Диаграма Кирби полярных потоков на четырёхмерных многообразиях

Е. Я. Гуревич, И. А. Сараев

1 ноября 2023 г.

Пусть M^n — связное замкнутое гладкое ориентируемое многообразие размерности $n \geq 1$. Поток $f^t : M^n \to M^n$ называется *гладким*, если при каждом $t \in \mathbb{R}$ отображение f^t – диффеоморфизмом.

Гладкий поток f^t на M^n называется градиентно-подобным, если его неблуждающее множество Ω_{f^t} состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия, и инвариантные многообразия состояний равновесия пересекаются трансверсально.

Топологическая классификация градиентно-подобных потоков

Случай $n = 1$

Майер А. Г. "Грубое преобразование окружности в окружность", *Учён. зап. ГГУ*, 1939, №12, 215-229.

Топологическая классификация градиентно-подобных потоков

Случаи $n = 2, 3$

1. Е. А. Леонтович, А. Г. Майер "О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории", *Докл. АН СССР*, Т. 14, № 5 (1937), 251-257;

Топологическая классификация градиентно-подобных потоков

Случаи $n = 2, 3$

1. Е. А. Леонтович, А. Г. Майер "О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории", *Докл. АН СССР*, Т. 14, № 5 (1937), 251-257;
2. M. Peixoto "On the classification of flows on two-manifolds", *Dynamical systems Proc. Symp. held at the Univ.of Bahia, Salvador, Brasil*, 1973, 389-419;

Топологическая классификация градиентно-подобных потоков

Случаи $n = 2, 3$

1. Е. А. Леонтович, А. Г. Майер "О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории", *Докл. АН СССР*, Т. 14, № 5 (1937), 251-257;
2. M. Peixoto "On the classification of flows on two-manifolds", *Dynamical systems Proc. Symp. held at the Univ.of Bahia, Salvador, Brasil*, 1973, 389-419;
3. G. Fleitas "Classification of gradient-like flows in dimension two and three", *Bol. Soc. Mat. Brasil*, T. 6 (1975), 155-183;
4. Я. Л. Уманский "Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса-Смейла с конечным числом особых траекторий", *Мат. сб.*, Т. 181, № 2 (1990), 212-239.

Топологическая классификация градиентно-подобных потоков

Случай $n > 3$ в предположении, что все седла имеют тип $(1, n-1)$ или $(n-1, 1)$

1. С. Ю. Пилюгин "Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса-Смейла без периодических траекторий на сферах", *Дифференциальные уравнения*, Т. 14, № 2 (1978);
2. В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич "Комбинаторный инвариант градиентно-подобных потоков на связной сумме $S^{n-1} \times S^1$", *Математический сборник*, Т. 214, №5 (2023), 97-127.

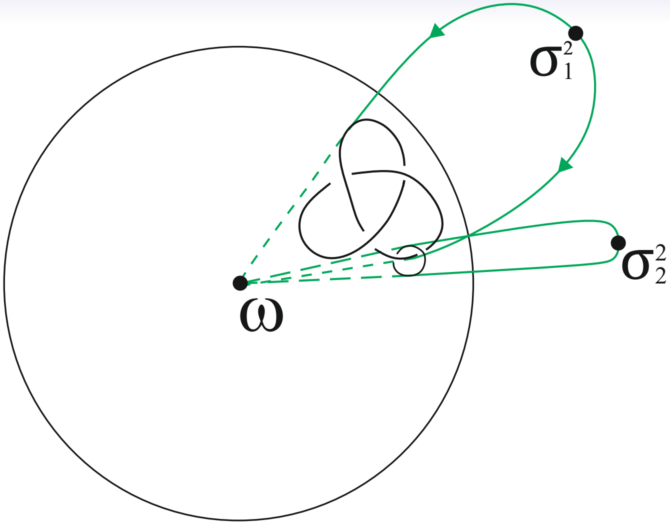

Рис.: Построение градиентно-подобного потока с дико-вложенной сепаратрисой коразмерности 2

Топологическая классификация градиентно-подобных потоков

Случай $n > 3$ в предположении, что есть сёдла типа, отличного от $(1, n-1)$ и $(n-1, 1)$

Е. В. Жужома, В. С. Медведев "Непрерывные потоки Морса-Смейла с тремя состояниями равновесия", *Математический сборник*, Т. 207, №5 (2016), 69-92.

Функция Морса, связанная с градиентно-подобным потоком

Утверждение 1.

Для любого градиентно-подобного потока f^t существует энергетическая функция $\varphi : M^n \to [0, n]$ — функция Морса, обладающая следующими свойствами:

1. φ строго убывает вдоль незамкнутых траекторий потока f^t;

Функция Морса, связанная с градиентно-подобным потоком

Утверждение 1.

Для любого градиентно-подобного потока f^t существует энергетическая функция $\varphi : M^n \to [0, n]$ — функция Морса, обладающая следующими свойствами:

1. φ строго убывает вдоль незамкнутых траекторий потока f^t;
2. множество критических точек функции φ совпадает с множеством Ω_{f^t};

Функция Морса, связанная с градиентно-подобным потоком

Утверждение 1.

Для любого градиентно-подобного потока f^t существует энергетическая функция $\varphi : M^n \to [0, n]$ — функция Морса, обладающая следующими свойствами:

1. φ строго убывает вдоль незамкнутых траекторий потока f^t;
2. множество критических точек функции φ совпадает с множеством Ω_{f^t};
3. $\varphi(p) = \dim W^u_p$ для любого $p \in \Omega_{f^t}$;

Функция Морса, связанная с градиентно-подобным потоком

Утверждение 1.

Для любого градиентно-подобного потока f^t существует энергетическая функция $\varphi : M^n \to [0, n]$ — функция Морса, обладающая следующими свойствами:

1. φ строго убывает вдоль незамкнутых траекторий потока f^t;
2. множество критических точек функции φ совпадает с множеством Ω_{f^t};
3. $\varphi(p) = \dim W^u_p$ для любого $p \in \Omega_{f^t}$;
4. для любого некритического значения $c \in (0, n)$ функции φ поверхность уровня $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$ является гладким подмногообразием M^n, трансверсальным к траекториям потока f^t.

Функция Морса, связанная с градиентно-подобным потоком

S. Smale, ”On gradient dynamical systems”, *Annals of mathematics*, V. 74 (1961), 199-206.

K. R. Meyer, ”Energy functions for Morse-Smale systems”, *Amer. J. Math.*, V. 90 (1968), 1031-1040.

Полярные потоки

Градиентно-подобный поток называется полярным, если множество его состояний равновесия состоит в точности из одного источникового, одного стокового и произвольного числа седловых состояний равновесия.
Пусть f^t – полярный поток, $\varphi : M^n \to [0, n]$ – его самоиндексирующаяся энергетическая функция. Она задает разбиение M^n на ручки.

Топологическая классификация полярных потоков

1. Если сёдел нет, то $M^n \cong \mathbb{S}^n$ и все такие потоки эквивалентны;
2. если седло одно, то $n \in \{2, 4, 8, 16\}$, и это седло имеет тип $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$
   - 2.1 при $n = 2$ $M^2 \cong \mathbb{R}P^2$ и все такие потоки эквивалентны;
   - 2.2 при $n = 4$ существует функция Морса с тремя критическими точками на $\mathbb{C}P^2$, градиентный поток которой является градиентно-подобным потоком с тремя состояниями равновесия, а класс таких потоков всего один;
   - 2.3 при $n = 8\,(16)$ существует $6\,(60)$ различных гомотопических типов многообразий, несущих такие потоки.

J. Eels, N. Kuiper "Manifolds which are like projective planes", *Institut des Haute studes Scientifiques Publications Mathematiques*, V. 14 (1962), 5-46:

В работе рассматривается класс $P(M^4)$ полярных потоков на связных замкнутых четырехмерных многообразиях при условии, что для любого $f^t \in P(M^4)$ все сёдла имеют тип $(2,2)$. Легко показать, что M^4 односвязно.
Для $f^t \in P(M^4)$ опять же полагаем $\varphi : M^4 \to [0,4]$ — самоиндексирующаяся энергетическая функция.

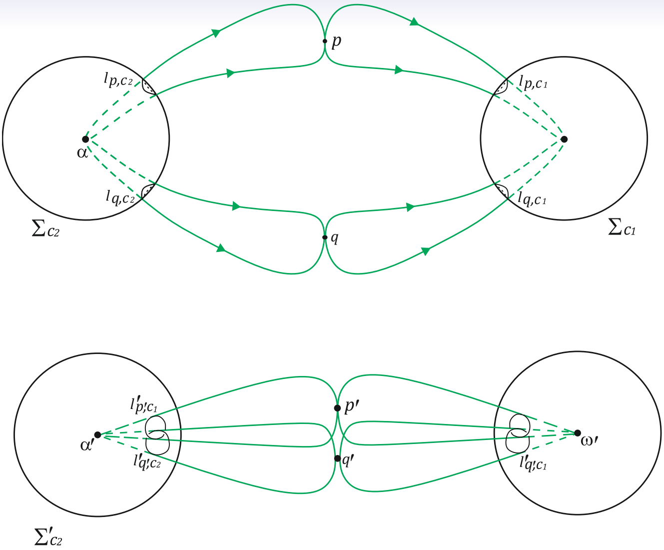

Рис.: Фазовые портреты неэквивалентных потоков

Необходимое условие эквивалентности потоков класса $P(M^4)$

Предложение 1.

Пусть потоки f^t, $f'^t \in P(M^4)$ топологически эквивалентны. Тогда существует гомеоморфизм $h : \Sigma_{c_1} \to \Sigma'_{c_1}$ такой, что $h(L_{c_1}) = L'_{c_1}$.

Диаграмма Кирби потоков класса $P(M^4)$

Совокупность $\{l_{p,c_1}, \tilde{l}_{p,c_1}\}_{p\in\Omega^2_{f^t}}$ на сфере Σ_{c_1} будем называть *диаграммой Кирби* потока f^t.

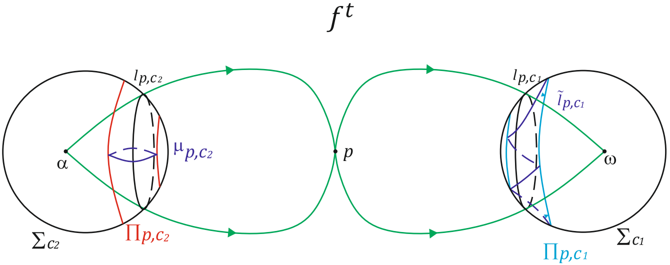

Рис.: Диаграмма Кирби потока $f^t \in P(M^4)$.

Полный инвариант потоков класса $P(M^4)$

Теорема 1.
Потоки f^t, $f'^t \in P(M^4)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм $h : \Sigma_{c_1} \to \Sigma'_{c_1}$ такой, что:

1. $h(L_{c_1}) = L'_{c_1}$;
2. $h(\tilde{l}_{p,c_1}) = \tilde{l}'_{p',c_1}$ для каждой пары узлов $l_{p,c_1} \subset L_{c_1}$, $l'_{p',c_1} = h(l_{p,c_1}) \subset L'_{c_1}$.

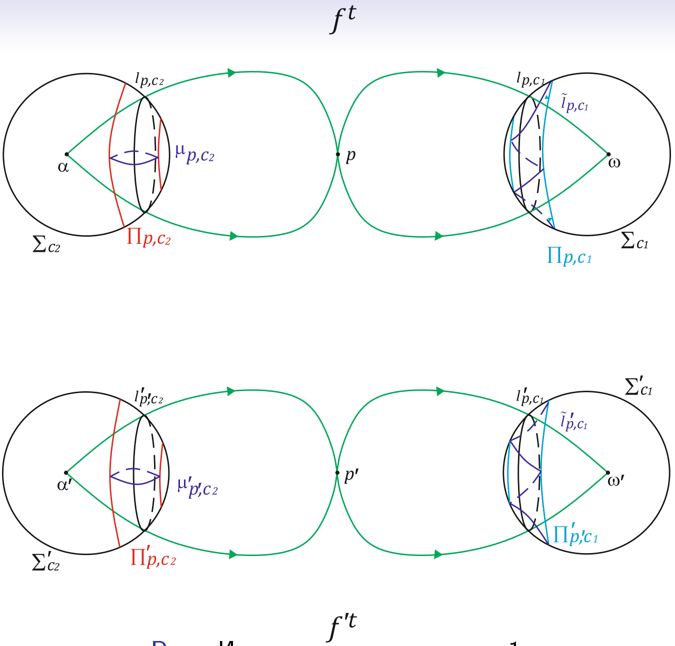

Рис.: Иллюстрация к теореме 1

Вывод

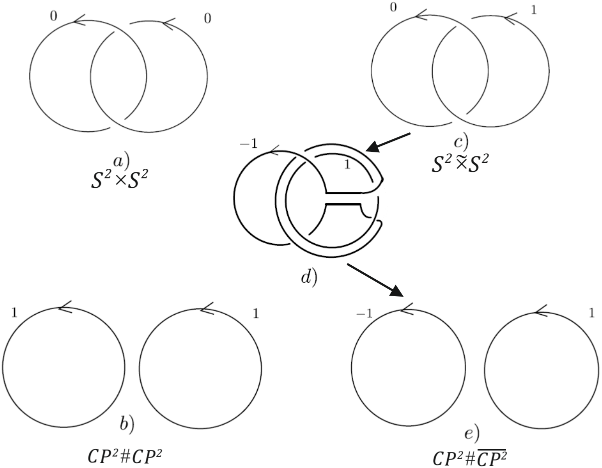

Рис.: Оснащённые зацепления, представляющие разные классы эквивалентности полярных потоков