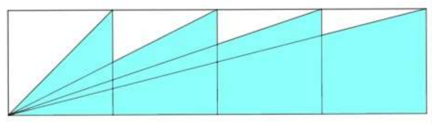
Нижегородская (XX Открытая, II Цифровая) городская математическая олимпиада школьников
НИУ Высшая Школа Экономики – Нижний Новгород, 26 ноября 2023 года

11 класс

1. Натуральное число из различных ненулевых цифр назовём *уникальным*, если его можно представить в виде разности двух чисел, каждое из которых получается перестановкой цифр самого уникального числа, причём в уменьшаемом цифры стоят в убывающем порядке, а в вычитаемом – в возрастающем. Докажите, что существует одно трёхзначное уникальное число.

2. В бесконечном направо ряду стоят единичные кубики, приставленные друг к другу гранями (см. вид сбоку на начало ряда на рисунке). Соединяют нижнее левое ребро первого кубика с правыми верхними рёбрами всех кубиков, проводя плоскости. Объём, находящийся снизу от проведённых плоскостей, закрасили. Конечным или бесконечным является незакрашенный объём кубиков?



3. Целые числа a, b, c – длины сторон некоторого треугольника. При каком наименьшем периметре треугольника квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет 2 различных действительных корня?

4. Сколько существует таких троек чисел x, y, z, принадлежащих интервалу $(0; \frac{\pi}{2})$, что

$$2\cdot(\sin x\cdot\cos y + \sin y\cdot\cos z + \sin z\cdot\cos x) = 3?$$

5. При каких натуральных n в клетках таблицы $n\times(n+1)$ можно расставить по одному все целые числа от 1 до $n(n+1)$ так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце среднее арифметическое всех чисел ряда также оказалось в этом ряду?

6. В остроугольном треугольнике ABC ($AB > AC$) провели биссектрису AD, отметили её середину M и центр вписанной окружности I. Окружности, описанные около треугольников BMC и BIC, пересекают луч AI повторно в точках K и J соответственно. Докажите, что $ID = KJ$.