Нижегородская (XX открытая) городская математическая олимпиада школьников
НИУ Высшая Школа Экономики – Нижний Новгород, 26 ноября 2023 года

УСЛОВИЯ И ИДЕИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

Вариант олимпиады подготовлен Дмитрием Юрьевичем Кузнецовым, руководителем Школы информационных технологий и математики.

8 класс

1. Разрешается стереть в ряду цифр 123456789 несколько цифр (возможно одну) и расставить между оставшимися цифрами несколько плюсов (возможно один) так, чтобы полученное числовое выражение равнялось 2024. Покажите, как это сделать.

Примеры: 1345+679=2024 (стёрли 2 и 8) или 1235+789=2024 (стёрли 4 и 6).

2. Докажите, что существует не более восьми простых 2023-значных чисел, у которых первые 2022 цифры равны между собой.

Доказательство: Последняя цифра не может быть чётной и 5 в силу признаков делимости на 2 и 5, а наше число заведомо их больше. Цифры 3 и 9 не могут быть в конце в силу признака делимости на 3, т.к. сумма 2022=3·674 одинаковых цифр кратна 3. 7 не может быть последней цифрой, т.к. иначе число разделится на 7 – первый кусок из 2022=6·337 одинаковых цифр делится на репьюнит длины 6, который кратен 7 (111111=7·15873). Значит, последней цифрой требуемого простого числа может быть только 1, но при этом репьюнит (число только из единиц) длины 2023 не является простым числом, т.к. делится на репьюниты длины 7 и 17 ($2023=7\cdot17^2$) Тогда требуемых чисел не более 8 – максимум по одному для каждой из 9 ненулевых цифр, стоящей на первых 2022-х местах и отличной от 1, при этом последняя цифра равна 1.

3. Про положительные числа *a, b, c* и *d* известно, что $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{d}=\frac{c+d}{a}=\frac{d+a}{b}$**.**
Докажите, что сумма каких-то двух из них равна сумме двух других.

2.1. Свойство ряда равных отношений. Если имеем ряд равных отношений

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=k,$$

то $a_i=kb_i$ $(i=1,\,2,\,\ldots,\,n)$. Пусть $t_1,\,t_2,\,\ldots,\,t_n$ — любые действительные числа, при которых $t_1b_1+t_2b_2+\ldots+t_nb_n\neq 0$. Тогда $t_1a_1=t_1kb_1$, $t_2a_2=t_2kb_2,\,\ldots,\,t_na_n=t_nkb_n$. Сложив эти равенства, получим: t_1a_1+ $+t_2a_2+\ldots+t_na_n=k(t_1b_1+t_2b_2+\ldots+t_nb_n)$, откуда

$$\frac{t_1a_1+t_2a_2+\ldots+t_na_n}{t_1b_1+t_2b_2+\ldots+t_nb_n}=k=\frac{a_i}{b_i},\quad \text{где } i=1,\,2,\,\ldots,\,n. \qquad (2.1)$$

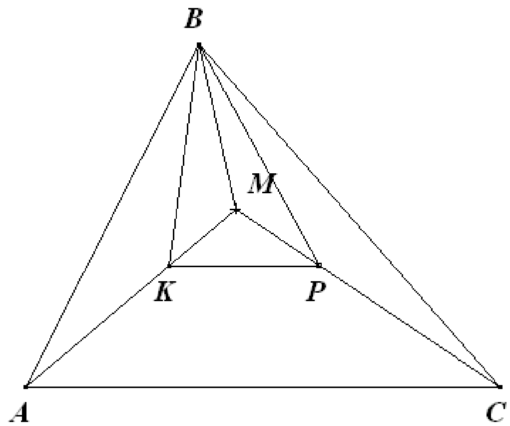
Комментарий: *Очередная задача Нижегородской (открытой) городской олимпиады на проверку у участников олимпиады знаний о НАИВАЖНЕЙШЕМ свойстве ряда равных отношений. И вопрос – начали его изучать в школах?*

Доказательство: По свойству ряда равных отношений, применённого сложением числителей и знаменателей для всех четырёх дробей и для первой с третьей дробями получим, что $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{d}=\frac{c+d}{a}=\frac{d+a}{b}=\frac{(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)}{a+b+c+d}=2=\frac{(a+b)+(c+d)}{c+a}$, откуда $a+b+c+d=2(c+a) \Leftrightarrow b+d=a+c$, что и требовалось доказать.

4. В классе учатся 25 человек, причём есть и мальчики, и девочки. Каждый мальчик сказал: «У меня подруг на одну больше, чем друзей-мальчиков». Каждая девочка сказала: «У меня друзей-мальчиков на одного больше, чем подруг». Докажите, что чья-то дружба не взаимна. (*задача предложена Кузнецовым Арсением Дмитриевичем*)

Решение: Предположим, что все дружбы взаимны. Нарисуем граф (схему), в которой мальчики и девочки – это вершины (точки на плоскости), а дружбы – рёбра (линии, соединяющие соответствующие точки). Из условия следует, что степень каждой вершины нечётна (степенью вершины называется общее количество выходящих из неё рёбер). Но тогда вершин не может быть нечётное количество, так как сумма степеней всех вершин – это удвоенное количество рёбер. Однако, учеников в классе 25 – противоречие. Следовательно, чья-то дружба не взаимна, что и требовалось доказать.

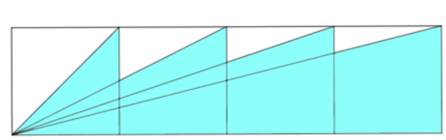
5. В треугольнике *ABC* отмечены точки *K* и *P* так, что $\angle ABK=\angle CBP<\angle ABC/2$, $\angle BAK=\angle BCP$ и отрезок *KP* параллелен *AC*. Докажите, что треугольник *ABC* – равнобедренный.



Комментарий: *По формулировке откровенно напрашивается применить метод «параллельных палочек» и ... он срабатывает – продлим отрезки AK и CP до пересечения.*

Доказательство: Из равенства углов $\angle ABK=\angle CBP$, $\angle BAK=\angle BCP$ следует, что треугольники AKB и CPB подобны, т.е. $\frac{AK}{CP}=\frac{KB}{PB}$, а из параллельности KP и AC следует, что $\frac{AK}{CP}=\frac{KM}{PM}$, где M – точка пересечения продолжений боковых сторон AK и CP трапеции $AKPC$ за точки K и P. Тогда $\frac{KB}{PB}=\frac{KM}{PM} \Leftrightarrow \frac{KB}{KM}=\frac{PB}{PM}$. Кроме того, $\angle BKM=180°-\angle AKB=180°-\angle CPB=\angle BPM$, тогда с учётом равенства $\frac{KB}{KM}=\frac{PB}{PM}$ получаем, что треугольники BKM и BPM – подобны, но у них общая соответствующая сторона BM, значит, они равны. Следовательно, $MK=MP$, $AK=CP$ и треугольник MAC – равнобедренный, откуда $\angle BAC=\angle BAK+\angle KAC=\angle BCP+\angle PCA=\angle BCA$, значит, треугольник ABC – равнобедренный, что и требовалось доказать.

6. В бесконечном направо ряду стоят единичные квадраты, приставленные друг к другу по стороне (см. начало ряда на рисунке). Соединяют нижнюю левую верши-



ну первого квадрата с правыми верхними вершинами всех квадратов. Площадь, находящуюся снизу от проведённых диагоналей, закрасили. Конечной или бесконечной является незакрашенная площадь квадратов? (*задача предложена Тихоновым Глебом, учащимся 10-го класса, г.Уфа*)

Ответ: бесконечна. ***Решение:*** Площадь первого незакрашенного треугольника - 1/2, как половина площади квадрата. По теореме Фалеса понимаем, что длина отрезка на правой стороне первого квадрата (левой стороне второго квадрата) равна половине длины стороны квадрата. Аналогичным образом все остальные отрезки будут в 3, 4 и т.д. раза короче стороны квадрата, значит, вся площадь незакрашенной части будет равна 1/2·1·(1+1/2+1/3+1/4+…), где в скобках получаем гармонический ряд, который, как известно, даёт бесконечную сумму. Это доказывается разбиением на куски по степеням двойки, когда каждый кусок оценивается снизу числом 1/2. Действительно, имеем бесконечный набор сумм $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2},\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{16}>8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2},...$. Значит, вся сумма гармонического ряда будет больше суммы бесконечного ряда из чисел 1/2, что даст нам бесконечность.

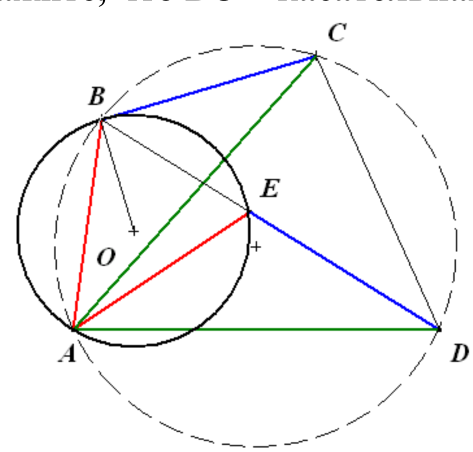
9 класс

1. Во время выпускного экзамена в 2024 году 9-класснику было предложено найти сумму всех целых чисел от 1 до 24, разрешив пользоваться калькулятором. Итоговый целочисленный результат на калькуляторе оказался отличен от верного на 1 процент. Какой результат мог быть на калькуляторе?

Ответ: 297 или 303. ***Решение:*** Сумма всех целых чисел от 1 до 24 равна (1+24)·24/2=300, при этом число 300 не могло отличаться от итогового целочисленного результата школьника на 1 процент, т.к. тогда итоговый результат был бы равен 300:0,99 или 300:1,01, что не является целыми числами. Значит, именно итоговый результат отличается на 1 процент от числа 300, т.е. на 3, и равен 297 или 303.

Комментарий: *Автор задачи надеется, что многие понимают ситуацию, описанную в этой задаче, правильно.*

2. Диагональ *AC* выпуклого четырёхугольника *ABCD* равна стороне *AD*. На диагонали *BD* есть такая точка *E*, что *DE*=*BC* и *AB*=*AE*. Докажите, что *BC* – касательная к описанной окружности треугольника *ABE*. (*Задача предложена Романом Бариновым, студентом СПбГУ.*)



Доказательство: Треугольники *ABC* и *AED* равны по трём сторонам, значит, один переходит в другой поворотом на ∠*CAD*=∠*BAE* относительно точки *A*, но ∠*CAD*=∠*CBD*, как опирающиеся на дугу *CD* описанной окружности четырёхугольника *ABCD*, которая существует в силу равенства углов *BCA* и *BDA*. Значит, ∠*CBE*=∠*CBD*=∠*BAE*, откуда следует, что *BC* – касательная к описанной окружности треугольника *ABE*.

3. Целые числа *a, b, c* – длины сторон некоторого тре-

угольника. При каком наименьшем периметре треугольника трехчлен ax^2+bx+c имеет хотя бы один действительный корень?

<u>Ответ</u>: 9. ***<u>Пример</u>:*** Квадратный трехчлен $x^2+4x+4=(x+2)^2$ имеет корень (–2). При этом существует равнобедренный треугольник со сторонами 1, 4, 4 периметра 9. ***<u>Доказательство оценки</u>:*** Должно выполняться неравенство для дискриминанта $D=b^2-4ac\geq 0$ $\Leftrightarrow$ $b^2\geq 4ac$. Не умаляя общности, можно считать, что $a\geq c$. Если $c\geq 2$, то $b^2\geq 4ac\geq 4\cdot 2\cdot 2=16$, следовательно, $b\geq 4$. Но по неравенству треугольника $a+c>b\geq 4$, значит, $a+c\geq 5$ и весь периметр не меньше 5+4=9. Значит, меньший периметр треугольника можно получить только при $c=1$. По неравенству треугольника $b<a+c=a+1$, следовательно, $b\leq a$, тогда $a^2\geq b^2\geq 4ac=4a$, откуда $a\geq 4$. Значит, $b^2\geq 4a\geq 4\cdot 4=16$, т.е. $b\geq 4$. Тогда аналогично первому случаю по неравенству треугольника $a+c>b\geq 4$, значит, $a+c\geq 5$ и весь периметр не меньше 5+4=9.

4. Сумма положительных чисел x и y равна 1. Докажите, что $\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\geq 9$.

<u>Доказательство 1 (неравенство Коши)</u>:

$\frac{1}{x^2}-1=\frac{(1-x)(1+x)}{x^2}=\frac{y(x+x+y)}{x^2}\geq\frac{y\cdot 3\sqrt[3]{x\cdot x\cdot y}}{x^2}$. Здесь мы сначала воспользовались формулой разности квадратов, затем заменили 1 на $x+y$, после чего применили неравенство Коши для трёх положительных чисел. Аналогично $\frac{1}{y^2}-1\geq\frac{x\cdot 3\sqrt[3]{y\cdot y\cdot x}}{y^2}$. Перемножая эти неравенства с положительными частями и сокращая x и y, получим верное неравенство $\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\geq 9$, что и требовалось доказать.

<u>Доказательство 2</u>: Приводя дроби к общему знаменателю и домножая неравенство на положительное число x^2y^2, получим равносильное неравенство $(1-x^2)(1-y^2)\geq 9x^2y^2$, которое равносильно неравенствам $1\geq x^2+y^2+8x^2y^2 \Leftrightarrow (x+y)^2\geq x^2+y^2+8x^2y^2 \Leftrightarrow 2xy\geq 8x^2y^2 \Leftrightarrow 1\geq 4xy \Leftrightarrow (x+y)^2\geq 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$ – верное неравенство.

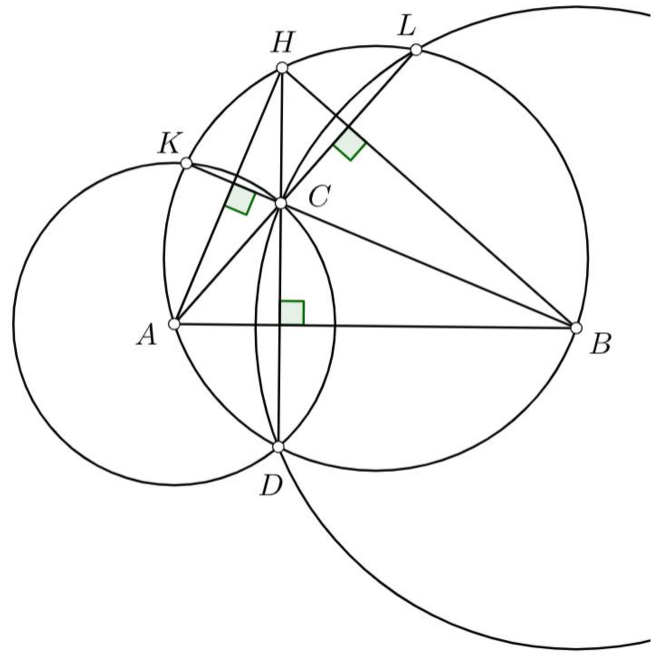
5. Незнайка нарисовал прямоугольник, разделил его на 64 меньших прямоугольника, проведя по 7 прямых, параллельных каждой из сторон исходного прямоугольника. После этого Знайка указывает одновременно на *N* прямоугольников разбиения, а Незнайка называет площадь каждого из этих прямоугольников. При каком наименьшем *N* Знайка сможет гарантированно узнать размеры прямоугольника?

<u>Ответ</u>: Это невозможно сделать. ***<u>Решение</u>:*** При увеличении одного размера в 2 раза и уменьшении другого в 2 раза площади всех частей останутся прежними, значит, невозможно узнать размеры этого прямоугольника.

<u>Комментарий</u>: *Школьный учебник … обладает ОДНИМ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫМ свойством – задачами с имеющимся реальным ответом, а в ЖИЗНИ и в НАУКЕ … ОЧЕНЬ ЧАСТО ответ реально другой, например, … «ЭТО НЕВОЗМОЖНО»! Надеемся, что появятся учебники, в которых такой ответ будет достаточно часто встречать-*

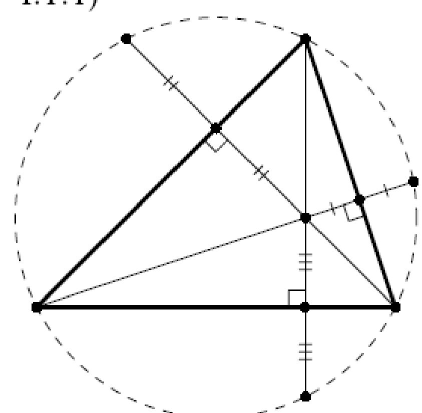
ся, например, в 5 % процентах задач! ОЛИМПИАДНАЯ МОЛОДЁЖЬ, ВАМ ЕСТЬ КУДА СТРЕМИТЬСЯ!:)

6. Две окружности с центрами *A* и *B* пересекаются в точках *C* и *D*. Прямая *BC* пересекла второй раз первую окружность в точке *K*, а прямая *AC* пересекла второй раз вторую окружность в точке *L*. Докажите, что точки *A, B, K, L* и *D* лежат на одной окружности. (*задача предложена выпускником лицея №82 г.Н.Новгорода Шиляевым Иваном*)



Решение: Назовём окружность, описанную вокруг треугольника *ABD* – *w*. Пусть *H* – ортоцентр треугольника *ABC*. Заметим, что *H* лежит на *w*. Действительно, в силу симметрии, $\angle ADB = \angle ACB$, а также по свойству ортоцентра, $\angle ACB + \angle AHB = 180°$, а значит, $\angle ADB + \angle AHB = 180°$, откуда следует требуемое. Также точка *C* является ортоцентром треугольника *AHB*. Отразим точку *C* относительно *AH* в точку *C'*. Т.к. прямая *AH* проходит через центр первой окружности, то *C'* будет лежать на ней, а также на окружности *w*, ведь *C* ортоцентр *AHB*, а *w* – его описанная окружность. В таком случае, точка *C'* совпадает с точкой *K*, ведь *C'* лежит на прямой *BC* и на первой окружности. Аналогично, если отразить точку *C* относительно *BH*, она перейдет в *L*. А тогда мы доказали, что точки *A, B, K, L* и *D* лежат на окружности *w*.

4.1.1)



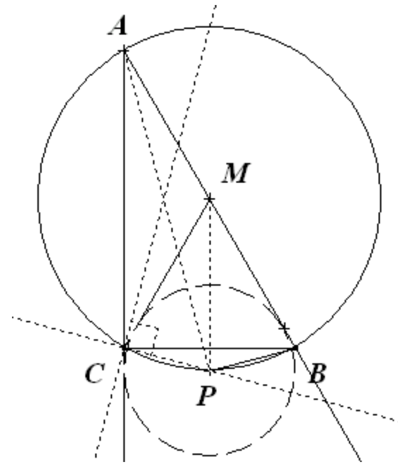
Комментарий: *Авторское решение полностью крутится вокруг свойств ортоцентра, которые олимпиадники к 9-му классу должны хорошо знать (см. факт 4.1.1. из книги А.В.Акопяна «Геометрия в картинках»). Но у задачи есть и более простые решения.*

10 класс

1. Известно, что для действительных чисел *a, b, c* система уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+a} = b, \\ \sqrt{x+b} = c, \\ \sqrt{x+c} = a \end{cases}$ **имеет хотя бы одно решение. Докажите, что *a=b=c*.**

Решение: Не умаляя общности, можно считать, что a – наибольшее из чисел, т.е. $a \geq b$, $a \geq c$. Тогда $b=\sqrt{x+a} \geq \sqrt{x+c}=a$, значит, $a=b$, откуда $c=\sqrt{x+b}=\sqrt{x+a}=b$, т.е. все три числа равны.

2. *M* – середина гипотенузы *AB* прямоугольного треугольника *ABC*, ∠*A*=30°. Биссектриса ∠*CAB* пересекается в точке *P* с прямой *CP*, перпендикулярной биссектрисе ∠*ACM*. Найдите ∠*ABP*.



Ответ: 75°. ***Решение:*** *CP* – биссектриса внешнего угла *C* треугольника *ACM* пересекается с его внутренней биссектрисой угла *A* в центре *P* вневписанной окружности, касающейся стороны *CM*, значит, *P* лежит и на внешней биссектрисе угла *M*, которая в равностороннем треугольнике *CMB* является осью симметрии. Следовательно, ∠*CBP*=∠*BCP*=90°–60°–∠*ACM*/2=30°–30°/2=15°, тогда ∠*ABP*=60°+15°=75°.

Комментарий: *Конечно, задачу можно решить и без вневписанной окружности, но … про неё каждый олимпиадник к 10-му классу уже должен давно знать.*

3. Какое наименьшее значение может принимать разность восьмизначного и шестизначного чисел $\overline{НОВГОРОД}-\overline{НИЖНИЙ}$? (*одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры)*

Ответ: 10230405–198197=10032208. ***Решение:*** Если цифра *Н*=*n*≥2, то $\overline{НОВГОРОД}-\overline{НИЖНИЙ}>n\cdot 10^7-(n+1)\cdot 10^5=n\cdot(10^7-10^5)-10^5=$ $\overline{(n-1)9(10-n)00000}>19000000$, что больше имеющегося у нас примера на 10032208. Значит, *Н*=1. Запишем теперь нашу разность поразрядно, получив сумму $(10^7-10^5-10^2)\cdot 1+(10^6+10^3+10)\cdot\overline{О}+10^5\cdot\overline{В}+10^4\cdot\overline{Г}+10^2\cdot\overline{Р}+1\cdot\overline{Д}-1\cdot\overline{Й}-10^3\cdot\overline{Ж}-(10^4+10)\cdot\overline{И}$, где коэффициенты при буквах-цифрах-переменных стоят в убывающем порядке. Тогда согласно транснеравенству минимум суммы попарных произведений будет равен при

10.34. Докажите, что если

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n, \qquad b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n,$$

то наибольшая из сумм вида

$$a_1 b_{k_1} + a_2 b_{k_2} + \ldots + a_n b_{k_n}$$

($k_1, k_2, \ldots, k_n$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$), это сумма

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n,$$

а наименьшая — сумма

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1.$$

$\overline{O}=0, \overline{B}=2, \overline{\Gamma}=3, \overline{P}=4, \overline{Д}=5, \overline{Й}=7, \overline{Ж}=8, \overline{И}=9$.

<u>Комментарий</u>: *К 10-му классу школьник, желающий успешно выступать в олимпиадах уже должен знать о классических неравенствах и способах их использования. Про транснеравенство много доступных материалов в Интернете, а его формулировку мы возьмём из книги Н.Б.Алфутовой и А.В.Устинова «Алгебра и теория чисел для математических школ» (см. задачу 10.34). Но минимальность разности в этой задаче можно, конечно же, объяснить и без транснеравенства, на что и рассчитана задача, обосновав, что Н=1 и взяв после этого минимально возможное уменьшаемое 10230405 и максимально возможное вычитаемое 198197. А про транснеравенство мы здесь говорим в качестве получения важных современных олимпиадных математических знаний.*

4. Про 2024 положительных числа a_1, a_2, …, a_{2024} известно, что $\frac{a_1+a_2}{a_3}=\frac{a_2+a_3}{a_4}=\frac{a_3+a_4}{a_5}=...=\frac{a_{2023}+a_{2024}}{a_1}=\frac{a_{2024}+a_1}{a_2}$. Докажите, что сумма какой-то половины из них равна сумме остальной половины чисел.

<u>Комментарий</u>: *Очередная задача Нижегородской (открытой) городской олимпиады на проверку у участников олимпиады знаний о НАИВАЖНЕЙШЕМ свойстве ряда равных отношений. И вопрос – начали его изучать в школах?*

<u>Доказательство</u>: Пусть S – сумма всех чисел. По свойству ряда равных отношений, применённого сложением числителей и знаменателей для всех дробей и для каждой нечётной по номеру дроби получим, что

$$\frac{a_1+a_2}{a_3}=\frac{a_2+a_3}{a_4}=\frac{a_3+a_4}{a_5}=...=\frac{a_{2023}+a_{2024}}{a_1}=\frac{a_{2024}+a_1}{a_2}=\frac{2S}{S}=2=\frac{S}{a_1+a_3+...+a_{2023}},$$

откуда $2(a_1+a_3+…+a_{2023})=S$, что равносильно равенству суммы чисел с нечётными индексами сумме чисел с чётными индексами, что и требовалось доказать.

2.1. Свойство ряда равных отношений. Если имеем ряд равных отношений

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=k,$$

то $a_i=kb_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — любые действительные числа, при которых $t_1b_1+t_2b_2+\ldots+t_nb_n\neq 0$. Тогда $t_1a_1=t_1kb_1$, $t_2a_2=t_2kb_2$, …, $t_na_n=t_nkb_n$. Сложив эти равенства, получим: t_1a_1+ $+t_2a_2+\ldots+t_na_n=k(t_1b_1+t_2b_2+\ldots+t_nb_n)$, откуда

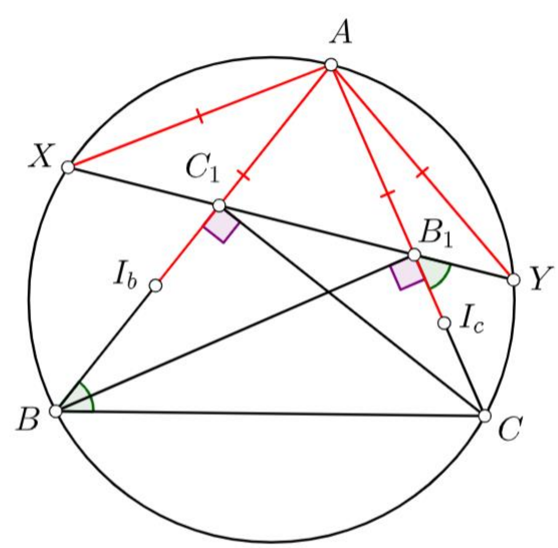
$$\frac{t_1a_1+t_2a_2+\ldots+t_na_n}{t_1b_1+t_2b_2+\ldots+t_nb_n}=k=\frac{a_i}{b_i},\quad \text{где } i=1, 2, \ldots, n. \qquad (2.1)$$

5. Докажите, что графики функций $f(x)=x^3+2x^2-2x-1$ и $g(x)=2x^3+4x^2-3x-2$ пересекаются в трёх различных точках, лежащих на одной прямой. (*задача предложена Кузнецовым Арсением Дмитриевичем*)

Решение: Сначала докажем, что графики этих функций пересекаются в трёх различных точках. Для этого нужно проверить, что уравнение $f(x) = g(x)$ имеет три различных корня. Уравнение $x^3+2x^2-2x-1=2x^3+4x^2-3x-2$ равносильно уравнению $x^3+2x^2-x-1=0$. Заметим, что в левой части этого уравнения находится кубический многочлен $h(x)$ с положительным старшим коэффициентом, поэтому при всех достаточно больших положительных x его значение будет положительным, а при всех достаточно больших по модулю отрицательных x – отрицательным. При этом $h(-1)=1$ и $h(0)=-1$. Значит, уравнение $h(x)=0$ в силу непрерывности функции $h(x)$ и теоремы о промежуточном значении, имеет как минимум по одному корню на интервалах $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$ и $(0;+\infty)$. Кубический многочлен не может иметь больше трёх корней, откуда заключаем, что уравнение $f(x)=g(x)$ действительно имеет ровно три различных корня, то есть графики соответствующих функций пересекаются ровно в трёх различных точках.

Теперь докажем, что эти точки пересечения лежат на одной прямой, найдя её уравнение. Из системы $\begin{cases} y = x^3+2x^2-2x-1, \\ y = 2x^3+4x^2-3x-2 \end{cases}$ следует, что $y = 2y-y = 2(x^3+2x^2-2x-1) - (2x^3+4x^2-3x-2) = -x$. Таким образом, любое решение этой системы $(x_0;y_0)$, соответствующее некоторой точке пересечения графиков функций $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяет также и уравнению-следствию $y = -x$. То есть все точки пересечения этих графиков лежат на одной прямой, задающейся уравнением $y = -x$, что и требовалось доказать.

6. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты BB_1, CC_1. Прямая B_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y. Пуст I_b – центр вписанной окружности BXY, а I_c – CXY. Докажите, что треугольник AI_bI_c – равнобедренный. (*задача предложена выпускником лицея г.Бор Серовым Даниилом*)



Доказательство: Докажем, что A – середина дуги XY, отсюда будет следовать утверждение задачи, ведь действительно: I_b будет лежать на BA, I_c на CA, применяя лемму о трезубце, $AI_b = AX = AI_c$. Четырёхугольник BC_1B_1C – вписанный на диаметре BC, откуда углы ABC и CB_1Y равны (считаем, что Y лежит на дуге AC – см. чертёж). Но если перевести это равенство в дуги, то получим, что сумма дуг AY и YC равна сумме дуг AX и YC, откуда и следует, что A – середина дуги XY.

11 класс

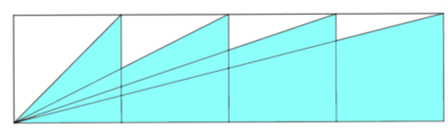
1. Натуральное число из различных ненулевых цифр назовём *уникальным*, если его можно представить в виде разности двух чисел, каждое из которых является пере-

становкой цифр самого уникального числа, причём в уменьшаемом цифры стоят в убывающем порядке, а в вычитаемом – в возрастающем. Докажите, что существует единственное трёхзначное уникальное число.

<u>Доказательство 1</u>: Упорядочим цифры уникального трёхзначного числа: $a>b>c>0$. Тогда само число равно $\overline{abc}-\overline{cba}=(100a+10b+c)-(100c+10b+a)=99(a-c)$, где $2\le a-c\le 9-1=8$. Перебор 7 возможных чисел такого вида, кратных 99 (198, 297, 396, 495, 594, 693, 792) показывает, что требуемое равенство будет только у числа 495=954–459.

<u>Доказательство 2</u>: Упорядочим цифры уникального трёхзначного числа: $a>b>c>0$. Тогда само число равно $\overline{abc}-\overline{cba}$ и выполним вычитание столбиком с учётом упорядоченности цифр. Получим, что наши три цифры будут равны $10+c-a$, $10+b-1-b=9$ (это может быть только цифра а), $a-1-c$. Цифра в разряде единиц $10+c-a=10+c-9=c+1=b$, тогда цифра в разряде сотен – это $c=a-1-c=9-1-c=8-c$, откуда $c=4$ и $b=c+1=5$. Значит, есть единственное уникальное трёхзначное число 495.

2. В бесконечном направо ряду стоят единичные кубики, приставленные друг к другу гранями (см. вид сбоку на начало ряда на рисунке). Соединяют нижнее левое ребро первого кубика с правыми верхними рёбрами всех кубиков, проводя плоскости. Объём, находящийся снизу от проведённых плоскостей, закрасили. Конечным или бесконечным является незакрашенный объём кубиков? (*задача предложена Тихоновым Глебом, учащимся 10-го класса, г.Уфа*)



<u>Ответ</u>: бесконечен. ***<u>Решение</u>:*** Площадь первого незакрашенного треугольника (основания прямоугольной призмы) равна 1/2, как половина площади квадрата. По теореме Фалеса понимаем, что длина отрезка на правой стороне первого квадрата-проекции грани (левой стороне второго квадрата) равна половине длины стороны квадрата. Аналогичным образом все остальные отрезки будут в 3, 4 и т.д. раза короче стороны квадрата, значит, весь объём незакрашенной части будет равен $1/2\cdot1\cdot1\cdot(1+1/2+1/3+1/4+\ldots)$, где в скобках получаем гармонический ряд, который, как известно, даёт бесконечную сумму. Это доказывается разбиением на куски по степеням двойки, когда каждый кусок оценивается снизу числом 1/2. Действительно, имеем бесконечный набор сумм $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2},\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}>8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2},\ldots$. Значит, вся сумма гармонического ряда будет больше суммы бесконечного ряда из чисел 1/2, что даст нам бесконечность.

3. Целые числа *a, b, c* – длины сторон некоторого треугольника. При каком наименьшем периметре треугольника квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет 2 различных действительных корня?

<u>Ответ</u>: 11. ***<u>Пример</u>:*** Квадратный трехчлен x^2+5x+5 имеет 2 различных действительных корня, т.к. его дискриминант $D=5^2-4\cdot5>0$. При этом существует равнобедренный треугольник со сторонами 1, 5, 5 периметра 11. ***<u>Доказательство оценки</u>:*** Должно выполняться неравенство для дискриминанта $D=b^2-4ac>0 \Leftrightarrow b^2>4ac$. Не умаляя общности, можно считать, что $a\ge c$. Если $c\ge2$, то $b^2>4ac\ge4\cdot2\cdot2=16$, следовательно, $b>4$, т.е. $b\ge5$. Но по неравенству треугольника $a+c>b\ge5$, значит, $a+c\ge6$ и весь периметр не меньше 5+6=11.

Значит, меньший периметр треугольника можно получить только при c=1. По неравенству треугольника $b<a+c=a+1$, следовательно, $b\le a$, тогда $a^2\ge b^2>4ac=4a$, откуда $a>4$, т.е. $a\ge 5$. Значит, $b^2>4a\ge 4\cdot 5=20$, т.е. $b\ge 5$. Тогда аналогично первому случаю по неравенству треугольника $a+c>b\ge 5$, значит, $a+c\ge 6$ и весь периметр не меньше 5+6=11.

4. Сколько существует таких троек чисел *x, y, z*, принадлежащих интервалу $(0;\frac{\pi}{2})$, что 2·(sin*x*·cos*y* + sin*y*·cos*z* + sin*z*·cos*x*) = 3? *(задача предложена выпускником гимназии №2 г.Нижнего Новгорода Болотиным Артёмом Сергеевичем)*

Ответ: одна тройка. ***Решение 1:*** Заметим, что в силу ограничений $x, y, z \in (0;\frac{\pi}{2})$ синусы и косинусы всех трёх переменных положительны. Тогда применим неравенство Коши для каждого слагаемого, равного произведению. Например, $2\sin x\cdot\cos y= 2\sqrt{\sin^2 x\cdot\cos^2 y}\le \sin^2 x+\cos^2 y$. Складывая аналогичные неравенства получаем: $2(\sin x\cdot\cos y + \sin y\cdot\cos z + \sin z\cdot\cos x)\le \sin^2 x+\cos^2 y+ \sin^2 y+\cos^2 z+ \sin^2 z+\cos^2 x = 3$, как сумма трёх основных тригонометрических тождеств. Равенство в неравенстве Коши может достигаться лишь в случае, если $\sin x=\cos y$, $\sin y=\cos z$ и $\sin z=\cos x$, т.е. при $y=\pi/2- x = z$. Аналогично $x=y$, т.е. каждые два числа одновременно равны между собой и в сумме дают $\pi/2$. Получаем единственное решение $x=y=z=\pi/4$.

Решение 2: Заметим, что на промежутке $(0;\frac{\pi}{2})$ функции синуса и косинуса строго монотонны и строго выше оси абсцисс: синус – возрастает, косинус – убывает. Тогда пусть a – наибольшее из чисел x, y, z; b – среднее, c – наименьшее. Рассмотрим два набора чисел, которые упорядочены: $\sin a\ge\sin b\ge\sin c$ и $\cos c\ge\cos b\ge\cos a$. По транснеравенству сумма из условия не превосходит максимальную: $2(\sin x\cdot\cos y + \sin y\cdot\cos z + \sin z\cdot\cos x)\le 2(\sin a\cdot\cos c+\cos a\cdot\sin c)+\sin(2b) = 2\sin(a+c)+\sin(2b)\le 3$, причем равенство достигается только в случае, когда $b=\pi/4$ и $a+c=\pi/2$. При этом равенство в транснеравенстве достигается лишь в случае, если наборы чисел до и после упорядочивания совпадают, то есть $\cos b=\cos c$ или $\cos b=\cos a$. В обоих случаях приходим к равенству $a=b=c=\pi/4$.

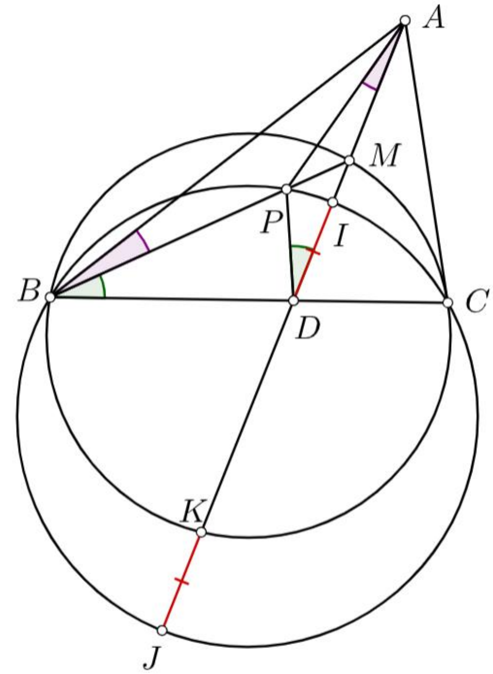
Комментарий 1: *Важно понимать, что ввод новых переменных a, b и c не равносилен упорядочиванию чисел x, y и z. В случае решения для $x\ge y\ge z$ за задачу полный балл не ставится.*

Комментарий 2: *У задачи есть и чисто школьное решение, фактически заменяющее своими выкладками ссылку на неравенство Коши из решения 1.*

5. При каких натуральных *n* в клетках таблицы *n*×(*n*+1) можно расставить по одному все целые числа от 1 до *n*(*n*+1) так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце среднее арифметическое всех чисел ряда также оказалось в этом ряду?

Ответ: таких n не существует. ***Решение:*** Предположим, что такая таблица существует. Тогда сумма чисел в каждом ряду делится на само среднее арифметическое ряда и даёт число, равное количеству клеток в ряду. Следовательно, если просуммировать все числа отдельно по строкам и отдельно по столбцам, то получим, что вся сумма чисел S таблицы должна делиться и на n, и на $(n+1)$, которые при этом взаимно просты, значит, S должно делиться на произведение $n(n+1)$. Но $S=\frac{n(n+1)(n(n+1)+1)}{2}$ и после деления на

$n(n+1)$ получим нецелое число $\dfrac{n(n+1)+1}{2}$, т.к. в числителе нечётное число (n и $(n+1)$ – числа разной чётности) и на 2 не разделится.



6. В остроугольном треугольнике *ABC* (*AB* > *AC*) провели биссектрису *AD*, отметили её середину *M* и центр вписанной окружности *I*. Окружности, описанные около треугольников *BMC* и *BIC*, пересекают луч *AI* повторно в точках *K* и *J* соответственно. Докажите, что *ID* = *KJ*. (*задача предложена выпускником лицея г.Бор Серовым Даниилом*)

<u>Доказательство:</u> Пусть P – точка на медиане BM треугольника ABD такая, что углы MBD и PDM равны. Тогда ясно, что (BPD) касается AD, откуда $MD^2 = MP \cdot MB$. Но $MD = MA$, откуда $MA^2 = MP \cdot MB$ и окружность (BPA) также касается AD, то есть углы PBA и PAM равны. Рассмотрим подобные треугольники ABM и APM, они дают нам $AP/AB = MP/MA$. Аналогично для DBM и DPM $DP/BD = MP/MD$, откуда $AP/PD = AB/BD$, то есть P лежит на окружности Аполлония треугольника ABD, но эта окружность на самом деле (BIC), ведь BI – биссектриса, BJ – внешняя биссектриса (классический факт, основанный на лемме о трезубце). То есть, P лежит на (BIC), откуда $MD^2 = MP \cdot MB = MI \cdot MJ = (MD - ID) \cdot (MD + DJ) = MD^2 + MD \cdot (DJ - ID) - ID \cdot DJ =$ (пользуемся тем, что D лежит на радикальной оси окружностей (BMC) и (BIC)) $= MD^2 + MD \cdot (DJ - ID) - MD \cdot DK$, откуда $ID = DJ - DK = KJ$, что и требовалось доказать.

<u>Комментарий 1</u>: *P – точка Шалтая в треугольнике ABD, и мы по сути доказали одно её интересное свойство – она лежит на соответствующей окружности Аполлоня. Предлагается изучить статью Ф. Л. Бахарева в Интернете.*

<u>Комментарий 2</u>: *Забавно, но это задача про треугольник ABD, и C нужна лишь для определения окружности Аполлония.*

<u>Комментарий 3</u>: *Здесь приведено авторское решение, показывающее фактически откуда задача появилась, но у задачи есть и более простые решения, о которых будет рассказано позже.*