conjugacy class sizes

Panshin V.^{1,2}

1. Novosibirsk State University

2. Sobolev Institute of Mathematics

Let G be a finite group. For $x \in G$, denote by x^G the set $\{x^g \mid g \in G\}$, that is the conjugacy class containing x , by $|x^G|$ its size, and by $N(G)$ the set of all conjugacy class sizes of G .

Even in the first days of group theory, it was recognized that understanding of conjugacy classes sizes is essential to the investigation of the group structure. One of the first major results here is due to Burnside [1] who showed that a group with a conjugacy class of nonidentity prime power size must include a nontrivial proper normal subgroup, so it cannot be simple.

The center $Z(G) = \{x \mid xg = gx, g \in G\}$ is obviously a normal subgroup of a group G . In 1980s J.G. Thompson posed the following conjecture: If L is a finite nonabelian simple group, G is a finite group with $Z(G) = 1$, and $N(G) = N(L)$, then $G = L$. Later A.S. Kondrat'ev added this conjecture to the Kourovka Notebook [4, Question 12.38]. In the series of papers of different authors, it took more than thirty years to confirm the conjecture and the final step was done by I.B. Gorshkov in [2].

In the talk we will discuss one generalization of Thompson’s conjecture. Recently, Gorshkov posed the following

Question [4, 20.29]. *Let S be a nonabelian finite simple group. Is it true that for any positive integer n , if the set of class sizes of a finite group G with $Z(G) = 1$ is the same as the set of class sizes of the direct power S^n , then $G = S^n$?*

There are no examples when the answer to this question is negative and the only studied case with $n > 1$ is when $L = A_5$ is the alternating group of degree 5 and $n = 2$ [3]. In the talk the following results will be presented.

Theorem 1 [5]. *If G is a group with $Z(G) = 1$ and $N(G) = N(A_6 \times A_6)$, then $G = A_6 \times A_6$.*

Theorem 2. *If G is a group with $Z(G) = 1$ and $N(G) = N(A_5 \times A_5 \times A_5)$, then $G = A_5 \times A_5 \times A_5$.*

The work is supported by Mathematical Center in Akademgorodok under agreement No. 075-15-2022-281. with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

Список литературы

- [1] W. Burnside, On Groups of Order $p^\alpha q^\beta$, Proc. London Math., 1904, **2**:1, 388–392.
- [2] I.B. Gorshkov, On Thompson’s conjecture for finite simple groups, Commun. Algebra, 2019, **47**:12, 5192-5206.
- [3] I.B. Gorshkov On characterization of a finite group by the set of conjugacy class sizes, J. Algebra Appl., 2021 <https://doi.org/10.1142/S0219498822502267>.
- [4] E.I. Khukhro, V.D. Mazurov eds., Unsolved problems in Group Theory: the Kourovka Notebook, 2022, arXiv:1401.0300 [math.GR] (<https://kourovka-notebook.org>).
- [5] V. Panshin, On recognition of $A_6 \times A_6$ by the set of conjugacy class sizes, Sib. Elec. Math. Rep., 2022, **19**:2, 762-767.

Remark on one Evans type model of geo-economics

Podolin D., Rassadin A.

Higher School of Economics

By the end of the last century geo-economics is known to stand out from economic theory, namely, geo-economics studies the influence of geographical factors on economic processes (see [1] and references therein). Therefore, the task of translating geo-economic representations into the language of mathematics is currently very urgent.

In this report, a homogeneous chain consisting of N identical Evans-like stores [2] is considered. Each of these equidistant stores sells a certain product, $p_n(t)$ being price of this product in n -th store. This price is supposed to obey the following system of ordinary differential equations:

$$\frac{dp_n}{dt} = \gamma [(a - b p_n) - (c + d p_n)] + \alpha (p_{n+1} - p_n) + \beta (p_{n-1} - p_n), \quad (1)$$

where γ, a, b, c, d are canonical parameters of Evans model [2], and terms with α and β describe mutual influence of the nearest neighbors on each other. Values γ, a, b, c, d are positive, but it is assumed that $a > c$.

Further let $N \gg 1$ and δ is a distance between the neighboring stores, then, denoting $P(n\delta, t) = p_n(t)$, one can reduce system (1) of N ordinary differential equations to a single partial differential equation:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + V \frac{\partial P}{\partial x} = -\Gamma(P - P_*) + D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad P(x, 0) = P_0(x), \quad (2)$$

where $V = \delta(\alpha - \beta)$, $D = \alpha\delta^2$, $\Gamma = \gamma(b + d)$, $P_* = (a - c)/(b + d)$ and $P_0(x)$ is distribution of initial price of the product along the chain of stores. Function $P_0(x)$ ought to be positive everywhere. Further it is supposed that $\alpha > 0$ and $\beta \in \mathbf{R}$.

Exact solution of the Cauchy problem (2) on the straight line is equal to:

$$P(x, t) = P_* (1 - e^{-\Gamma t}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\Gamma t - \frac{(x - Vt - \xi)^2}{4Dt} \right] \frac{P_0(\xi) d\xi}{2\sqrt{\pi Dt}}. \quad (3)$$

If the support of the function $P_0(x)$ is located far enough from the boundaries of the chain, then for a certain period of time the expression (3) approximates the solution of input system (1) quite accurately.

In the report graphs of functions (3) under different initial conditions $P_0(x)$ are presented and its properties are discussed.

Список литературы

- [1] Gasimli V. Geo-Economics. Anadolu University, Turkey. 2015. 207 p.
- [2] Evans G.C. The dynamics of monopoly // The American Mathematical Monthly. 1924. V. 31, is. 2, pp. 77-83.

Топология особенностей эллиптического билиярда в потенциальном поле

Пустовойтов С.Е.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Рассмотрим математический билиард на столе, ограниченном эллипсом $x^2/a + y^2/b = 1$. Такая классическая кусочно-гладкая система с двумя степенями свободы, впервые рассмотренная Биркгофом, была изучена многими авторами с различных точек зрения. В частности известно, что такой билиард интегрируем в квадратурах. А именно, он является гамильтоновой системой с гамильтонианом $H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2}$, при этом допускает еще одну функцию вида

$$\Lambda = \frac{p_x^2}{a} + \frac{p_y^2}{b} - \frac{(xp_y - p_x y)^2}{ab},$$

которая сохраняется на траекториях движения, т.е. является первым интегралом. Более того, эти две функции, определенные на кусочно-гладком фазовом пространстве $M^4 = \{(p_x, p_y, x, y)\}$, функционально независимы почти всюду. Слоение этого фазового пространства на общие поверхности уровня интегралов $T_{h,f} = \{\bar{x} \in M^4 : H(\bar{x}) = h, F(\bar{x}) = f\}$ называется *слоением Лиувилля*. Структуру слоения Лиувилля, ограниченного на изоэнергетическое многообразие $Q_1^3 = \{\bar{x} \in M^4 : H(\bar{x}) = 1\}$, эллиптического бильярда, а также любого локально-плоского бильярда, ограниченного дугами софокусных эллипсов и гипербол, исследовала В. В. Ведюшкина в [1] в терминах инвариантов Фоменко-Цишанга (см. [2]).

Потребуем теперь, что на бильярдный шар действует полиномиальный потенциал $W(x, y)$ степени не больше четырех. Гамильтониан такой системы имеет вид $H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + W(x, y)$. Однако в общем случае интегрируемость не сохраняется. Тем не менее, с учетом критерия интегрируемости, предложенным В. В. Козловым в [3], бильярд является интегрируемым тогда и только тогда, когда потенциал имеет вид

$$W(x, y) = -c_0(x^2 + y^2 - a - b) - c_1((x^2 + y^2 - a - b)^2 + ay^2 + bx^2 - ab),$$

при этом дополнительный интеграл имеет вид $F = \Lambda + f(x, y)$. Структура слоения Лиувилля такого бильярда, ограниченного на изоэнергетические многообразия Q_h^3 , была изучена автором в [4]. Теперь же изучим ее в инвариантных четырехмерных окрестностях слоев, содержащих невырожденные точки ранга 0 (в которых выполнено $dH = dF = 0$) или вырожденные критические траектории. В частности, верно следующее.

Теорема. *Невырожденные точки ранга 0 эллиптического бильярда с потенциалом четвертой степени имеют тип центр-центр, центр-седло или седло-седло. Слоение Лиувилля в окрестности слоев типа центр-седло имеет вид прямого произведения 2-атома A на один из 2-атомов B, B_2, C_2, C_4 . В окрестности слоев типа седло-седло оно имеет вид полупрямого произведения $B \times C_2/Z_2, B_2 \times C_2/Z_2$ или $B \times C_4/Z_2$. Всего существует шесть типов окрестностей особых слоев, содержащих вырожденную орбиту, с точностью до лиувиллевой эквивалентности.*

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 22-71-10106 в МГУ имени М.В.Ломоносова.

Список литературы

- [1] Фокичева В. В., Топологическая классификация бильярдных областей в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176.
- [2] Болсинов А. В., Фоменко А. Т., Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I, II— Ижевск: РХД, 1999.
- [3] Козлов В. В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде. // Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1 1995.
- [4] Пустовойтов С. Е. Топологический анализ эллиптического бильярда в потенциальном поле четвертого порядка // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2021.

New explicit exact solutions of one-dimensional heat equation and some its applications

Rassadin A.

Higher School of Economics

The Cauchy problem for one-dimensional heat equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = u^0(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (1)$$

describes a wide range of physical problems [1].

Exact solution of the Cauchy problem (1) is known to be expressed via its initial condition $u^0(x)$ as follows [1]:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] u^0(\xi) d\xi. \quad (2)$$

But in practice in order to analyze different applications of heat equation (1) it is often required to possess by quite convenient explicit formulas for exact solution (2).

To overcome this obstacle let us consider the next countable set of initial conditions:

$$u^0(x) = H_n(x) \exp(-x^2/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

where

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k! (n-2k)!} (2x)^{n-2k} \quad (4)$$

are the Hermite polynomials in standard form [2]. Obviously, functions (3) form orthogonal basis in Hilbert space $L^2(\mathbf{R})$.

Substituting functions (3) into integral (2) and using the well-known formula of generating function for the Hermite polynomials [2] it is not difficult to find that exact solutions of heat equation corresponding to functions (3) are equal to:

$$u_n(x, t) = \frac{(1-2t)^{\frac{n}{2}}}{(1+2t)^{\frac{n+1}{2}}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{1-4t^2}}\right) \exp\left[-\frac{x^2}{2(1+2t)}\right]. \quad (5)$$

It is necessary to underline that looking at formula (4) one can easily check that there is no singularity in expression (5) under $t = 1/2$.

Using symmetry group of heat equation (1) one can generate from solutions (5) new exact solutions of input equation [3]. For example, the Galilean transformation with velocity $V \in \mathbf{R}$ [3] yields from functions (5) the next exact solution:

$$\tilde{u}_n(x, t) = \exp\left(\frac{V^2 t}{4} - \frac{V x}{2}\right) u_n(x - V t, t). \quad (6)$$

Explicit solution (6) is certain to be very useful too.

At last, explicit exact solutions (5) and (6) are very important to a number of applications of the C_0 -semigroup theory based on the Chernoff tangency (see [4] and references therein).

Список литературы

- [1] Vladimirov V.S. Equations of Mathematical Physics. Marcel Dekker Inc., New York, 1971.
- [2] Bateman H. Higher transcendental functions. Volume II. McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.
- [3] Olver P.J. Applications of Lie groups to differential equations. Graduate Texts in Mathematics, vol. 107. Springer, 1986.
- [4] Remizov I.D. Approximations to the solution of Cauchy problem for a linear evolution equation via the space shift operator (second-order equation example) // Applied Mathematics and Computation. 2018. V. 328, N. 1. P. 243-246.

On element orders in covers of $PSL_2(q)$

Rodionov V. M.

Novosibirsk State University

The spectrum $\omega(G)$ of a finite group G is the set of the orders of its elements. We call groups G and H isospectral if $\omega(G) = \omega(H)$. Let $h(G)$ be the number of pairwise non-isomorphic finite groups isospectral to G . A group G is said to be almost recognizable by spectrum if $h(G) < \infty$ and unrecognizable if $h(G) = \infty$. A finite group G having a nontrivial soluble subgroup is always unrecognizable. In contrast, most of nonabelian simple groups are almost recognizable. More precisely, apart from a finite number of exceptions, all unrecognizable nonabelian simple groups are among the groups $PSU_3(q)$, $PSp_4(q)$, $PSp_8(q)$ and $P\Omega_9(q)$.

We are concerned with the groups $PSp_4(q)$ which are unrecognizable by spectrum for all prime powers $q \neq 3^{2n+1}$, $n \geq 1$ [1, 2]. The general structure of a group G isospectral to $PSp_4(q)$, where $q \neq 3^{2n+1}$, $n \geq 1$, was studied in [3]. Namely, it was proved that, up to isomorphism, either $PSp_4(q) \leq G \leq \text{Aut}(PSp_4(q))$, or the quotient group of G with respect to its largest normal soluble subgroup K satisfies $PSL_2(q^2) \leq G/K \leq \text{Aut}(PSL_2(q^2))$. However, the following question remains open: can this quotient group G/K be isomorphic exactly to $PSL_2(q^2)$? It is known that the answer is positive if q is a power of 2 or 3 [1, 2], and negative if $q = 7$ [3, Remark 4]. We show that in all other cases the answer is negative.

Theorem. *Let $q = p^m$, where $p > 3$ is prime. If G is a finite group, K is a normal subgroup of G and $G/K \simeq PSL_2(q^2)$, then $\omega(G) \neq \omega(PSp_4(q))$.*

Список литературы

- [1] Mazurov V.D., Xu M.C., Cao H.P. Recognition of the finite simple groups $L_3(2^m)$ and $U_3(2^m)$ from the orders of their elements // Algebra Logic. 2000. V. 39. No. 5. P. 324–334.
- [2] Mazurov V. D. Recognition of finite simple groups $S_4(q)$ by their element orders // Algebra Logic. 2002. V. 41. No. 2. P. 93–110.

- [3] Lytkin Y. V. On finite groups isospectral to the simple groups $S_4(q)$ // Sib. Electr. Math. Reports 2018. V. 15. P. 570–584.

Upper bound for capital in Solow model with logistic labor resource

Rubtzov M., Pisarev M., Rassadin A.

Higher School of Economics

Let us consider Solow model of macroeconomics [1] with a Cobb-Douglas production function with degree α ($0 < \alpha < 1$) [2]:

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + \rho(1-a)AK^\alpha L^{1-\alpha}, \quad (1)$$

where μ , ρ , a , A are parameters of the model, K is capital of macroeconomics under consideration and L is its labor resource.

Let one suppose that temporal dynamics of labor obeys to the logistic equation with rate value γ :

$$\frac{dL}{dt} = \gamma L(L_m - L), \quad (2)$$

where L_m is maximal labor resource available in the macroeconomics. This model of labor resource dynamics is borrowed from the theory of advertising.

It is obvious that it is required to provide system of differential equations (1) and (2) by initial conditions:

$$K(0) = K_0, \quad L(0) = L_0, \quad 0 < L_0 < L_m. \quad (3)$$

Further let us introduce the following dimensionless variables and parameters:

$$k = \frac{K}{L_m} \left[\frac{\mu}{\rho(1-a)A} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad l = \frac{L}{L_m}, \quad \tau = \mu t, \quad \beta = \frac{\gamma L_m}{\mu}, \quad (4)$$

then one can rewrite the Cauchy problem (1)-(3) in the next form:

$$\frac{dk}{d\tau} = -k + k^\alpha l^{1-\alpha}, \quad \frac{dl}{d\tau} = \beta l(1-l), \quad k(0) = k_0, \quad l(0) = l_0, \quad (5)$$

where dimensionless initial conditions k_0 and l_0 are calculated from values (3) using formulas (4).

It is well-known that exact solution of the second equation of system (5) is equal to:

$$l(\tau) = \frac{l_0}{l_0 + (1-l_0) \exp(-\beta \tau)}, \quad (6)$$

hence, it is easy to see that exact solution of the first equation of system (5) is expressed via function (6) as follows:

$$k(\tau) = \left[k_0^{1-\alpha} e^{-(1-\alpha)\tau} + (1-\alpha) \int_0^\tau e^{-(1-\alpha)(\tau-\theta)} l^{1-\alpha}(\theta) d\theta \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (7)$$

But integral in formula (7) proves to be impossible to express via elementary functions. Nevertheless using inequality $0 < l(\tau) < 1$ one can obtain the next upper bound for function (7):

$$k(\tau) \leq \left[1 + (k_0^{1-\alpha} - 1) e^{-(1-\alpha)\tau} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (8)$$

In the report graphs of the right hand side of inequality (8) under different values both k_0 and α are presented.

Список литературы

- [1] Solow R.M. A contribution to the theory of economic growth // The Quaterly Journal of Economics. 1956. V. 70, is. 1, pp. 65-94.
- [2] Cobb C.W., Douglas P.H. A theory of production // The American Economic Review. 1928. V. 18, no. 1 (supplement), pp. 139-165.

Classical solution of the initial-value problem for a quasilinear wave equation with discontinuous initial conditions

Rudzko J.V.¹, Korzyuk V.I.^{1,2}

1. *Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus*

2. *Belarusian State University*

In this report we shall consider the question of global solvability in $\bar{Q} = [0, \infty) \times \mathbf{R}$ of the initial-value problem

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)u(t, x) + f(t, x, u(t, x), \partial_t u(t, x), \partial_x u(t, x)) &= F(t, x), (t, x) \in Q, \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (1)$$

where $a > 0$ for definiteness, $Q = (0, \infty) \times \mathbf{R}$, F is a function given on the set \bar{Q} , f is a function given on the set $\bar{Q} \times \mathbf{R}^3$. The functions φ and ψ are piecewise smooth and defined by the formula

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in (-\infty, x_0), \\ A, & x = x_0, \\ \varphi_2(x) & x \in (x_0, +\infty), \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & x \in (-\infty, x_0), \\ \psi_2(x), & x \in (x_0, +\infty), \end{cases}$$

where x_0 and A are arbitrary real numbers, φ_1 and ψ_1 are functions given on the set $(-\infty, x_0]$, and φ_2 and ψ_2 are functions given on the set $[x_0, +\infty)$.

Following [1], we investigate two main questions: 1) the exact statement of the initial value problem (1); 2) the smoothness of the solution. The cause for the first question is the non-existence of the classical solution of the problem due to the condition $\varphi \notin C^2(\mathbf{R})$ or $\psi \notin C^1(\mathbf{R})$.

By virtue of discontinuous initial conditions, the problem (1) does not have a classical solution defined on the set \bar{Q} . Nevertheless, we can define a classical solution on a smaller

set $\overline{Q} \setminus \Gamma$ so that it belongs to the class $C^2(\overline{Q} \setminus \Gamma)$ and satisfies the equation with the initial conditions on the set $\overline{Q} \setminus \Gamma$, and additional matching conditions given on the set Γ .

We construct the solution using the method of characteristics in an implicit analytical form as a solution of some integro-differential equations. The solvability of these equations, as well the smoothness of their solutions, is studied. For the problem in question, we prove the uniqueness of the solution, and establish the conditions under which its classical solution exists.

The talk is based on a recent paper [2].

Список литературы

- [1] Chekhlov V. I. Solvability of a mixed problem with nonlinear boundary condition for a one-dimensional semilinear wave equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1968, vol. 183, no. 4, pp. 787–790.
- [2] Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of the initial-value problem for a quasilinear wave equation with discontinuous initial conditions. *arXiv:2301.01554*.
- [3] Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of the initial-value problem for a one-dimensional quasilinear wave equation. *XX Mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsiya po differentsial'nyim uravneniyam (Eryuginskie chteniya–2022): Materialy Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii, Novopolotsk, 31 maya – 03 iyunya 2022 g. Chast' 2 [XX International Scientific Conference on Differential Equations (Erugin Readings–2022): Proceedings of the International Scientific Conference, Novopolotsk, May 31 – June 03, 2022. Part 2]*. Novopolotsk, 2022, pp. 38–39.
- [4] Korzyuk V. I., Puzyrnyi S. I. Classical solution of mixed problems for the one-dimensional wave equation with Cauchy nonsmooth conditions. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2016, no. 2, pp. 22–31 (in Russian).
- [5] Korzyuk V. I., Kovnatskaya O. A., Sevastyuk V. A. Goursat's problem on the plane for a quasilinear hyperbolic equation. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2022, vol. 66, no. 4, pp. 391–396 (in Russian).
- [6] Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Curvilinear parallelogram identity and mean-value property for a semilinear hyperbolic equation of second-order. *arXiv:2204.09408*.
- [7] Kharibegashvili S. S., Jokhadze O. M. A mixed problem with discontinuous boundary conditions for the wave equation. *Mathematical Notes*, 2020, vol. 108, no. 1, pp. 123–136.

О классификации полярных потоков на четырёхмерных многообразиях

Сараев И.А.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Пусть M^4 — замкнутое связное гладкое многообразие. Поток f^t называется полярным, если его неблуждающее множество Ω_{f^t} состоит из двух узловых и конечного числа седловых гиперболических состояний равновесия, инвариантные многообразия которых пересекаются трансверсально. Напомним, что индекс Морса гиперболического состояния равновесия p называется размерность $\dim W_p^u$ его неустойчивого многообразия W_p^u . Рассмотрим класс $G(M^4)$ полярных потоков на многообразии M^4 , седловые состояния равновесия которого имеют индекс Морса, равный 2. Тогда инвариантные многообразия таких сёдел не пересекаются, и многообразие M^4 является односвязным.

В силу [1] для любого потока $f^t \in G(M^4)$ существует энергетическая функция — функция Морса $\varphi : M^4 \rightarrow [0, 4]$, строго убывающая вдоль траекторий потока, отличных от состояний равновесия, и такая, что множество её критических точек $\text{Cr}(\varphi)$ совпадает с неблуждающим множеством Ω_{f^t} , при этом $\varphi(p) = \dim W_p^u$ для любой точки $p \in \Omega_{f^t}$.

Пусть $S_\omega = \varphi^{-1}(1)$, $S_\alpha = \varphi^{-1}(3)$. Множества S_ω , S_α являются гладко вложенными трехмерными сферами, трансверсальными к траекториям потока f^t . Для каждого седлового состояния равновесия $\sigma \in \Omega_{f^t}$ положим $c_{\sigma,\omega} = W_\sigma^s \cap S_\omega$, $c_{\sigma,\alpha} = W_\sigma^u \cap S_\alpha$ и обозначим через $\mathcal{C}_\omega, \mathcal{C}_\alpha$ совокупность множеств $c_{\sigma,\omega}, c_{\sigma,\alpha}$ соответственно.

Определим гомеоморфизм $\eta : S_\alpha \setminus \mathcal{C}_\alpha \rightarrow S_\omega \setminus \mathcal{C}_\omega$ по следующему правилу: $\eta(x) = \mathcal{O}(x) \cap S_\omega$, где $\mathcal{O}(x)$ — траектория потока f^t , проходящая через точку $x \in S_\alpha$.

Пусть $\{\Pi_{\sigma,\omega}\}$ — попарно непересекающиеся полнотории, являющиеся трубчатыми окрестностями узлов $\{c_{\sigma,\omega}\}$ в S_ω , и $m_{\sigma,\omega}$ — меридиан полнотория $\Pi_{\sigma,\omega}$. Тогда $\eta^{-1}(m_{\sigma,\omega})$ является простой замкнутой кривой на сфере S_α , принадлежащей окрестности узла $c_{\sigma,\alpha}$. Оснастим узел $c_{\sigma,\alpha}$ целым числом n_σ , равным коэффициенту зацепления кривых $\eta^{-1}(m_{\sigma,\omega})$ и $c_{\sigma,\alpha}$.

Зацепление \mathcal{C}_α с дополнительной информацией об оснащении каждого узла является диаграммой Кирби многообразия M^4 (см. [2]).

Для потока $f^{t'} \in G(M^4)$ обозначим через α', ω' источниковое и стоковое состояние равновесия соответственно и снабдим штрихами обозначения объектов, аналогичных объектам, введенным для потока f^t .

Теорема 3. *Потоки $f^t, f^{t'} \in G(M^4)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм $h : S_\alpha \rightarrow S_{\alpha'}$ такой, что $h(\mathcal{C}_\alpha) = \mathcal{C}_{\alpha'}$, и для любого $\sigma \in \Omega_{f^t}$ из $h(c_{\sigma,\alpha}) = c_{\sigma',\alpha'}$ следует $n_\sigma = n_{\sigma'}$.*

Благодарности. Публикация подготовлена в ходе проведения исследования №23-00-028 в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2023–2024 гг.

Список литературы

- [1] K.R. Meyer. Energy Functions for Morse Smale Systems. American Journal of Mathematics. Vol. 90. No. 4. p. 1031-1040. 1968
- [2] R. Mandelbaum. Four-dimensional topology. The university of Rochester Department of Mathematics. 1978.

Неособые потоки Морса-Смейла с тремя периодическими орбитами на ориентируемых 3-многообразиях

Шубин Д.Д., Починка О.В.

*Международная лаборатория динамических систем и приложений НИУ ВШЭ
Нижний Новгород*

Топологической эквивалентности неособых потоков Морса-Смейла в предположениях различной общности посвящен целый ряд статей. Однако, в случае малого числа орбит известные инварианты можно значительно упростить и, главное, довести задачу классификации до реализации, описав допустимость полученных инвариантов. В недавней работе была получена исчерпывающая классификация потоков с двумя орбитами на произвольных замкнутых n -многообразиях. В настоящей статье полная топологическая классификация получена для потоков с тремя периодическими орбитами, заданных на ориентируемых 3-многообразиях.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение №075-15-2022-1101

Об инварианте виртуальных узлов

Соколов П. П.

Новосибирский государственный университет

Рассмотрим пару квандла и его точки (Q, h) . Пусть Q_1, Q_2, \dots, Q_n – n копий квандла Q . Определим свободную n -ую квандла Q как

$$Q^{*n} = Q_1 * Q_2 * \dots * Q_n,$$

где $*$ – свободное произведение квандлов.

Зафиксируем тривиальный одноэлементный квандл T_1 и рассмотрим следующий набор автоморфизмов квандла $Q^{*n} * T_1$

$$S_i = \begin{cases} q_i \rightarrow q_{i+1} \bar{*} h_i & , \\ q_{i+1} \rightarrow q_i * h_i & , \\ q_k \rightarrow q_k & , k \neq i, i+1 \\ y \rightarrow y & , y \in T_1. \end{cases}$$
$$V_i = \begin{cases} q_i \rightarrow q_{i+1} * y & , \\ q_{i+1} \rightarrow q_i \bar{*} y & , \\ q_k \rightarrow q_k & , k \neq i, i+1 \\ y \rightarrow y & , y \in T_1. \end{cases}$$

где $i = 1, \dots, n-1$.

Теорема 4. *Отображение $\varphi : VB_n \longrightarrow \text{Aut}(Q^{*n} * T_1)$ заданное по правилу*

$$\varphi(\sigma_i) = S_i, \quad \tau(\rho_i) = V_i$$

*будет представлением группы виртуальных кос автоморфизмами $Q^{*n} * T_1$.*

Теорема 5. *Пусть $\beta \in VB_n$ – виртуальная коса, тогда представление φ из прошлой теоремы порождает инвариант $VI_\beta(Q, h)$ виртуального узла $cl(\beta)$ по следующему правилу*

$$VI_\beta(Q, h) = Q^{*n} * T_1 / \{\varphi(\beta)(q_i) = q_i \mid q_i \in Q^{*n} * T_1\}$$

Теорема 6. *Пусть D – диаграмма виртуального узла, тогда представление φ порождает инвариант $VI_\beta(Q, h)$ виртуального узла D .*

Список литературы

- [1] T. Ito. A functor-valued extension of knot quandles. 2010.

Topological structures of cognitive maps

Sorokin Konstantin

Laboratory of Algebraic Topology and its Applications, HSE University

A cognitive map is a type of mental representation which serves an individual to acquire, code, store, recall, and decode information about the relative locations and attributes of phenomena in their everyday or metaphorical spatial environment. [1]. In particular it is common to study them as a representation of a space in a brain network. What is not common is restoring a topology of an environment (if its non-trivial) which is encoded within some network. Studying whether its possible to extract such topology from neural activity of an animal during its free spatial navigation in modifiable arena was one of the main leading ideas of this research.

The main problem though is that despite a large amount of good research works in neuroscience, we still lack a satisfactory theoretical framework for describing the dynamics in networks in brain and its underlying structure. We review existing methods and approaches to describe such (hyper)graph and topological structures, including ones we developed. In particular we will focus on the Topological Data Analysis (TDA)-related ones. During the discussion we compare different methods of reconstructing the topology of cognitive maps from registered neural activity of animals during free spatial navigation [2].

Список литературы

- [1] https://en.wikipedia.org/wiki/Cognitive_map
- [2] Konstantin Sorokin, Anton Ayzenberg, Konstantin Anokhin, Vladimir Sotskov, Maxim Beketov, Andrey Zaitsev, and Robert Drynkin. "Topology of Cognitive Maps." arXiv, December 5, 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2211.08718>.

Классификация поверхностей дель Пеццо степени 8 без точек

Трепалин А.С.^{1,2}

1. Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук
2. Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Лаборатория алгебраической геометрии и её приложений

Пусть \mathbb{k} — совершенное поле. Поверхностью дель Пеццо степени 8 расщепимого типа называется поверхность X такая, что поверхность $X \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}$ изоморфна квадрике в $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{k}}}^3$. В случае, если на такой поверхности есть точка, определённая над основным полем, то она рациональна (то есть бирационально эквивалентна проективной плоскости).

В докладе мы опишем бирегулярную и бирациональную классификацию поверхностей дель Пеццо степени 8 без \mathbb{k} -точек. Кроме того, мы опишем минимальные поверхности, бирационально эквивалентные любой заданной поверхности дель Пеццо степени 8 без \mathbb{k} -точек. Основным результатом является то, что если X — поверхность дель Пеццо степени 8 без точек и число Пикара $\rho(X)$ равно 1, то любая поверхность дель Пеццо степени 8, бирационально эквивалентная X , изоморфна X . В случае, когда $\rho(X) = 2$, существует не более трёх неизоморфных поверхностей дель Пеццо степени 8, бирационально эквивалентных X . Также доказано то, что поверхность дель Пеццо степени 8 является бирационально жёсткой (то есть любая бирационально эквивалентная ей минимальная поверхность изоморфна ей) тогда и только тогда, когда на ней нет точек степени 2.

Некоторые деформации столов-книжек, реализующих упорядоченные бильярдные игры

Туниянц Д. А.

МГУ им. М. В. Ломоносова

Конструкция упорядоченной бильярдной игры была введена в работе [1] В. Драговича и М. Раднович. Она задается двумя наборами: n софокусных эллипсов E_1, \dots, E_n и n чисел $\varepsilon_k \in \{\pm 1\}$, называемых сигнатурой. Траектория шара есть ломаная $\dots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \dots$, вершины которой A_k , $k \in \mathbb{Z}$, принадлежат эллипсам, причем $A_k \in E_s$, если $s \equiv k \pmod{n}$. Отражение в вершине A_k является внутренним, если $\varepsilon_s = 1$, и внешним, если $\varepsilon_s = -1$.

Траектория любой игры реализуется [2] как проекция на плоскость траектории бильярда, заданного функцией $H = |\vec{v}|^2$ на подходящей бильярдной книжке – столе-комплексе с перестановками. Их класс был ранее введен В.В.Ведюшкиной в [3].

Теорема 7. *Корректная упорядоченная бильярдная игра с эллипсами (E_1, \dots, E_n) и сигнатурой $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, где $E_i \neq E_{i+1}$ (считаем $E_0 = E_n, E_{n+1} = E_1$) реализуется книжкой, склеенной из листов:*

(A) кольца A_k для $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, ограниченные эллипсами E_k и E_{k+1} ;

Для $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ (D1) диск D_k с границей E_k , т.ч. $\varepsilon_k = 1$ и либо $E_{k-1} \subset E_k \subset E_{k+1}$,

либо $E_{k+1} \subset E_k \subset E_{k-1}$; (D2) пара дисков D'_k и D''_k с границей E_k , т.ч. $\varepsilon_k = 1$ и $E_k \subset E_{k+1}$ и $E_k \subset E_{k-1}$.

Тогда перестановка σ_k , $k = 1, \dots, n$, на эллипсе склейки E_k равна $(A_{k-1}D_kA_k)$ в случае (D1), $(A_{k-1}D'_kD''_kA_k)$ в случае (D2), $(A_{k-1}A_k)$ иначе.

Деформация софокусных эллипсов в концентрические окружности (с сохранением перестановок на ребрах книжки) сохраняет класс гомеоморфности изоэнергетической поверхности $Q^3 : H = 1$ книжки и реализуемую ею игру. Изучим топологические свойства этих поверхностей.

Лемма 1. Деформация книжки, при которой ровно одно кольцо A_k гомотопно стягивается в окружность, остальные кольца и диски преобразуются гомеоморфно, начальным, не меняет класс гомеоморфности Q^3 , и две перестановки, стоявшие на границах кольца, склеиваются в одну: $\sigma_1 = (A_kL_{i_1} \dots L_{i_n})$ и $\sigma_2 = (L_{j_m} \dots L_{j_1}A_k)$ склеются в $\sigma = (L_{j_m} \dots L_{j_1}L_{i_1} \dots L_{i_n})$.

Рассмотрим далее две серии книжек: склеенные только из дисков (кругов) или только из колец.

Утверждение 1. Изоэнергетическая поверхность Q^3 книжки, состоящей из n дисков с перестановкой $\sigma = (1 \dots n)$, гомеоморфна линзовому пространству $L(n, 1)$.

Книжки Ω , склеенные из круговых колец и дисков, обладают S^1 -симметрией α .

Определение 1. Назовем профилем книжки граф – результат факторизации Ω/α – вершины которого наследуют с Ω перестановки.

Теорема 8. Изоэнергетическая поверхность Q^3 бильярдной книжки, склеенной из колец, гомеоморфна прямому произведению окружности и сферы с g ручками: $Q^3 \cong S^1 \times (S^2 + g \text{ ручек})$, где g – цикломатическое число графа-профиля книжки.

Список литературы

- [1] Dragovic, V. Cayley-Type Conditions for Billiards within k Quadrics in R^d / V. Dragovic, M. Radnovic // J. Phys. A. - 2004. - Vol. 37 - N. 4 - pp. 1269-1276.
- [2] Dragovic, V. Billiard ordered games and books / V. Dragovic, M. Radnovic, S. Gasiorek // Reg. Chaot. Dyn. - 2022. - Vol. 27 - N. 2 - pp. 132-150.
- [3] Ведюшкина, В.В. Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем / В.В. Ведюшкина, И.С. Харчева // Матем. сб. - 2018. т. 209, номер 12, 17–56.

Бифуркации в моделях популяционной динамики с эффектом Олли

Усманова Д.Р.

Уфимский университет науки и технологий

В математической биологии одними из наиболее интересных являются системы Лотки-Вольтерры ([1]):

$$\begin{cases} x' = xf(x, y), \\ y' = yg(x, y). \end{cases}$$

В классических постановках функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ являются линейными, что приводит к не вполне реалистичным моделям. Более адекватными являются системы, в которых указанные функции являются нелинейными или, в частности, немонотонными. Системы, в которых функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ являются немонотонными, часто называют системами с эффектом Олли.

В настоящем докладе рассматривается система Лотки-Вольтерра с эффектом Олли:

$$\begin{cases} x' = x(1 - 2y), \\ y' = y(y - \mu)(y - 2) + xy, \end{cases} \quad (1)$$

в которой μ – вещественный параметр. Эта система имеет тогда точку равновесия $M_4 \left(\frac{3}{4} - \frac{3\mu}{2}, \frac{1}{2} \right)$, когда располагается в первом квадранте K_+ при $\mu < \frac{1}{2}$. Матрица Якоби для системы (1) при $\mu = -1$ имеет чисто мнимые значения $\pm \frac{3}{2}i$. Это означает, что $\mu = -1$ является точкой бифуркации Андронова-Хопфа в окрестности точки M_4 .

В докладе обсуждаются свойства этой бифуркации, определяются основные характеристики бифуркации на основе построения ляпуновских показателей.

Список литературы

- [1] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 400 с.

Jordan constant for Cremona group of rank 2 over a finite field

Vikulova A.V.^{1,2}

1. *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, 8 Gubkin str., Moscow, 119991, Russia*
2. *Laboratory of Algebraic Geometry, National Research University Higher School of Economics, 6 Usacheva str., Moscow, 119048, Russia.*

The Cremona group $\text{Cr}_n(\mathbf{F})$ of rank n is a group of birational automorphisms of the projective space \mathbb{P}^n over \mathbf{F} . Despite the fact that this group appears naturally, its structure is extremely complicated for $n \geq 2$. Moreover, the description of finite subgroups seems very hard to obtain. Even in the first non-trivial case of rank 2 there is a description of conjugacy classes of finite subgroups only over \mathbb{C} (see [1]). Nevertheless, we can understand some properties of finite subgroups of Cremona groups.

Definition 1 ([2, Definition 2.1]). *A group G is called Jordan if there is a constant J such that any finite subgroup of the group G has a normal abelian subgroup of index at most J . The minimal such constant J is called the Jordan constant of the group G and is denoted by $J(G)$.*

J.-P. Serre proved in [4, Theorem 5.3] that the Cremona group $\text{Cr}_2(\mathbf{F})$ over the field \mathbf{F} of characteristic zero is Jordan. However, it is not true for algebraically closed field \mathbf{F} of characteristic $p > 0$, because the group $\text{Cr}_2(\mathbf{F})$ contains simple subgroup $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^n})$ whose order grows with n . In the article [3] Yu. Prokhorov and C. Shramov proved that the Cremona group of rank 2 over a finite field is Jordan. Moreover, they obtained some inequalities for Jordan constants and in the paper [5] the exact values of Jordan constant were found for all finite fields.

So in this talk we discuss the following theorem (see [3, Theorem 1.2] and [5, Theorem 2]):

Theorem 1. *The Jordan constant $J(\text{Cr}_2(\mathbb{F}_q))$ of the Cremona group $\text{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ is equal to*

$$J(\text{Cr}_2(\mathbb{F}_q)) = \begin{cases} 16\,482\,816, & \text{if } q = 8; \\ 60\,480, & \text{if } q = 4; \\ 720, & \text{if } q = 2. \end{cases}$$

Also we discuss the following interesting corollary from the proof of Theorem 1 about the automorphisms of cubic surfaces over \mathbb{F}_2 (see [5, Theorem 3]):

Theorem 2. *Let S be a smooth cubic surface in \mathbb{P}^3 over \mathbb{F}_2 . Then*

$$|\text{Aut}(S)| \leq 720.$$

If the equality holds then we have $\text{Aut}(S) \simeq S_6$. Moreover, the cubic surface with such automorphism group is unique up to isomorphism and passes through all 15 points on \mathbb{P}^3 over \mathbb{F}_2 .

Список литературы

- [1] I. V. Dolgachev, V. A. Iskovskikh, *Finite Subgroups of the Plane Cremona Group*, In: Y. Tschinkel, Y. Zarhin, (eds) *Algebra, Arithmetic, and Geometry. Progress in Mathematics*, **269** (2009), Birkhäuser Boston.
- [2] V. L. Popov, *On the Makar-Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties*, Affine algebraic geometry: the Russell Festschrift, CRM Proceedings and Lecture Notes, 54, Amer. Math. Soc. (2011), 289–311.
- [3] Yu. G. Prokhorov, C. A. Shramov, *Jordan property for Cremona group over a finite field*, arXiv:2209.03843 [math.AG].
- [4] J.-P. Serre, *A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank 2 over an arbitrary field*, Mosc. Math. J., **9** (2009), no.1, 183–198.
- [5] A. V. Vikulova, *Jordan constant for Cremona group of rank 2 over a finite field*, arXiv:2111.13367 [math.AG].

Образующие и соотношения декартовых подгрупп граф-произведений групп

Вылегжанин Ф. Е.^{1,2}

1. МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва

2. НИУ ВШЭ, Москва

Пусть $\underline{G} = (G_1, \dots, G_m)$ – набор дискретных групп, Γ – простой граф на множестве вершин $[m] = \{1, \dots, m\}$. Соответствующее *граф-произведение групп* определяется как

$$\underline{G}^\Gamma := (G_1 * \dots * G_m) / (g_i g_j = g_j g_i : g_i \in G_i, g_j \in G_j, i \neq j, \{i, j\} \in \Gamma).$$

Граф-произведения занимают промежуточное положение между декартовым произведением и свободным произведением групп G_1, \dots, G_m . Мы изучаем копредставления *декартовой подгруппы*

$$\text{Cart}(\underline{G}, \Gamma) := \text{Ker} \left(\underline{G}^\Gamma \rightarrow \prod_{i=1}^m G_i \right)$$

граф-произведения групп.

В случае $G_1 = \dots = G_m = \mathbb{Z}_2$ группа \underline{G}^Γ – это *прямоугольная группа Кокстера* RC_Γ , а $\text{Cart}(\underline{G}, \Gamma)$ – это её коммутант RC'_Γ . Последняя группа также возникает в торической топологии [1] как фундаментальная группа *вещественного момент-угол комплекса* $\mathcal{R}_\mathcal{K} = (D^1, S^0)^\mathcal{K}$, $\Gamma = \text{sk}_1 \mathcal{K}$.

Пусть \mathcal{K} – кликовый симплициальный комплекс графа Γ . Для каждого $J \subset [m]$ обозначим $n_J := \prod_{j \in J} (|G_j| - 1)$. Панов и Верёвкин [3] предъявили явный минимальный набор из N образующих для $\text{Cart}(\underline{G}, \Gamma)$, где

$$N := \sum_{J \subset [m]} n_J \cdot \dim \tilde{H}_0(\mathcal{K}_J).$$

Пусть $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$ – разложение топологического пространства X на компоненты связности; обозначим $\Pi_1(X) := *_\alpha \pi_1(X_\alpha)$.

Теорема. Пусть

$$M_- := \text{rank} \left(\bigoplus_{J \subset [m]} H_1(\mathcal{K}_J; \mathbb{Z})^{\oplus n_J} \right), \quad M_+ := \sum_{J \subset [m]} n_J \cdot \text{rank} \Pi_1(\mathcal{K}_J).$$

Тогда

- 1) Любое копредставление группы $\text{Cart}(\underline{G}, \Gamma)$ содержит хотя бы N образующих и хотя бы M_- соотношений.
- 2) Существует копредставление группы $\text{Cart}(\underline{G}, \Gamma)$, состоящее из N образующих и M_+ соотношений.

Из этой теоремы следуют известные критерии того, когда группа $\text{Cart}(\underline{G}, \Gamma)$ свободна [3], и того, когда RC'_Γ – группа с одним соотношением [2].

Автор благодарит своего научного руководителя Т. Е. Панова за постановку задачи и ценные комментарии.

Список литературы

- [1] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. Toric Topology. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 204, AMS, Providence, RI (2015).
- [2] Jelena Grbić, Marina Ilyasova, Taras Panov and George Simmons. One-relator groups and algebras related to polyhedral products. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics 152, no.1, 128-47 (2022).
- [3] Taras Panov and Yakov Veryovkin. On the commutator subgroup of a right-angled Artin group. J. Algebra 521, 284-298 (2019).

On Jacobian group and complexity of the delta-graph

Yudin I.N.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

Let G be a finite connected graph. The notion of the complexity for a graph arises in different ways. For example, it can vary from simple parameters like the number of edges or vertices to the number of spanning trees or rooted spanning forests of a graph. All the above mentioned invariants can be found as a function of eigenvalues of the Laplacian operator of the graph. So, they are spectral invariants.

The complexity of a graph plays an important role in statistic physics, where the graphs with arbitrary large number of vertices are considered [1]. Jacobian group admits a natural interpretation in various areas of physics, coding theory, and financial mathematics.

We mention that the number of spanning trees and the number of spanning rooted forests for circulant graphs are expressed in terms of the Chebyshev polynomials [2]. In the present paper we consider expansion of the cycle graph on 3 vertices, so called Δ -graph. We find the number of spanning trees and rooted spanning forests and investigate the structure of Jacobian.

Theorem 1. The number of spanning trees $\tau(n)$ in the graph $\Delta(n; k, l, m)$ is given by the formula

$$\tau(n) = \frac{n}{k^2 + l^2 + m^2} \prod_{p=1}^{s-1} |2T_n(w_p) - 2|,$$

where $s = k + l + m$, и $w_p, p = 1, 2, \dots, s - 1$ are all the roots different from 1 of the order s algebraic equation

$$Q(w) = -2 - A(w) - B(w) - C(w) + A(w)B(w)C(w) = 0.$$

Here $A(w) = 4 - 2T_k(w), B(w) = 4 - 2T_l(w), C(w) = 4 - 2T_m(w)$ and $T_j(w)$ is the order j Chebyshev polynomial of the first kind.

Theorem 2. The number of rooted spanning forests in a Δ -graph $\Delta(n; k, l, m)$ is given by the formula

$$f(n) = \prod_{p=1}^s |2T_n(w_p) - 2|,$$

where $w_p, p = 1, 2, \dots, s$ are all the roots of the algebraic equation $\tilde{Q}(w) = 0$ and

$$\tilde{Q}(w) = \det \begin{pmatrix} K & -1 & -1 \\ -1 & L & -1 \\ -1 & -1 & M \end{pmatrix},$$

Here $K(w) = 5 - 2T_k(w), L(w) = 5 - 2T_l(w), M(w) = 5 - 2T_m(w)$ и $T_j(w)$ is an order j Chebyshev polynomial of the first kind.

Список литературы

- [1] F. Y. Wu, Number of spanning trees on a lattice, J. Phys. A: Math. Gen. 10, (1977), L113–115.
- [2] Zhang Yuanping, Yong Xuerong, M.J. Golin, The number of spanning trees in circulant graphs, Discrete. Math., 223 (2000), no.1, 337–350.

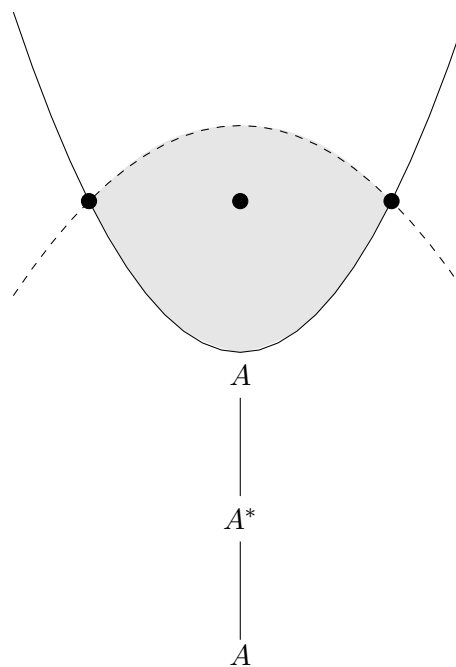
Слоение Лиувилля интегрируемого бильярда с гравитационным потенциалом в некомпактной области, ограниченной софокусными параболой

Зайцева Анастасия Владимировна

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова

Рассмотрим бильярд в плоской области, ограниченной софокусными параболой. Такой бильярд является интегрируемым – вдоль траекторий сохраняется параметр некоторой параболы, которой касается данная траектория. В книге “Бильярды. Генетическое введение в динамику систем с ударами” В.В. Козловым и Д.А.Трещевым было показано, что добавление гравитационного потенциала в данной задаче (сила тяжести направлена перпендикулярно директриссам семейства софокусных парабол, образующих границу бильярдной области) сохраняет интегрируемость системы.

К такой системе применим подход теории Фоменко–Цишанга об инвариантах невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем. Были рассмотрены 2 области - ограниченной одной параболой и двумя параболой.



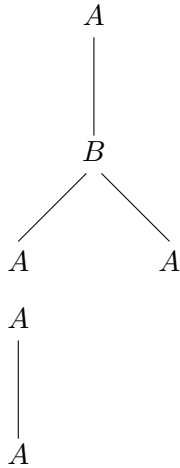


Рис. 1.

В отличие от случая без потенциала слоение Лиувилля так определенной бильярдной системы зависит от знания интеграла энергии. При малых значениях энергии - критическое значение, отвечающее вертикальному движению, является устойчивым. Тогда как при больших значениях энергии - неустойчивым. Поэтому для каждого бильярда возникает два возможных варианта слоения изоэнергетической поверхности.

Для бильярдных с гравитационным потенциалом, ограниченным одной и двумя параболой, инварианты Фоменко–Цишанга, соответствующие слоениям Лиувилля невырожденной изоэнергетической поверхности имеют вид, представленный на рис.2

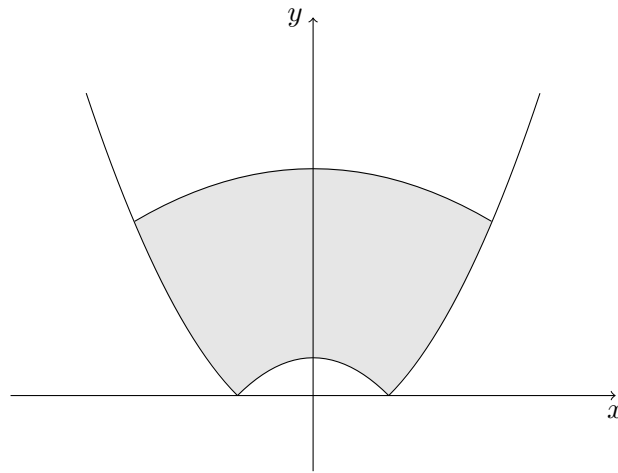


Рис. 2.

Список литературы

- [1] 1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I. — Ижевск: РХД, 1999
2. Козлов В.В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде. //Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1 1995
3. Харламов М.П. Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приближения к классическим системам //Нелинейная динамика, 2010, том 6, №4, с. 769—805.
4. Фокичева В.В. Топологическая классификация бильярдных в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176
5. Кобцев И.Ф. Эллиптический бильярд в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ Матем. сб., 211:7 (2020), 93-120

Биллиард с проскальзыванием на трехмерном столе без фокальных кривых

Завьялов В.Н.

МГУ им. М.В. Ломоносова

В работе [2] А.Т.Фоменко был введен новый класс биллиардов с проскальзыванием. Рассмотрим F — изометрию границы плоского эллипса, переводящую точку x в диаметрально противоположную ей точку y . Пусть материальная точка движется равномерно и прямолинейно внутри эллипса и попадает на границу. Продолжим ее траекторию из точки $y = F(x)$ по лучу, выходящему из нее под углом α . Иными словами, ее продолжение выходит из новой точки под тем же углом, “проскальзывая” вдоль границы. На основании этого такой класс систем был назван “биллиардами с проскальзыванием”.

Данная система обладает тем же первым интегралом — параметром софокусной квадррики. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве компактную область, ограниченную конечным числом софокусных квадрик и имеющую двугранные углы излома на границе, равные $\frac{\pi}{2}$. Такую область назовем трехмерным биллиардным столом.

Классический биллиард внутри трехмерного биллиардного стола является интегрируемой гамильтоновой системой в кусочно–гладком смысле. Эта система обладает тремя независимыми попарно коммутирующими (относительно стандартной скобки Пуассона) первыми интегралами H, Λ_1, Λ_2 , где Λ_1, Λ_2 — параметры квадрик, которых одновременно касаются все прямые траектории материальной точки. Г.В. Белозеров в работе [1] классифицировал все такие биллиарды по отношению слабой эквивалентности.

Рассмотрим связный биллиардный стол, симметричный относительно координатных плоскостей. Выберем несколько пар противоположных граней его границы и зададим на них проскальзывание, то есть при попадании на грань с проскальзыванием материальная точка, находившаяся в точке x с вектором скорости v_1 , выйдет из точки $-x$ с вектором скорости v_2 , где v_2 получается из v_1 путем отражения v_1 от касательной плоскости к данной грани в точке x , а затем заменой на противоположный. Полученную систему назовем трехмерным биллиардом с проскальзыванием.

Трехмерный биллиард с проскальзыванием тоже является интегрируемой гамильтоновой системой в кусочно–гладком смысле с теми же первыми интегралами, что и классический биллиард.

Рассмотрим связный односвязный трехмерный биллиардный стол, симметричный относительно координатных плоскостей и ограниченный софокусными эллипсоидом, однополостным и двуполостным гиперболоидами. Обозначим его через D . Граница этого стола состоит из 3-х пар симметричных гладких граней. А следовательно, на этом столе можно задать 7 комбинаций проскальзывания. Для каждой комбинации нами построена бифуркационная диаграмма, найдены классы гомеоморфности слоев слоения Лиувилля, описаны 1-перестройки торов Лиувилля. Также нами доказана теорема классификации изоэнергетических поверхностей.

Теорема 1. *Изоэнергетическая поверхность биллиарда с проскальзыванием на трехмерном столе D гомеоморфна $\frac{\mathbb{T}^i \times S^{5-i}}{(\mathbb{Z}_2)^i}$, где i — количество пар граней с проскальзыванием.*

Исследование выполнено при поддержке гранта РФФ (проект №22-71-00111) в МГУ имени М.В. Ломоносова.

Список литературы

- [1] Г.В. Белозеров, Топологическая классификация бильярдов в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадрами // Матем. сб., **213**:2, 2022, 3–36.
- [2] Fomenko A. T., Vedyushkina V. V., Zav'yalov V. N., Liouville Foliations of Topological Billiards with Slipping // Russ. Jour. of Math. Phys., **28**, 2021, 37–55.

Релейная модель замирающего нейрона

Зеленова В.К.

Центр интегрируемых систем, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, Ярославль

В качестве модели одного нейрона рассматривается уравнение

$$\dot{R} = \lambda \left[\mathcal{F}(R(t-h)) + \mathcal{H}(X_*(t)) \right] R(t), \quad (1)$$

предложенное в статье [1]. Здесь $R(t)$ — нормированный мембранный потенциал, λ — скорость электрических процессов в нервной клетке, \mathcal{F} — пороговая функция, характеризующая внутреннее поведение нейрона

$$\mathcal{F}(u) = \begin{cases} 1, & 0 < u \leq 1, \\ -\alpha, & u > 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(u) = \begin{cases} -\eta, & 0 < u \leq \theta, \\ \xi, & u > \theta, \end{cases}$$

$X_*(t) = e^{\lambda x_*(t)}$, $x_*(t)$ — периодическая функция с периодом T_*

$$x_*(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ > 0, & 0 < t < t_*, \\ 0, & t = t_*, \\ < 0, & t_* < t < T_*, \end{cases}$$

$\eta, \xi, \alpha, \theta$ — положительные параметры, $h > 0$ — запаздывание, $\lambda \gg 1$.

Уравнение (1) — это модификация уравнения

$$\dot{u} = \lambda \mathcal{F}(u(t-h))u, \quad (2)$$

предложенного в статье [2]. Данное уравнение лежит в основе ряда рассматриваемых феноменологических нейромоделей.

В уравнении (1) сделаем экспоненциальную подстановку $R(t) = e^{\lambda r(t)}$. Получим релейное уравнение:

$$\dot{r} = F(r(t-h)) + H(x_*(t)), \quad (3)$$

$$F(x) = \mathcal{F}(e^{\lambda x}) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ -\alpha, & x > 0, \end{cases}$$

$$H(x) = \mathcal{H}(e^{\lambda x}) = \begin{cases} -\eta, & x \leq 0, \\ \xi, & x > 0. \end{cases}$$

В настоящей работе получено обобщение результатов работы [1] и найдена более широкая область существования параметров. Доказано существование области параметров с плавным переходом от высоких всплесков к малым колебаниям.

Для уравнения (1) доказано существование режимов специального вида: решений, обладающих любым наперед заданным количеством одинакового высоких всплесков, после которых происходит постепенное затухание всплесков и устанавливаются колебания с малой амплитудой.

Это эквивалентно существованию у уравнения (3) периодического решения с положительными и отрицательными значениями на периоде до некоторой точки, после чего значение функции убывает и с некоторого момента устанавливается периодическое решение с только отрицательными значениями.

Список литературы

- [1] Preobrazhenskaia, M.M. (2023). Relay System of Differential Equations with Delay as a Perceptron Model. In: Kryzhanovsky, B., Dunin-Barkowski, W., Redko, V., Tiumentsev, Y. (eds) *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research VI. NEUROINFORMATICS 2022. Studies in Computational Intelligence*, vol 1064. Springer, Cham.
- [2] А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, "Об одной модификации уравнения Хатчинсона Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 50:12 (2010), 2099–2112; *Comput. Math. Math. Phys.*, 50:12 (2010), 1990–2002

The characteristic Lie ring of the evolutionary equation

$$u_y = u_x + f(u).$$

Zotova E.I.

UUST, Ufa, Russia

For the evolutionary equation

$$u_y = u_x + f(u)$$

the dimension of the characteristic ring [1, 2, 3, 4, 5] is equal to three when

$$f = \frac{c_3}{c_2} + c_4 e^{c_2 u},$$

where $c_2 \neq 0$, $c_4 \neq 0$, c_3 – arbitrary constants.

Note that the characteristic ring is finite-dimensional. The operators of the equation are defined as

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_2 &= (u_{xx} + c_2 c_4 e^{c_2 u} u_x) \frac{\partial}{\partial u_x} + (u_{xxx} + c_2^2 c_4 e^{c_2 u} u_x^2 + c_2 c_4 e^{c_2 u} u_{xx}) \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \dots, \\ X_3 &= c_2^2 c_4 e^{c_2 u} u_x \frac{\partial}{\partial u_x} + (c_2^3 c_4 e^{c_2 u} u_x^2 + c_2^2 c_4 e^{c_2 u} u_{xx}) \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \dots, \\ X_4 &= c_2 X_3, \\ X_5 &= -c_2 u_x X_3. \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Zhiber A.V., Murtazina R.D., Habibullin I.T., Shabat A.B. Characteristic Lie rings and nonlinear integrable equations // Izhevsk: Institute for Computer Research. 2012.
- [2] Zhiber A.V., Murtazina R.D., Habibullin I.T., Shabat A.B. Characteristic Lie rings and integrable models of mathematical physics // Ufa Mathematical Journal. UFA: Institute of Mathematics with Computing Centre. V.4, №3. 2012. P. 17–85.
- [3] Zhiber A.V., Murtazina R.D. Characteristic Lie rings for the equation $u_{xy} = f(u, u_x)$ // Fundamental and applied mathematics. Hamiltonian and Lagrangian systems. Lie algebras. V. 12, №7. 2006. P. 65–78.
- [4] Murtazina R.D. Nonlinear hyperbolic equations with a characteristic ring of dimension 3 // Ufa Mathematical Journal. UFA: Institute of Mathematics with Computing Centre. V. 3, №4. 2011. P. 116–121.
- [5] Zotova E.I., Shaihiyev E.R., Maksimov M.I. The characteristic Lie ring of the equation $u_y = u_x + f(u)$ // Mavlyutov readings: materials of the XVI All-Russian Youth Scientific Conference. Ufa, 2022. V.5. P. 1203–1213.