О полярных потоках с двумя седловыми состояниями равновесия и гетероклинических пересечениях на сфере

Д. О. Фомин[1]

[1] *НИУ ВШЭ Нижний Новгород*

Напомним, что гладкий поток $f^t\colon M^n \to M^n$, заданный на замкнутом гладком M^n многообразии размерности n, называется *полярным потоком*, если:

1. его неблуждающее множество Ω_{f^t} состоит из конечного числа состояний равновесия, все они гиперболические, при этом множество стоковых (источниковых) состояний равновесия состоит из единственной точки;

2. инвариантные многообразия седловых состояний равновесия пересекаются трансверсально.

Индексом Морса гиперболического состояния равновесия p называется число i_p, равное размерности его неустойчивого многообразия W^u_p. Пусть f^t — полярный поток на сфере S^n размерности $n \geq 3$. В силу формулы Пуанкаре-Хопфа (см., например [1, § 6])

$$\sum_{p\in\Omega_{f^t}} (-1)^{i_p} = \chi(S^n) = \begin{cases} 2, n = 2k; \\ 0, n = 2k+1. \end{cases}$$

Отсюда непосредственно следует, что число седловых состояний равновесия потока f^t чётно и число сёдел с чётным индексом Морса равно числу сёдел с нечётным индексом Морса.

Легко построить примеры полярных потоков на сфере S^n, имеющих ровно два седловых состояний равновесия p, q индексов $i, i+1$, $i \in \{1, \dots, n-2\}$. Если $n \in \{2, 3, 4\}$, то модуль разности индексов точек p, q равен единице.

В докладе доказываются следующие результаты.

Теорема 1 *Пусть* f^t *— полярный поток на сфере* S^n *размерности* $n \geqslant 5$*, множество седловых состояний равновесия которого состоит из двух точек* p, q*. Тогда* $1 \leqslant |i_p - i_q| \leqslant n - 3$*.*

Теорема 2 *Пусть* f^t *— полярный поток на сфере* S^n*,* $n \geq 3$*. Для любого седлового состояния равновесия* σ *потока* f^t *хотя бы одно из его инвариантных многообразий пересекается с инвариантым многообразием седлового состояния равновесия, отличного от* σ*.*

Благодарности. Работа выполнена в рамках проекта № 23-00-028 «Динамические системы с многомерным фазовым пространством: от регулярной динамики к хаосу» конкурса научно-учебных групп НИУ ВШЭ 2023 г.

Список литературы

[1] Дж. Милнор, А. Уоллес. Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972. - 279 с.