XVII УСТНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ЛИЦЕЯ №165

УГОЛ

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

1 апреля 2023 г.

XVII устная геометрическая олимпиада «УГОЛ»: Задачи и решения. - Н. Новгород: НИУ ВШЭ - Нижний Новгород, МБОУ «Лицей №165», 2023 год

В сборнике представлен задачный материал XVII устной геометрической олимпиады «УГОЛ» для учащихся 7-11 классов. Основные идеи и решения задач предложили школьники и выпускники, призёры олимпиад школьников по математике и геометрии разных лет.

XVII Устная геометрическая олимпиада «Угол»

Пять правил участия в олимпиаде «Угол», 01.04.2023

1. Олимпиада «Угол» - личное первенство для школьников **7-11 классов** города Нижнего Новгорода и Нижегородской области. Победители и призеры олимпиады «Угол» определяются по параллелям.

2. В отличие от традиционной олимпиады участники не оформляют решения задач в письменном виде. В ходе олимпиады учащиеся рассказывают решения задач членам жюри. При этом можно использовать заготовленные рисунки, краткую запись условия и решения задачи, либо предъявлять решение «с чистого листа». Члены жюри, выслушав решение задачи, отмечают в «Листе участника олимпиады» свое согласие с рассуждениями школьника, либо указывают на недостоверность решения. Участник олимпиады может представлять решение каждой задачи не более двух раз.

3. Олимпиада проходит в два этапа. Отборочный этап прошел в марте 2023 года с использованием дистанционных образовательных технологий. На заключительный этап приглашены лидеры. Лучшим геометрам предложено решить 5 олимпиадных задач.

4. Заключительный этап длится 3,5 часа.

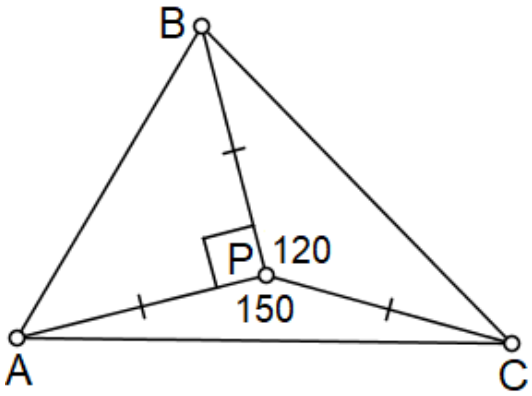
5. ***Оценивание решения задач.*** Любая из двух возможных попыток рассказать решение задачи оценивается одинаково. Жюри, выслушав решение, может выставить в «Листе участника олимпиады» следующие баллы: ***«7» - задача решена***, ***«0» - задача не решена*** (решение неверно или содержит существенные недочеты).

7 класс

Задача № 1. «360°»

Внутри треугольника ABC нашлась такая точка P, что AP=BP=CP и величины углов APB, BPC и CPA относятся как 3:4:5. Чему равен наибольший угол треугольника ABC?

(Д.Ю. Кузнецов)



Решение 1. По условию задачи углы с вершиной в точке *P* образуют угол *360°*. Поскольку их величины относятся как *3:4:5*, верно равенство: *360=(3+4+5)x=12x* или *x=30*. Значит, *∠APB=90°*, *∠CPB=120°*, *∠APC=150°*. Тогда, учитывая, что треугольники *APB*, *BPC* и *CPA* – равнобедренные, получаем, что наибольший угол треугольника *ABC* равен *75°*.

Решение 2. Пусть углы *APB*, *BPC* и *CPA* равны α, β и γ, тогда по свойству ряда равных отношений[1] получим, что $\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{4}=\frac{\gamma}{5}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{12}=\frac{360°}{12}=30°$, откуда $\alpha = 3\cdot 30° = 90°$, $\beta=4\cdot 30°=120°$, $\gamma=5\cdot 30° = 150°$. Тогда в равнобедренных треугольниках *APB*, *BPC* и *CPA* углы при основаниях равны соответственно *(180°–90°):2=45°*, *(180°–120°):2=30°*, *(180°–150°):2=15°*, тогда углы треугольника *ABC* равны *15°+45°=60°*, *45°+30°=75°*, *30°+15°= 45°*.

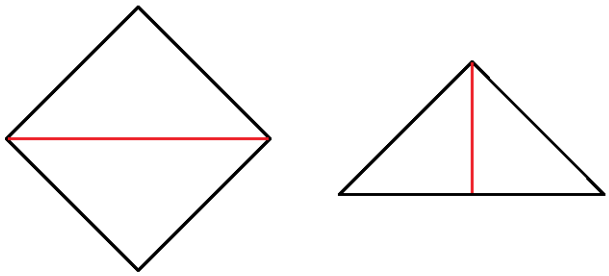
Ответ: *75°*.

Комментарий. Знающий же про вписанные и центральные углы сразу понимает из условия, что *P* – центр описанной окружности треугольника *ABC*, и тогда *∠ACB=∠APB:2=45°*, *∠CAB=∠CPB:2=60°*, *∠ABC=∠APC:2=75°*.

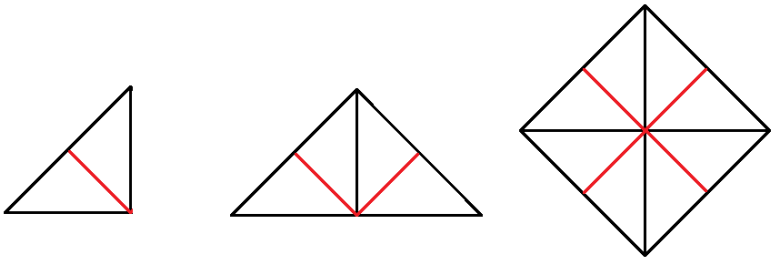
[1] Понарин Я.П. Элементарная геометрия: В 2 т.—Т.1: Планиметрия, преобразования плоскости. — М.: МЦНМО, 2004, с. 16.

Задача № 2. «Верю – не верю»

Барон Мюнхгаузен сложил квадратный лист бумаги вдоль диагонали, полученный треугольник сложил вдоль его высоты (линии сгибов показаны на рисунке). Барон утверждает, что может разрезать полученную фигуру по прямой линии так, что лист распадётся на четыре части равной площади. Можно ли верить барону? ***(А.С. Болотин)***



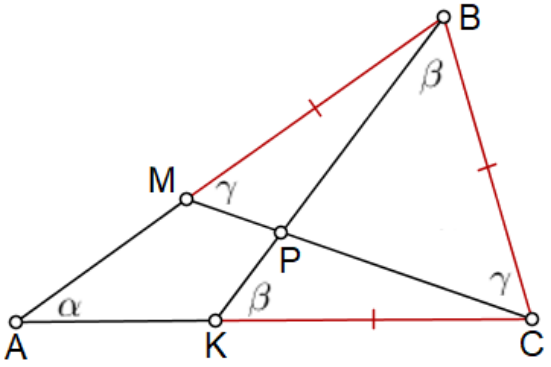
Решение. Разрежем полученный в результате сгибов равнобедренный прямоугольный треугольник вдоль высоты из вершины прямого угла. Такая высота разбивает данный треугольник на два прямоугольных равнобедренных, поэтому весь лист распадается на четыре равных квадрата (см. рис.).



Ответ: Барону можно верить.

Задача № 3. «Вокруг классической конструкции»

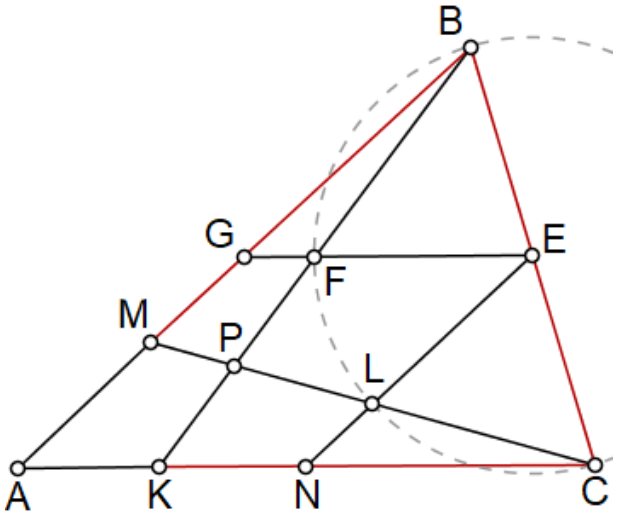
На сторонах AB и AC треугольника ABC ($\angle A=\alpha$) отмечены точки M и K соответственно так, что MB=BC=CK. Найдите угол между прямыми BK и CM. Углом между двумя пересекающимися прямыми называется наименьшая из величин углов, образованных лучами, на которые прямые делятся их точкой пересечения ***(Д.Ю. Кузнецов).***



Решение. Пусть $\angle KBC = \angle BKC = \beta$, $\angle BCM = \angle BMC = \gamma$, тогда $\angle MCA = \angle BMC - \angle MAC = \gamma - \alpha$, $\angle ABK = \angle BKC - \angle KAB = \beta - \alpha$, сумма углов треугольника *ABC* равна $\alpha+(\beta-\alpha)+\beta+\gamma+(\gamma-\alpha)=2\beta+2\gamma-\alpha$. Значит, $\alpha+(\beta-\alpha)+\beta+\gamma+(\gamma-\alpha)=2\beta+2\gamma-\alpha = 180° \Leftrightarrow \beta+\gamma=90°+\alpha/2$. Тогда угол между прямыми *BK* и *CM* равен величине угла *BPC*: $180°-\beta-\gamma=180°-(90°+\alpha/2) = 90°-\alpha/2$.

Ответ: $90°-\alpha/2$.

Комментарий. У задачи есть ещё одно, на наш взгляд, красивое решение, основанное на полезном олимпиадном методе «*параллельные палочки*» и эвристике: «надо доказать равенство углов, ищи окружность и строй «параллельные палочки». Теоретический базис этого решения задачи соответствует содержанию геометрии для 8 класса.



Отметим середины *E*, *F*, *G*, *L*, *N* соответственно отрезков *BC*, *BK*, *BA*, *CM* и *CA* (см. рисунок). Тогда *AGEN* – параллелограмм, так как *GE* и *NE* – средние линии в треугольнике *ABC* (*провели «параллельные*

палочки»), значит, $\angle FEL=\angle GEN=\angle GAN=\angle BAC=\alpha$. Отрезки EL и EF – средние линии в треугольниках BCM и BCK, значит, равны половине равных отрезков BM и CK, то есть, половине BC. Следовательно, точки L, F, B и C удалены от точки E на равное расстояние $BC/2$ и лежат на окружности с центром E (*вот и окружность появилась*). Отсюда следует, что $\angle PLB=\angle BLC=90°$ (вписанный угол, опирающийся на BC - диаметр окружности), значит, $\angle BPL=90°-\angle PBL=90°-\angle FBL=90°-\angle FEL/2=90°-\alpha/2$ (по свойству вписанного угла).

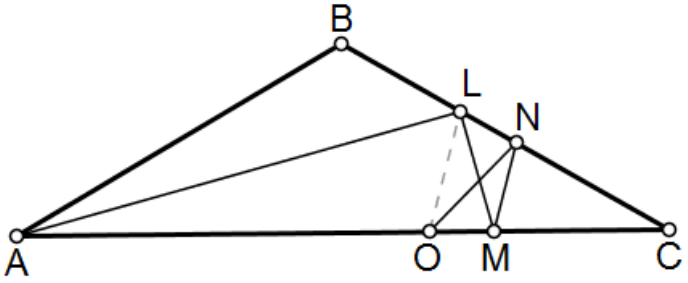
Ответ: $90°-\alpha/2$

Задача № 4. «Золотой запас «Угла»

В равнобедренном треугольнике ABC $\angle B = 120°$. Луч света, идущий по биссектрисе AL угла BAC, отражается по закону «угол падения равен углу отражения», образуя ломаную ALMNO (то есть $L \in BC$, L – основание биссектрисы, $M \in AC$ и $\angle ALB = \angle MLC$, $N \in BC$, $\angle LMA = \angle NMC$ и $O \in AC$, $\angle MNC = \angle ONB$). Докажите, что LO || MN ***(К.О. Голубев, 2017).***

Решение. $\angle LAB = 30°/2 = 15°$, $\angle ABL = 120°$, откуда $\angle ALB = 180° - 120° - 15° = 45°$, а значит, $\angle MLC = \angle ALB = 45°$. Угол LMA – внешний для треугольника LMC, поэтому $\angle LMA = \angle MLC + \angle LCM = 45° + 30° = 75°$. Учитывая, что $\angle NMC = \angle LMA$, $\angle NMC = 75°$. Заметим, что $\angle MNC = 180° - \angle NMC - \angle MCN = 180° - 75° - 30° = 75° = \angle NMC$, тогда треугольник MCN - равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника), $CM = CN$. $\angle NOC = \angle ONB - \angle OCN =$ ($\angle ONB$ – внешний для ΔNOC) $= \angle MNC - \angle ACB = 75° - 30° = 45° = \angle MLC$. Это означает, что по признаку равенства треугольников $\Delta NOC = \Delta LMC$ ($CN = CM$, $\angle OCN = \angle MCL$ – общий и $\angle NOC = \angle MLC$). Как следствие, получаем $CL = CO$, откуда $\angle OLC = \angle LOC = (180° - \angle LCO)/2 = (180° - 30°)/2 =$

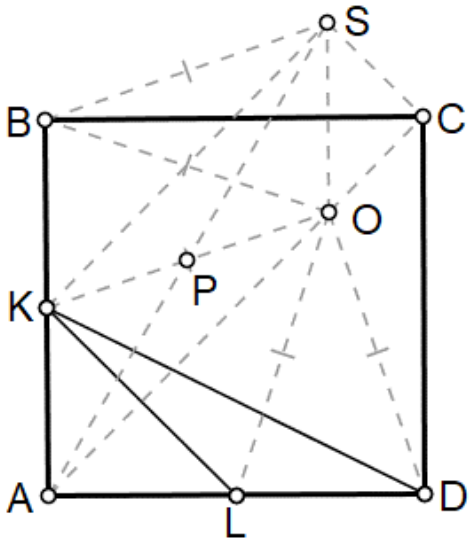
$= 75° = \angle MNC$. Итак, $\angle OLC$ и $\angle MNC$ - соответственные углы при пересечении прямых LO и MN секущей BC, поэтому $LO \parallel MN$ по признаку параллельности прямых. Что и требовалось доказать.



Задача № 5[2]. «Поровну»

В квадрате ABCD точки K и L – середины сторон AB и AD соответственно. Внутри квадрата ABCD нашлась такая точка O, что OD = OK = OL. Точка S симметрична точке O относительно прямой BC (то есть SO ⊥ BC, SB = BO, SC = CO). Докажите, что CS ⊥ SK

(К. Голубев, 2022).



Решение. $\Delta AKO = \Delta ALO$ по признаку равенства треугольников (AO – общая, $OK = OL$, $AK = AB/2 = AD/2 = AL$), поэтому $\angle KAO = \angle LAO = \angle BAD/2 = 90°/2 = 45°$. Также $\Delta ABC = \Delta ADC$ (AC – общая, $AB = BC = CD = DA$), откуда $\angle BAC = \angle DAC = \angle BAD/2 = 90°/2 = 45° = \angle KAO = \angle BAO$. Итак, $\angle BAC = 45° = \angle BAO$, поэтому точка ***O* лежит на *AC***.

$\Delta ABO = \Delta ADO$ по признаку равенства треугольников ($AB = AD$, AO – общая, $\angle BAO = 45° = \angle DAO$), откуда $OB = OD$. Более того, точки S и O симметричны относительно прямой BC, поэтому $OB = BS$, откуда $\boldsymbol{OD = OL = OK = OB = BS}$.

$\Delta COB = \Delta CSB$ по признаку равенства треугольников (BC – общая, $CO = CS$, $BO = BS$), откуда $\angle SCO = 2\cdot\angle BCO = 2\cdot \angle BCA = 90°$.

[2] Как вы готовитесь к олимпиаде? Решаете вариант предыдущего года?

В ΔCSO $\angle C = 90°$, $CO = CS$, откуда $\angle SOC = 45° = \angle BCO$, поэтому $SO \perp BC$. Но $AB \perp BC$, то есть $\boldsymbol{AB \parallel SO}$.

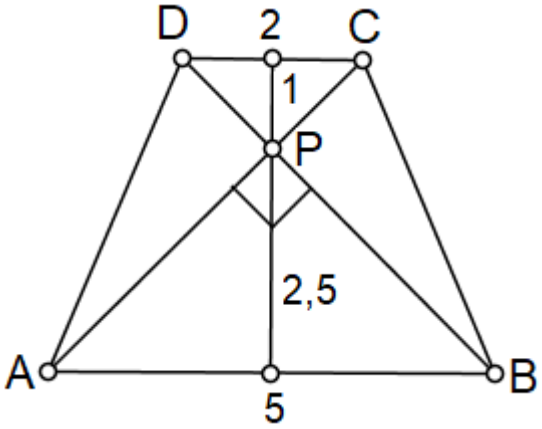
$\Delta OBK = \Delta OBS$ по признаку равенства треугольников ($BS = BO = OK$, $\angle SBO = 180° - 2 \cdot \angle BOS = (BK \parallel SO) = 180° - 2 \cdot \angle OBK = \angle BOK$), значит, $KB=SO$. Пусть P – точка пересечения прямых AS и OK. $\Delta POS = \Delta PAK$, ведь $AK = KB = SO$, $\angle POS = \angle PKA$, $\angle PSO = \angle PAK$ (последние два равенства углов следуют из свойства накрест лежащих углов при пересечении параллельных прямых секущей, $AB \parallel SO$). Отсюда мы получаем, что $PK = PO$ и $PS = PA$. Далее мы можем заключить, что $\Delta KPS = \Delta APO$ ($PA = PS$, $PO = PK$, $\angle APO = \angle SPK$, как вертикальные), а значит $\boldsymbol{KS = AO}$.

$\Delta BSK = \Delta KOA$ по признаку равенства треугольников ($AK = KB$, $KS = AO$, $OK = BS$), поэтому $45° = \angle KAO = \angle BKS$. Мы знаем, что $BK \parallel SO$, то есть $45° = \angle BKS = \angle KSO$. Но $\angle OSC = \angle SOC = 90° - \angle SCO/2 = 45°$, поэтому $\angle KSC = \angle KSO + \angle OSC = 45° + 45° = 90°$. Значит, $CS \perp SK$. Что и требовалось доказать.

8 класс

Задача № 1. «Перпендикулярная классика»

В равнобедренной трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями основания равны 2 и 5. Чему равна высота трапеции? ***(Д.Ю. Кузнецов)***

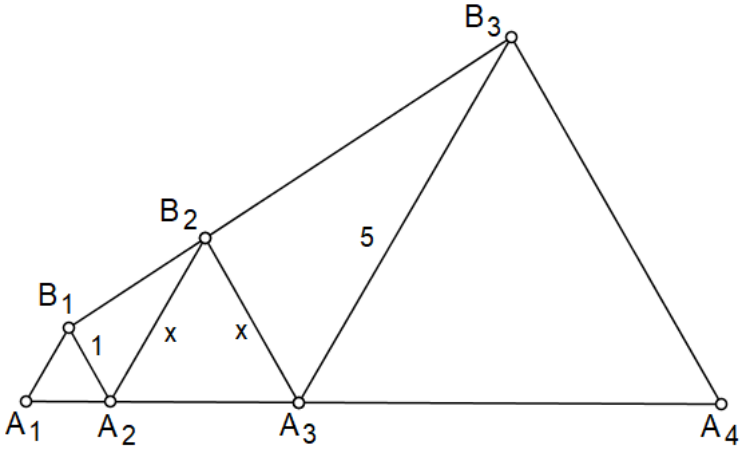


Решение. Пусть *ABCD* – равнобедренная трапеция с большим основанием *AB*. Если провести высоту трапеции через точку пересечения диагоналей (обозначим точку пересечения диагоналей точкой *P*), то не трудно доказать, что она разобьёт высоту на два отрезка, которые являются медианами, проведенными из прямого угла в прямоугольных треугольниках *ABP* и *CDP* соответственно, длины которых равны половинам гипотенуз, а в сумме дадут *2/2+5/2=3,5*.

Ответ: *3,5* – высота трапеции.

Задача № 2. «Геометрическая последовательность»

На горизонтальной прямой последовательно отмечены слева направо точки A_1, A_2, A_3, A_4, а в верхней полуплоскости – точки B_1, B_2, B_3 на одной прямой так, что $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$, $A_3A_4B_3$ – правильные треугольники со сторонами 1, x и 5 соответственно. Найдите x ***(Д.Ю. Кузнецов).***

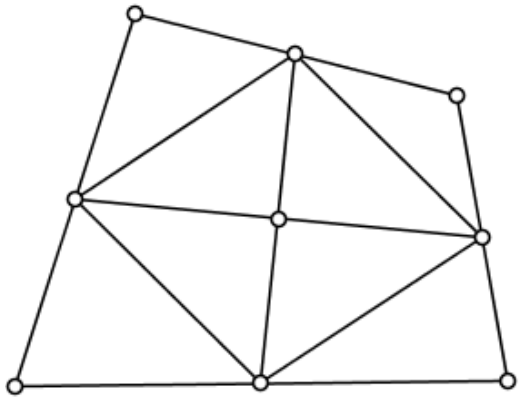


Решение. Треугольники $B_1A_2B_2$ и $B_2A_3B_3$ подобны по признаку подобия треугольников ($A_2B_2 \parallel A_3B_3$, так как накрест лежащие углы при пересечении этих прямых секущей $B_2\ A_3$ равны по 60°, $\angle B_1A_2B_2 = \angle B_2A_3B_3 = 60^o$, $\angle B_1B_2A_2 = \angle B_2B_3A_3$ как соответственные углы при пересечении параллельных прямых секущей), откуда $\frac{1}{x} = \frac{x}{5} \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$.

Ответ: $x = \sqrt{5}$.

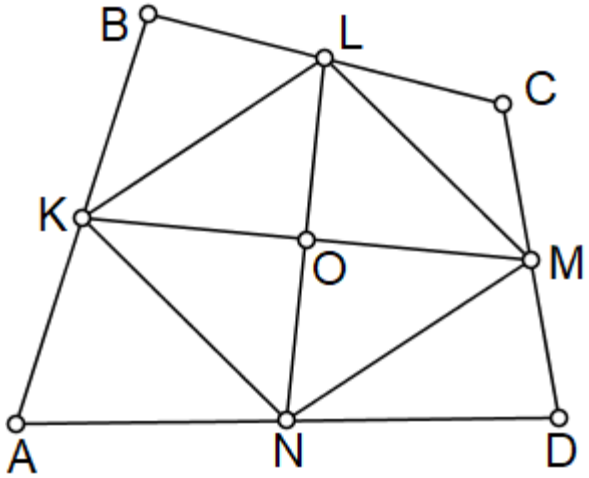
Задача № 3. «Найди прямоугольник»

В выпуклом четырехугольнике отметили середины сторон и разбили отрезками на треугольники, как на рисунке. Оказалось, что периметры всех получившихся треугольников разбиения равны. Докажите, что данный четырехугольник является прямоугольником



(И. П. Шиляев).

Решение. Назовем вершины всех треугольников разбиения (см. рис). Заметим, что *KLMN* – параллелограмм (носит имя Вариньона). Действительно, *KL* и *NM* параллельны *AC*, так как



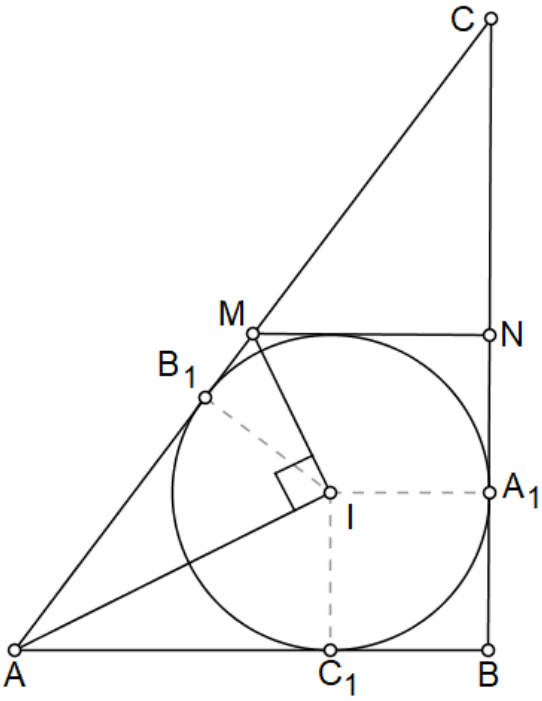
являются средними линиями треугольников *ABC* и *ADC* соответственно, аналогичные рассуждения приводят к факту, что *KN* и *LM* параллельны *BD*. Параллелограмм *KLMN* является ромбом, так как если у треугольников *KOL* и *LOM* равны периметры и *LO* у них общая сторона, а *KO* = *OM* по свойству параллелограмма, то *KL* = *LM*. В таком случае, раз *BL* = *LC* и *KL* = *LM*, то *BK* = *CM*, то есть *AB* = *CD*. Аналогично, *BC*=*AD*, а тогда *ABCD* – параллелограмм (по признаку параллелограмма). Раз *ABCD* – параллелограмм, то *KM* ||*AD* и *LN* || *AB*, но *KM* и *LN* перпендикулярны по свойству диагоналей ромба (*KLMN* – ромб), а значит, *ABCD* – прямоугольник. Что и требовалось доказать.

Задача № 4. «Пифагор в помощь»

В треугольнике ABC со сторонами AB = 3, BC = 4, CA = 5 точка I - центр окружности, вписанной в этот треугольник. Докажите, что угол AIM – прямой, где M - середина отрезка CA ***(А. С. Болотин).***

Решение 1. Для начала заметим, что треугольник *ABC* – прямоугольный с прямым углом *B*. Введём обозначения *AB* = *c* = *3*,

$BC = a = 4$, $CA = b = 5$, p – полупериметр. Отметим точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника, назовем их A_1, B_1, C_1 в соответствии с рисунком. Согласно классическому факту $BC_1 = BA_1 = p - b = 6 - 5 = 1$. Рассмотрим четырёхугольник IA_1BC_1, который является квадратом ($\angle A_1BC_1 = 90°$; $\angle IA_1B = \angle IC_1B = 90°$, по свойству касательной к окружности; $BC_1 = BA_1$). Тогда $IC_1 = A_1B = 1$. $AC_1 = AB - BC_1 = 2$, значит, по теореме Пифагора в треугольнике AIC_1: $AI = \sqrt{5}$. $AB_1 = AC_1 = 2$, $AM = AC/2 = 2{,}5$, откуда $B_1M = 0{,}5$. Применим теорему Пифагора в треугольнике IMB_1, находим $IM = \sqrt{MB_1^2 + B_1I^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \sqrt{5}/2$. Для того, чтобы доказать, что $\angle AIM = 90°$, достаточно проверить выполнение равенства Пифагора для треугольника AIM: $AI^2 + IM^2 = AM^2$. $AI^2 + IM^2 = 5 + 5/4 = 25 / 4 = (5 / 2)^2 = AM^2$. Значит, треугольник AIM – прямоугольный, по теореме, обратной теореме Пифагора, $\angle AIM = 90°$. Что и требовалось доказать.

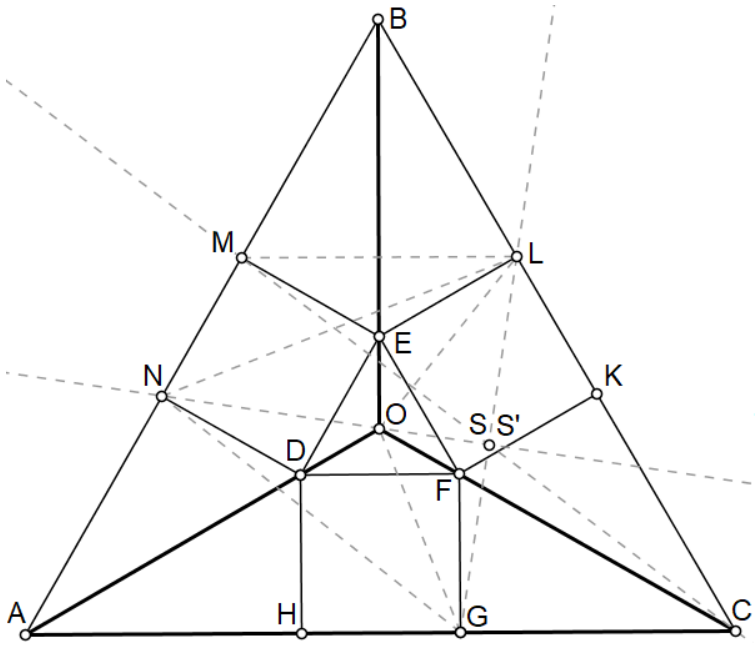


Решение 2. Отметим точку N - середину отрезка BC, MN – средняя линия треугольника ABC, поэтому $MN = AB/2 = 1{,}5$. Заметим, что $AMNB$ – четырехугольник, описанный около окружности, так как $AB + MN = 3 + 1{,}5 = 2{,}5 + 2 = AC/2 + BC/2 = AM + BN$. Тогда вписанная окружность в четырехугольник $AMNB$ совпадает со вписанной окружностью треугольника ABC (она однозначно определяется двумя углами MAB и ABN). Значит, MI – биссектриса угла AMN. Но тогда $\angle IAM + \angle IMA = (\angle BAM + \angle AMN) / 2 = 90°$, где последнее равенство верно в силу параллельности отрезков AB и MN. Итак, $\angle AIM = 180° - (\angle IAM + \angle IMA) = 90°$. Что и требовалось доказать.

Комментарий. Заметим, что второе доказательство применимо для более общей задачи: достаточно потребовать, чтобы в треугольнике *ABC* выполнялось соотношение *3AB = AC + CB*. На самом деле, данная задача имеет много «родственников», о которых можно прочитать в статье А. Заславского «Приключения одной задачи»[3].

Задача № 5[4]. «Три в одном»

В правильном треугольнике ABC точка O – точка пересечения высот. В треугольники ABO, BCO и ACO вписаны квадраты DEMN, EFKL и DFGH соответственно, причём точка D лежит на отрезке AO, точка E – на BO, точка F – на CO, точки G и H – на AC, точки K и L – на BC, а точки M и N – на AB. Докажите, что прямые LG, NO и MC пересекаются в одной точке ***(К.О. Голубев).***



Решение. Треугольники *ABO*, *ACO* и *BCO* получаются друг из друга поворотом относительно точки *O* на угол в *120°*. Поэтому поворотами на тот же угол вокруг точки *O* переходят друг в друга

[3] Журнал "Квант". - № 12, 2017, с 19: http://kvant.mccme.ru/pdf/2017/2017-12.pdf
[4] Как вы готовитесь к олимпиаде? Решаете вариант предыдущего года?

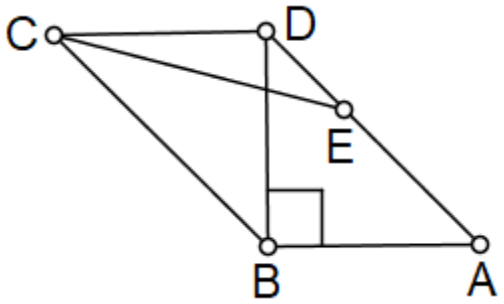
точки квадрата. Отсюда следует, что $OL = ON = OG$ и $\angle LOG = \angle LON = \angle GON = 360°/3 = 120°$. Это означает, что $\Delta LOG = \Delta LON = \Delta GON$, а значит ΔLGN – равносторонний и точка O – его центр, следовательно, является точкой пересечения медиан. Итак, прямая NO пересекает отрезок LG в его середине S.

Пусть S' – точка пересечения MC и LG. $\Delta MBE = \Delta LBE$ по признаку равенства треугольников, поскольку $\angle BME = 90° = \angle BLE$, BE – общая сторона, а BE – биссектриса $\angle MBL$. Отсюда следует $BL = BM$. С учётом того, что $\angle MBL = \angle ABC = 60°$ получаем, что ΔBML – равносторонний, таким образом, $\Delta BML \sim \Delta ABC$ по признаку подобия треугольников, а значит $LM \parallel AC$. Отсюда немедленно следует, что $\boldsymbol{\Delta MLS' \sim \Delta GCS'}$. Но $BL = GC$, так как первый отрезок переходит во второй при повороте относительно точки O на угол $120°$. Итак, коэффициент подобия треугольников равен $BL / GC = 1$, откуда получаем $\boldsymbol{\Delta MLS' = \Delta GCS'}$, что влечёт равенство отрезков: $LS' = S'G$. Значит, точка S' – середина отрезка LG, а значит, точки S *и* S' совпадают. Итак, LG, NO и MC пересекаются в одной точке. Что и требовалось доказать.

9 класс

Задача № 1. «Классическая конструкция»

В параллелограмме ABCD диагональ BD перпендикулярна и равна стороне AB. На стороне AD взята такая точка E, что CE=CB. Найдите ∠ECD ***(Д.Ю. Кузнецов).***



Решение. Пусть катеты *BD* и *CD* в равнобедренном прямоугольном треугольнике *CBD* равны 1, тогда $CE = CB = \sqrt{2}$, и по теореме синусов для треугольника *CDE* имеем: $\frac{CE}{sin\angle CDE} = \frac{CD}{sin\angle CED} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{sin\,135°} = \frac{1}{sin\angle CED} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{sin\angle CED} \quad \Leftrightarrow \quad sin\angle CED = \frac{1}{2}$

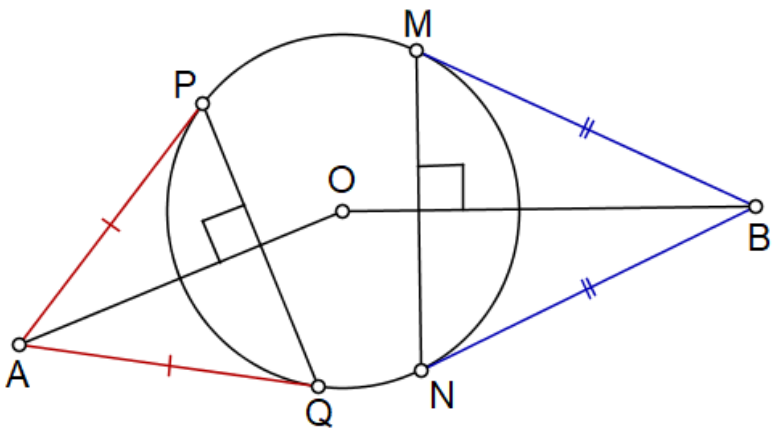
В силу того, что угол *CED* – острый, получаем, что он равен *30°*. Значит, *∠ECD=180°–∠CDE–∠CED=180°–135°–30°=15°*.

Ответ: *∠ECD =15°*.

Задача № 2. «Касательная» классика»

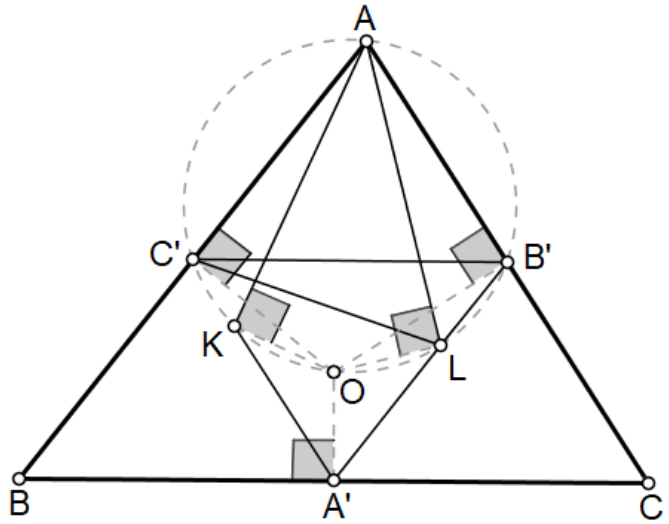
Из точек A и B к окружности с центром в точке O проведены касательные AP, AQ и BM, BN. Докажите, что прямые PQ и MN параллельны тогда и только тогда, когда точки A, O, B лежат на одной прямой ***(А.С. Болотин).***

Решение. По свойству касательных к окружности, проведенных из одной точки $AP = AQ$, $\angle PAO = \angle QAO$. Значит, луч AO содержит биссектрису и высоту равнобедренного треугольника APQ (по свойству равнобедренного треугольника). Итак, прямые AO и PQ перпендикулярны (*). Аналогичные рассуждения позволяют доказать, что прямые BO и MN также перпендикулярны (**). По условию прямые PQ и MN параллельны, что с учетом фактов (*) и (**) равносильно тому, что точки A, O, B лежат на одной прямой. В силу равносильности переходов в ходе решения задачи утверждение доказано в обе стороны. Что и требовалось доказать.



Задача № 3. «Геометрия рассеяния света»

В остроугольном треугольнике ABC точки A', B' и C' – середины сторон BC, CA и AB соответственно. Построили равнобокие трапеции ACA'K и ABA'L. Докажите, что точки A, B', C', K, L лежат на одной окружности ***(А.С. Болотин).***

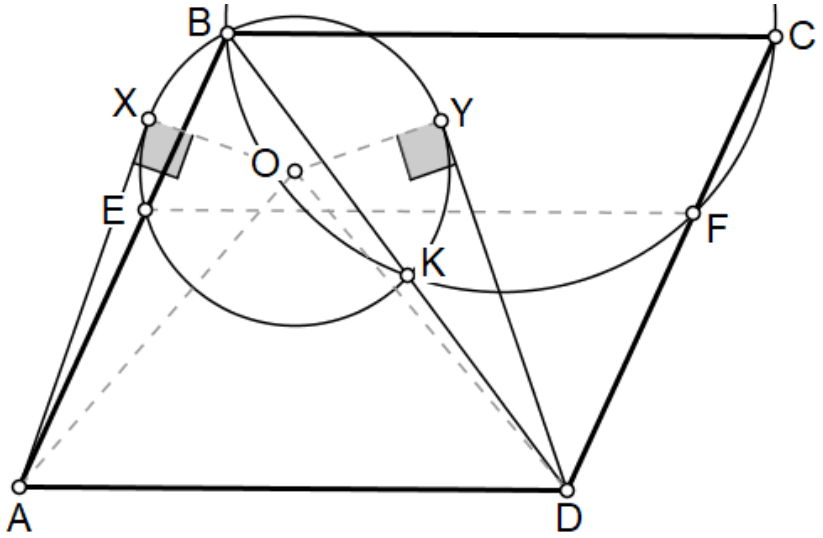


Решение. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC, тогда $\angle AB'O = \angle AC'O = \angle BA'O = 90°$. Заметим, что равнобокая трапеция симметрична относительно серединного перпендикуляра к её основаниям, поэтому $\angle ALO = \angle BA'O = 90°$ и $\angle AKO = \angle OA'C = 90°$. Следовательно, точки K, L, B' и C' лежат на окружности с диаметром AO, так как из этих точек отрезок AO виден под прямым углом. Что и требуется доказать.

Задача № 4. «Геометрия окружности»

В параллелограмме ABCD с тупым углом B провели диагональ BD и построили прямую EF параллельно AD, где точки E и F лежат на сторонах параллелограмма AB и CD соответственно. Окружность, описанная около треугольника BCF, пересекает прямую BD в точке K. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника EBK. Докажите, что треугольник AOD – равнобедренный

(Д.А. Серов).



Решение. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника BCF. По свойству секущих окружности, проведенных из одной точки, верно равенство $DF \cdot DC = DK \cdot DB$. Но $DF = AE$, $DC = AB$, поскольку EF и AD, BC и AD – пары параллельных прямых.

Значит, $DK \cdot DB = AE \cdot AB$. Проведем из точек A и D касательные AX и DY к окружности, описанной около треугольника EBK, где X и Y – точки касания. Тогда, по свойству секущей и касательной, проведенных из одной точки, получаем $AX^2 = AE \cdot AB = DK \cdot DB = DY^2$. Учитывая, что $OX = OY$ (радиусы одной окружности), приходим к равенству: $AO^2 = AX^2 + XO^2 = DY^2 + YO^2 = DO^2$. Тогда, $AO=DO$ и треугольник AOD – равнобедренный. Что и требовалось доказать.

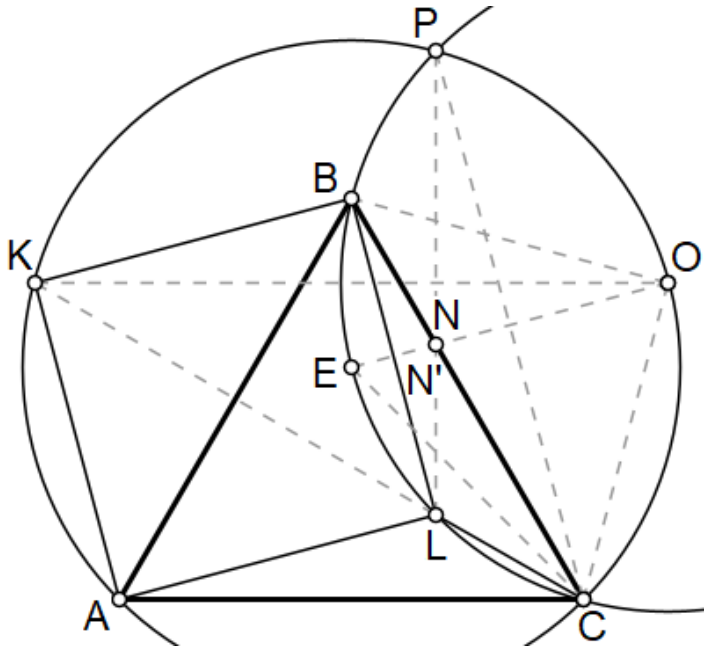
Задача № 5[5]. *«Проще, чем кажется»*

В равностороннем треугольнике ABC на стороне AB, как на диагонали, построили квадрат AKBL (точка K лежит вне треугольника, а точка L - внутри). Пусть точка E – центр окружности α, описанной около треугольника AKC. Точка O - центр окружности β, описанной около треугольника BLC. Точка P – вторая точка пересечения окружностей α и β, отличная от C. Докажите, что прямые EO, BC и PL пересекаются в одной точке ***(К.О. Голубев).***

Решение. Сначала покажем, что точка O лежит на окружности α. $\Delta BLC = \Delta ALC$ по признаку равенства треугольников (по трём сторонам), поэтому луч CL - биссектриса $\angle ACB$, откуда $\angle ALC = \angle BLC = (360° - \angle ALB)/2 = 270°/2 = 135°$. Для окружности β, учитывая, что центральный угол вдвое больше вписанного угла окружности, опирающиеся на одну и ту же дугу, верно: $\angle BOC = 360° - 2 \cdot \angle BLC = 360° - 270° = 90°$. $\Delta AKB = \Delta BOC$, так как они подобны и оба являются прямоугольными и равнобедренными ($OB = OC$, как радиусы β). Поскольку $AB = BC$, коэффициент подобия треугольников равен 1. Поэтому $BK = BO$. В треугольнике BOK: $\angle KBO = \angle KBA + \angle ABC + \angle CBO = 45° + 60° + 45° = 150°$, следовательно, $\angle BOK = (180° - \angle KBO) / 2 = 15°$. $\angle KOC = \angle BOC$ -

[5] Как вы готовитесь к олимпиаде? Решаете вариант предыдущего года?

$-\angle BOK = 90° - 15° = 75°$. $\angle KAC = \angle KAB + \angle BAC = 45° + 60° = 105°$, поэтому $\angle KOC + \angle KAC = 75° + 105° = 180°$. Значит, по признаку четырехугольника, вписанного в окружность следует, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника *AKC*. Таким образом, точка ***O* лежит на окружности *α***. Дополнительно мы получили, что из равенства отрезков $AK = KB = BO = OC$ следует параллельность прямых ***KO* || *AC*** (вписанный в окружность четырёхугольник с равными противоположными сторонами - равнобочная трапеция).



Докажем, что точка *E* лежит на окружности *β*. $KA = KB$, значит точка *K* лежит на серединном перпендикуляре к отрезку *AB*, откуда получаем, что *K* лежит на прямой *LC*. $\angle KCO = \angle LCO = \angle OCA - \angle ACL = \angle KAC - \angle ACB/2 = 105° - 30° = 75°$. Точка *E* - центр окружности *α*, откуда $\angle KEO = 2 \cdot \angle KCO = 2 \cdot 75° = 150°$. $EK = EO$, как радиусы окружности *α* (точка *O* лежит на *α*), поэтому $\angle EOK = (180° - \angle KEO) / 2 = 15°$. $\Delta BOK = \Delta EOK$ (*OK* – общая сторона, все четыре угла этих треугольников, прилегающие к отрезку *OK*, равны по *15°*), поэтому $OB = OE$ и точка ***E* лежит на окружности *β***.

Пусть *N* - точка пересечения прямых *BC* и *PL*. Четырехугольник *BLCP* – вписанный. Более того, $\angle LBC = \angle ABC - \angle ABL = 60° - 45° = 15° = 45° - 30° = \angle BCO - \angle PCO = \angle BCP$. $\angle PCO = 30°$, ведь точка *P* лежит на серединном перпендикуляре к стороне *EO* правильного треугольника *EOC* ($OE = OC$, $EO = EC$), а значит и на биссектрисе угла *ECO*, $\angle ECO = 60°$. Тогда $BL \parallel PC$, поэтому четырехугольник ***BLCP* - равнобедренная трапеция**. $\Delta BNP = \Delta LNC$ (они подобны по трём равным парам углов, а коэффициент подобия равен $BP / LC = 1$). $\angle NLC = \angle PLC = (360° - \angle POC) / 2 = 240°/2 = 120°$. ($\angle POC = 2 \cdot 60°$, ведь ΔEOP и ΔEOC - правильные). $\angle NCL = \angle BCL = 60°/2 = 30°$, поэтому ΔLNC - равнобедренный с углами *120°*, *30°* и *30°*. А значит

равнобедренным является и равный ему треугольник BNP, то есть $\boldsymbol{BP = BN}$.

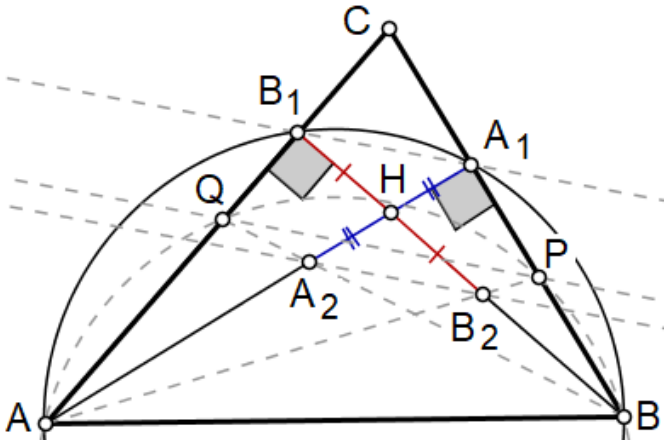
Пусть N' - точка пересечения BC и OE. Докажем, что $BP = BN'$. $\Delta BOE = \Delta BOP$ ($OE = OB = OP$, $\angle BOP = \angle EOP - \angle BOE = 60° - 30° = 30° = \angle BOE$), откуда $\boldsymbol{BE = BP}$. $\angle BEN' = \angle BEO = (180° - \angle EOB) / 2 = 150°/2 = 75°$. $\angle EN'B = \angle ON'C = 180° - \angle N'CO - \angle N'OC = 180° - \angle BCO - \angle EOC = 180° - 45° - 60° = 75° = \angle BEN'$, поэтому $\Delta BEN'$ - равнобедренный, следовательно, $\boldsymbol{BE = BN'}$. Итого: $BP = BE = BN'$.

Итак, две точки N и N' на отрезке BC выбраны так, что $BN = BP = BN'$, значит точки N и N' совпадают, поэтому прямые BC, EO и PL пересекаются в одной точке. Что и требовалось доказать.

10-11 классы

Задача № 1. «Подобные & антипараллельные»

В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1, пересекающиеся в точке H. Точки A_2, B_2 симметричны относительно H точкам A_1 и B_1 соответственно. Прямые AB_2 и BA_2 пересекают отрезки CB и CA соответственно в точках P и Q. Докажите, что четырёхугольник ABPQ – вписанный ***(А. С. Болотин).***



Решение 1. Заметим, что треугольники AB_1H и BA_1H подобны по признаку (углы B_1HA и A_1HB равны как вертикальные, углы AB_1H и BA_1H - прямые). Тогда $\frac{AB_1}{BA_1} = \frac{B_1H}{A_1H} = \frac{2 \cdot B_1H}{2 \cdot A_1H} = \frac{B_1B_2}{A_1A_2}$. Значит, треугольники AB_1B_2 и BA_1A_2 подобны по признаку (по двум сторонам и углу между ними), откуда следует равенство углов B_2AB_1 и A_1BA_2, а значит четырёхугольник $ABPQ$ – вписанный. Что и требовалось доказать.

Решение 2. Заметим, что так как углы AB_1B и AA_1B -прямые, то точки A, B_1, A_1, B лежат на одной окружности, откуда $\angle ABH = \angle B_1A_1H$. Четырехугольник $A_1B_2A_2B_1$ – параллелограмм, тогда $\angle B_1A_1H = \angle HA_2B_2$. Итак, $\angle ABH = \angle HA_2B_2$, откуда следует, что четырехугольник AA_2B_2B вписан в окружность, значит,

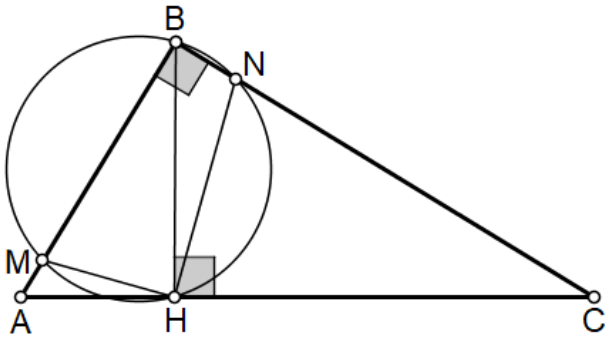
$\angle A_2AB_2 = \angle A_2BB_2$. Осталось заметить, что $\angle A_2AQ = \angle PBB_2$ (это следует из того, что AB_1A_1B – вписанный четырёхугольник), и $\angle PAQ = \angle PAA_2 + \angle A_2AQ = \angle B_2BQ + \angle PBB_2 = \angle PBQ$. Значит, четырехугольник $ABPQ$ – вписанный, что и требовалось доказать.

Решение 3. Заметим, что прямые B_1A_1 и AB антипараллельны относительно угла AHB[6], так как четырёхугольник AB_1A_1B – вписанный (см. Решение 2). Прямые B_1A_1 и B_2A_2 параллельны, так как $B_1A_1B_2A_2$ – параллелограмм по построению. Значит, прямые A_2B_2 и AB антипараллельны относительно угла AHB, откуда следует, что AA_2B_2B – вписанный четырехугольник и $\angle A_2AB_2 = \angle A_2BB_2$. Завершается доказательство аналогично Решению 2.

Комментарий. Последнее решение на самом деле повторяет второе, освобождая от необходимости составления равенств, связанных с углами конструкции.

Задача № 2. «2023»

В треугольнике ABC с прямым углом B проведена высота BH. Точка M лежит на отрезке AB, AM:MB = 1:2023. Окружность, описанная около треугольника MBH, пересекает отрезок BC в точке N. В каком отношении точка N делит отрезок BC? ***(А. С. Болотин)***



Решение 1. Пусть $\angle BAH = \alpha$, тогда $\angle ABH = 90° - \alpha$, $\angle CBH = \alpha$, $\angle BCH = 90° - \alpha$. В силу того, что точки M, B, N, H лежат на одной окружности, равны углы: $\angle HMA = \angle HNB$. Но тогда подобны треугольники AMH и BNH ($\angle BAH = \angle CBH$, $\angle HMA = \angle HNB$), а также

[6] Антипараллельные прямые — прямые, образующие при пересечении двух данных прямых (или сторон данного угла) равные углы, но с противоположных сторон. См.: https://ru.wikipedia.org/wiki/Антипараллельные_приямые

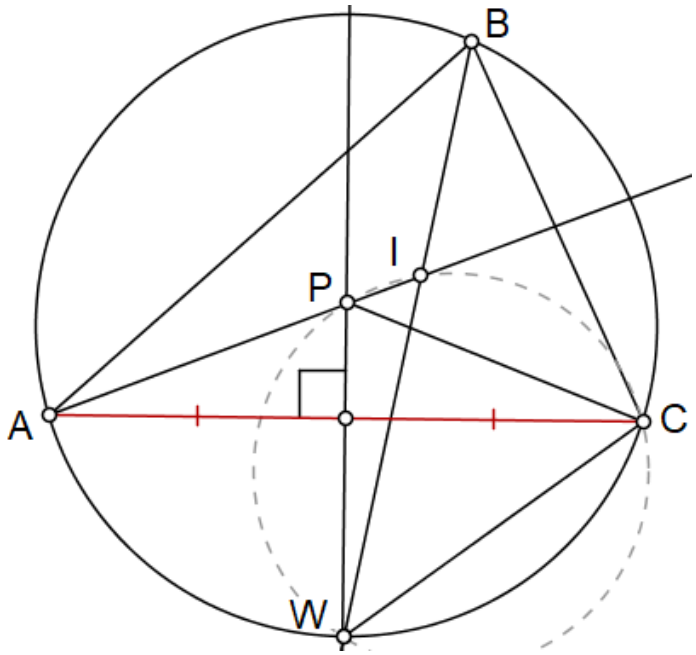
MBH и NCH ($\angle ABH = \angle BCH$, $\angle HMB = \angle HNC$). Значит, $\frac{AM}{MH} = \frac{BN}{NH}$, $\frac{MH}{MB} = \frac{NH}{NC}$, перемножая эти равенства, получим $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC}$, откуда $BN : NC = 1 : 2023$.

Решение 2. В силу подобия треугольников ABH и BCH поворотная гомотетия с центром в точке H на угол 90° с коэффициентом HB/HA переводит первый треугольник во второй. Тогда в силу равенства углов $\angle HMA = \angle HNB$ (см. решение 1) при таком преобразовании точка M переходит в точку N, откуда $BN : NC = AM : MB = 1 : 2023$.

Ответ: точка N делит отрезок BC в отношении $1:2023$.

Задача № 3. «Точки окружности»

В треугольнике ABC проведены биссектрисы углов A и B, которые пересекаются в точке I. Серединный перпендикуляр к стороне AC пересекает биссектрису угла A в точке P, а биссектрису угла B в точке W. Докажите, что точки C, I, P, W лежат на одной окружности ***(А. С. Болотин).***



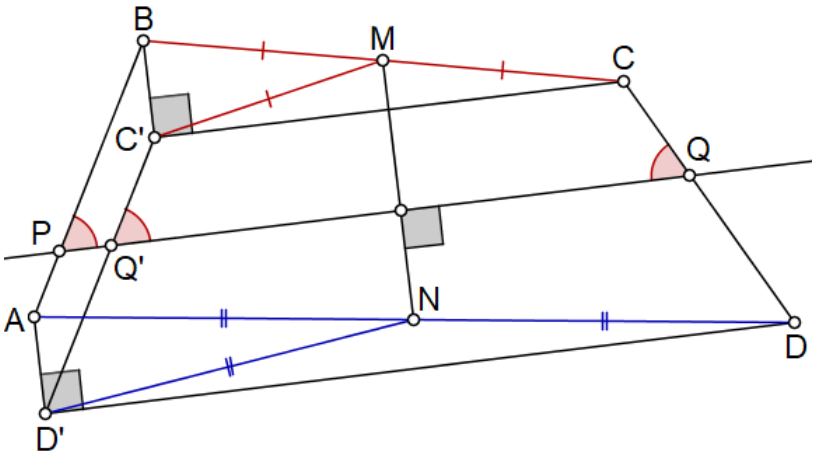
Решение. Обозначим $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$. Заметим, что $\angle AIW = \alpha + \beta$, как внешний для треугольника ABI. Кроме того, треугольник APC – равнобедренный, так как PW – серединный перпендикуляр к отрезку AC. Значит, $\angle PCA = \angle PAC = \alpha$. Теперь заметим, что серединный перпендикуляр к AC и биссектриса угла B пересекают окружность, описанную около треугольника ABC, в

середине дуги AC. Тогда $\angle ACW = \angle ABW = \beta$, и $\angle PCW = \angle PCA + \angle ACW = \alpha + \beta = \angle AIW$, откуда следует, что точки C, I, P, W лежат на одной окружности. Что и требовалось доказать.

Задача № 4. «Антиперпендикулярность»

В четырёхугольнике $ABCD$ точки M и N – середины сторон BC и DA соответственно. К отрезку MN провели перпендикуляр, который пересекает отрезки AB и CD в точках P и Q соответственно. Оказалось, что $\angle QPB = \angle PQC \neq 90°$. Докажите, что $AB = CD$ ***(А. С. Болотин).***

Решение 1. Так как M и N – середины сторон BC и AD, то $2\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$. Учитывая, что прямые NM и PQ перпендикулярны, заметим, что $AB \cdot PQ \cdot \cos\angle QPB = AB \cdot PQ \cdot \cos\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PQ}) = (2\overrightarrow{NM} - \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}) = (-\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{PQ}) = CD \cdot PQ \cdot \cos\angle(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{PQ}) = CD \cdot PQ \cdot \cos\angle PQC$. Итак, $AB \cdot PQ \cdot \cos\angle QPB = CD \cdot PQ \cdot \cos\angle PQC$, откуда в силу условия, что $\angle QPB = \angle PQC \neq 90°$ следует, что $AB = CD$. Что и требовалось доказать.



Решение 2. Пусть C', Q', D' – точки, симметричные точкам C, Q, D относительно прямой MN. Заметим, что в силу симметрии $C'M = CM = MB$. Значит, в треугольнике BCC' медиана равна

половине стороны, к которой она проведена, то есть $\angle CC'B = 90°$. Таким образом, прямые BC' и $C'C$ перпендикулярны. Аналогично можно доказать, что прямые AD' и $D'D$ также перпендикулярны. Осталось заметить, что прямые $C'C$ и $D'D$ параллельны, так как они перпендикулярны прямой MN. Откуда следует параллельность прямых BC' и AD'. Кроме того, в силу симметрии верно равенство: $\angle QPB = \angle PQC = \angle QQ'C'$. Значит, прямые AB и $D'C'$ параллельны. Итак, в четырёхугольнике $ABC'D'$ противоположные стороны попарно параллельны. Значит, $ABC'D'$ – параллелограмм (возможно, вырожденный), тогда $AB = C'D' = CD$, что и требовалось доказать.

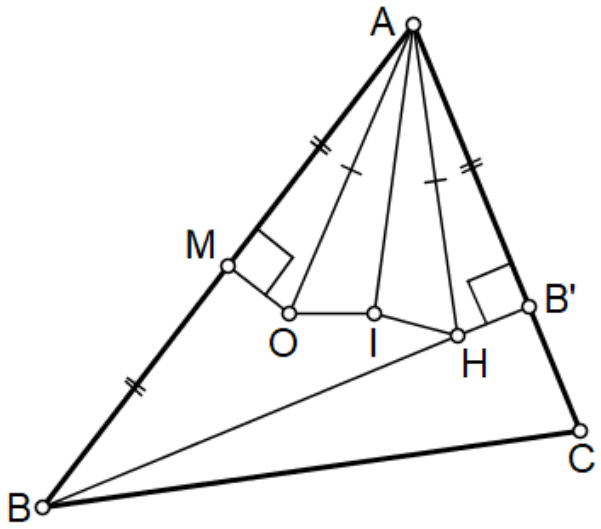
Комментарий: Подумайте, где во втором доказательстве было использовано условие: $\angle QPB = \angle PQC \neq 90°$?

Задача № 5. «Три Ц»[7]

Найдите угол A остроугольного треугольника ABC, если площади треугольников AOI и AHI равны (H – ортоцентр, точки O и I – центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC соответственно) ***(Д.Ю. Кузнецов).***

Решение 1. В силу изогональной сопряжённости $\angle OAI=\angle HAI$, тогда из равенства площадей получаем, что $AH=AO=R$ – радиус описанной окружности. В силу подобия прямоугольных треугольников AHB_1 и BCB_1 имеем равенство $\frac{AH}{BC}=\frac{HB_1}{CB_1}=tg\angle HCB_1=ctg\alpha \Leftrightarrow R=BC\cdot ctg\alpha$, где $\alpha=\angle BAC$. Согласно теореме синусов $2R=\frac{BC}{\sin\alpha}$. Значит, $\frac{1}{\sin\alpha}=2ctg\alpha=2\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{1}{2}$, откуда $\alpha=60°$.

[7] Как вы готовитесь к олимпиаде? Решаете вариант предыдущего года?



Решение 2. Заметим, что $\angle BAO = \angle CAH = 90° - \angle ACB$, откуда $OAI=\angle IAH$ (ведь AI – биссектриса угла BAC). Из равенства площади треугольников AOI и AHI, углов OAI и IAH, общей стороны AI этих треугольников получаем $AO = AH$. Пусть M - середина AB, точка B' - основание высоты треугольника ABC, проведенной из вершины B. Тогда треугольники AOM и AHB' равны, ведь у них есть пара прямых углов и $\angle BAO = \angle CAH$, $AO = AH$. Тогда в прямоугольном треугольнике ABB' имеем: AB' – катет, $AB' = AM = AB/2$, откуда следует, что угол A остроугольного треугольника ABC равен $60°$.

Ответ: $\angle A=60°$.

XVII Устная геометрическая олимпиада «УГОЛ»

Научный руководитель олимпиады:

Петрухин Николай Семенович,

Заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, заслуженный профессор НИУ ВШЭ

Оргкомитет олимпиады:

Созинова Наталья Владимировна,

Заслуженный учитель РФ, лауреат премии Нижнего Новгорода,
директор МБОУ "Лицей № 165", председатель оргкомитета олимпиады

Марычева Наталья Михайловна,

Заслуженный учитель РФ, заместитель директора МБОУ "Лицей № 165"

Сусуйкина Алла Александровна, заместитель директора МБОУ "Лицей № 165"

Председатель жюри:

Серова Наталья Александровна,

кандидат пед. наук, заместитель директора НИУ ВШЭ – Нижний Новгород

Жюри:

Бажилова Ева – выпускница МБОУ "Лицей № 165", 2017;

Бодрова Наталья - выпускница МАОУ "Лицей № 82";

Великанова С.Ю. - учитель математики МБОУ "Лицей № 40";

Гаврилова Е.Ю. - учитель математики МБОУ "Лицей № 165";

Гордеева Д.А. - учитель математики МБОУ "Лицей № 165";

Жирнова Е.Е. - учитель математики МБОУ "Лицей № 165";

Кузнецов Д.Ю. – руководитель "ШИТиМ" НИУ-ВШЭ - Нижний Новгород;

Куликов Антон – выпускник МБОУ "Лицей № 165", 2003;

Куликов Денис – выпускник МБОУ "Лицей № 165", 2021;

Малкова Н.Г. - учитель математики МБОУ "Лицей № 40";

Маркеева Таисия – выпускница МБОУ "Лицей № 165", 2021;

Марычева Н.М. - зам. директора МБОУ "Лицей № 165";

Масленников Федор - выпускник МБОУ "Лицей № 165", 2019;

Новикова Е.Н. - учитель математики МБОУ "Лицей № 165";

Погорелов Дмитрий - выпускник МБОУ "Лицей № 165", 2009;

Потехина А.А. - учитель математики МБОУ "Лицей № 165";

Пташкина Ирина – выпускница МБОУ "Лицей № 165", 2014;

Пташкина Н.В. - учитель математики МБОУ "Школа № 126 ";

Романова И.Е. - учитель математики МБОУ "Лицей № 165";

Рябчикова Валерия - выпускница МБОУ "Лицей № 165", 2017;
Серов Даниил – обучающийся МАОУ Лицей г. Бор (11 класс)
Трубников Артем - выпускник МБОУ "Лицей № 165", 2021;
Цветкова И.В. – учитель математики МБОУ "Лицей № 165";
Чернышов Егор – выпускник МБОУ "Лицей № 165", 2003;
Шиляев Иван - обучающийся МАОУ "Лицей № 82" (11 класс)
Шмелев Алексей – выпускник МАОУ "Лицей № 36".

XVII устная геометрическая олимпиада «УГОЛ»
Задачи и решения

Составители: К.О. Голубев, Д.Ю. Кузнецов, Н.А. Серова

Тираж 350 экз.

Нижегородский университетский округ ВШЭ
603155, Нижний Новгород, Б. Печерская, 25/12
Тел. (831)4195517
http://www.hse.ru/org/nnov/district

МБОУ «Лицей №165»
603138, Нижний Новгород, Строкина, 7
Тел. (831)2973237
http://liceum165nn.ru