О топологии несущего многообразия простейших систем с регулярной динамикой

Е.Я. Гуревич, И. Сараев

В работе Бонатти, Гринеса, Медведева, Пеку *Three-dimensional manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves*, Topology and Appl. (2002), получен следуюший результат.

Теорема 1. *Пусть M^3 — гладкое замкнутое ориентируемое монобразие размерности 3 и $f : M^3 \to M^3$ — диффеоморфизм Морса-Смейла без гетероклинических кривых. Тогда M^3 диффеоморфно связной сумме сферы S^3 и $g_f = (\nu_f - \mu_f + 2)/2$ копий $S^2 \times S^1$, где ν_f, μ_f — число седловых и узловых периодических точек f, соответственно.*

На одном из последних семинаров обсуждалось обобщение этого результата на случай, когда M^3 неориентируемо.

Для многообразий размерности $n \geq 4$ имеется следующее обобщение этого результата, полученное в цикле работ Е.Я. Гуревич, В.С. Медведева, В.З. Гринеса, Е.В. Жужомы и О.В. Починки 2013-2023 гг.

Теорема 2. *Пусть M^n — гладкое ориентируемое замкнутое многообразие размерности $n \geq 4$, и $f : M^n \to M^n$ — диффеомофизм Морса-Смейла такой, что $(n-1)$-мерные инвариантные многообразия седловых периодических точек либо не пересекаются с инвариантными многообразиями других седловых периодических точек, либо пересекаются только с одномерными инвариантными многообразиями. Пусть ν_f — число седловых периодических точек с индексами Морса, равными 1 и $(n-1)$, μ_f – число узловых периодических точек f.*

Тогда M^n гомеоморфно связной сумме $g_f = (\nu_f - \mu_f + 2)/2$ копий $S^{n-1} \times S^1$ и некоторого односвязного многообразия N^n.

Более того, если f не имеет гетероклинических пересечений, то N^n гомеоморфно сфере S^n в том и только том случае, когда неблуждающее множество f не содержит периодических точек с индексами Морса, отличными от 1 и $(n-1)$.

В докладе обсуждается естественное обобщение теоремы 2 на случай, когда многообразие M^n неориентируемо и не является гладким, а f — регулярный гомеоморфизм. Содержательную часть доклада занимает уточнение топологии односвязных многообразий N^4, допускающие полярные системы с регулярной динамикой.

Теорема 3. *Пусть M^n — замкнутое топологическое многообразие размерности $n \geq 4$ и $f : M^n \to M^n$ — регулярный гомеоморфизм такой, что $(n-1)$-мерные инвариантные многообразия седловых периодических точек либо не пересекаются с инвариантными многообразиями других седловых периодических точек, либо пересекаются только с одномерными инвариантными многообразиями. Тогда возможны следующие альтернативы.*

1. *Если M^n ориентируемо, то оно гомеоморфно связной сумме g_f копий $S^{n-1} \times S^1$ и замкнутого многообразия N^n.*

2. *Если M^n неориентируемо, то оно гомеоморфно связной сумме g_f копий нетривиальных S^{n-1}-расслоений над S^1 и замкнутого многообразия N^n.*

3. *в обоих случаях N^n допускает полярный регулярный гомеоморфизм без седловых периодических точек индексов 1 и $(n-1)$. Если M^n, f гладкие, то N^n односвязно.*

Доказательство приведенной теоремы основывается на следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть Q^{n-1}, M^n — замкнутые топологические многообразие, Q^{n-1} односвязно и локально плоско в M^n. Тогда существует вложение $e : Q^{n-1} \times [-1,1] \to M^n$ такое, что $e(Q^{n-1} \times \{0\}) = Q^{n-1}$.*

Одна из версий теоремы 3 обобщает классические „теоремы о сфере“ (гласящие, что замкнутое многообразие, допускающее диффеоморфизм Морса-Смейла или регулярный гомеоморфизм, все седла которого имеют индекс 1, гомеоморфно сфере):

Лемма 2. *Пусть M^n — гладкое замкнутое многообразие размерности $n \geq 4$, $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса-Смейла, неблуждающее множество которого не содержит периодических точек индексов Морса 1 и $n-1$. Тогда f полярный, а многообразие M^n односвязно и, следовательно, ориентируемо.*

Для односвязного замкнутого многообразия N^4, фигурирующего в заключении теорем 2, 3, имеется следующий результат, базирующийся на замечательных результатах Рохлина, Фридмана, Дональдсона и Фуруты.

Предложение 1. *Пусть N^4 — односвязное замкнутое многообразие размерности 4, допускающее полярный диффеоморфизм $f : N^4 \to N^4$ с k_2 седловыми периодическими точками. Тогда N^4 гомеоморфно одному из следующих попарно негомеоморфных многообразий.*

1. *связная сумма k_2 копий $\mathbb{CP}^2$;*
2. *связная сумма $m_1 \geq 1$ копий $\mathbb{CP}^2$ и $m_2 \geq 1$ копий $-\mathbb{CP}^2$, $m_1 + m_2 = k_2$;*
3. *связная сумма $\dfrac{k_2}{2}$ копий $S^2 \times S^2$;*
4. *связная сумма $2m_1 > 0$ копий $\pm E_8$-многообразий Фридмана и $m_2 \geq 2m_1 + 1$ копий $S^2 \times S^2$, $16m_1 + 2m_2 = k_2$.*

Многообразия, перечисленные в предыдущем предложении, являются лишь малой частью всех топологических односвязных четырехмерных многообразий (классификация которых известна). Однако, мы показываем, что для регулярных потоков и гомеоморфизмов справедлив следующий неожиданный результат.

Теорема 4. *Если замкнутое односвязное многообразие размерности 4 допускает регулярный поток без гетероклинических пересечений, то оно сглаживаемо и гомеоморфно одному из многообразий, перечисленному в предложении 1.*

В частности, известно, что существует ровно одно топологическое многообразие, называемое фальшивым $\mathbb{CP}^2$, гомотопически эквивалентное, но не гомеоморфное комплексной проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$. Фальшивое $\mathbb{CP}^2$ не допускает гладкой структуры и, следовательно, не допускает топологической функции Морса в точности с тремя критическими точками и регулярного потока без гетероклинических пересечений.

Следствие 1. *Пусть четырехмерное односвязное многообразие M^4 допускает регулярный гомеоморфизм $f : M^4 \to M^4$ без гетероклинических пересечений. Если M^4 несглаживаемо, то f не включается в топологический поток.*